1 次元 Maxwell 方程式の (d'Alembert) 解

1　d'Alembert 解による表現

E_z, H_y 偏波の 1 次元の Maxwell の方程式は以下で与えられる。

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{1}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \tag{2}$$

式 (1) を時間で微分、式 (2) を x で微分して代入すると、次式を得る。

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \tag{3}$$

ここで、$c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ とおくと以下のように書ける。

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \tag{4}$$

この 2 階偏微分方程式の解は d'Alembert 解[1]と呼ばれ、次式で与えられる。

$$E_z(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \tag{5}$$

ここで、$f(\xi), g(\eta)$ は任意の関数である。

このとき、H_y は、式 (1) より、$f'(\xi) = \dfrac{df(\xi)}{d\xi}, g'(\eta) = \dfrac{dg(\eta)}{d\eta}$ を用いて、以下を満足する。

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\left\{-cf'(x-ct) + cg'(x+ct)\right\} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left\{f'(x-ct) - g'(x+ct)\right\} \tag{6}$$

両辺を x で積分すれば、

$$\begin{aligned} H_y &= \int \frac{\partial H_y}{\partial x}dx = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left\{\int f'(x-ct)dx - \int g'(x+ct)dx\right\} \\ &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left\{\int f'(\xi)d\xi - \int g'(\eta)d\eta\right\} = -Y\{f(\xi) - g(\eta)\} = -Y\{f(x-ct) - g(x+ct)\} \end{aligned} \tag{7}$$

となる。$f(x-ct)$ は $+x$ 方向に伝搬する波、$g(x+ct)$ は $-x$ 方向に伝搬する波を表している。

規格化した電磁界表現:　$e_z(x,t) = \sqrt{\varepsilon}E_z(x,t), h_y(x,t) = \sqrt{\mu}H_y(x,t)$ を用いると、

$$\begin{aligned} e_z(x,t) &= \sqrt{\varepsilon}\{f(x-ct) + g(x+ct)\} \\ &= F(x-ct) + G(x+ct) \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} h_y(x,t) &= -\sqrt{\mu}Y\{f(x-ct) - g(x+ct)\} = -\sqrt{\mu}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\{F(x-ct) - G(x+ct)\} \\ &= -F(x-ct) + G(x+ct) \end{aligned} \tag{9}$$

となる。

[1] "ダランベール" と発音する

2　初期値問題の解

初期値 $E_z(x,0)=E_0(x), H_y(x,0)=H_0(x)$ が与えられたとき、任意の時刻 $t(>0)$ における $E_z(x,t), H_y(x,t)$ は以下のように与えられる。

初期条件より、

$$E_z(x,0) = f(x)+g(x)=E_0(x) \tag{10}$$

$$H_y(x,0) = -Y\{f(x)-g(x)\}=H_0(x) \tag{11}$$

となるので、これを解けば

$$f(x) = \frac{1}{2}\left\{E_0(x)-\frac{1}{Y}H_0(x)\right\} \tag{12}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\left\{E_0(x)+\frac{1}{Y}H_0(x)\right\} \tag{13}$$

となる。結局、任意の時刻の電磁界は以下で与えられる。

$$E_z(x,t) = f(x-ct)+g(x+ct)=\frac{1}{2}\left\{E_0(x-ct)+E_0(x+ct)-\frac{1}{Y}H_0(x-ct)+\frac{1}{Y}H_0(x+ct)\right\} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} H_y(x,t) &= -Y\{f(x-ct)-g(x+ct)\}=-Y\frac{1}{2}\left\{E_0(x-ct)-\frac{1}{Y}H_0(x-ct)-E_0(x+ct)-\frac{1}{Y}H_0(x+ct)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\{-YE_0(x-ct)+YE_0(x+ct)+H_0(x-ct)+H_0(x+ct)\} \end{aligned} \tag{15}$$

規格化した電磁界表現:　初期条件として $e_z(x,0)=e_0(x), h_y(x,0)=h_0(x)$ を用いると、

$$e_0(x)=F(x)+G(x), \quad h_0(x)=-F(x)+G(x) \tag{16}$$

$$\therefore F(x)=\frac{1}{2}\{e_0(x)-h_0(x)\}, \quad G(x)=\frac{1}{2}\{e_0(x)+h_0(x)\} \tag{17}$$

が得られるので、$e_z(x,t), h_y(x,t)$ は次式のように与えられる。

$$e_z(x,t) = F(x-ct)+G(x-ct)=\frac{1}{2}\{e_0(x-ct)+e_0(x+ct)-h_0(x-ct)+h_0(x+ct)\} \tag{18}$$

$$h_y(x,t) = -F(x-ct)+G(x-ct)=\frac{1}{2}\{-e_0(x-ct)+e_0(x+ct)+h_0(x-ct)+h_0(x+ct)\} \tag{19}$$

例:　初期条件として、

$$e_0(x)=S(x)\sin^{2m+1}(\pi x), \quad h_0(x)=0 \tag{20}$$

としたときを考える。ここで、

$$S(x)=\begin{cases} 1, & 0\leqq x\leqq 1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases} \tag{21}$$

である。このとき、時刻 t では次式となる。

$$e_z(x,t) = \frac{1}{2}\left[S(x-ct)\sin^{2m+1}(\pi(x-ct))+S(x+ct)\sin^{2m+1}(\pi\{x+ct\})\right] \tag{22}$$

$$h_y(x,t) = \frac{1}{2}\left[-S(x-ct)\sin^{2m+1}(\pi(x-ct))+S(x+ct)\sin^{2m+1}(\pi\{x+ct\})\right] \tag{23}$$