

数値フーリエ変換

1 フーリエ変換対

時間因子 $e^{j\omega t}$ に対するフーリエ変換対は以下のように定義できる。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} dt \quad (2)$$

2 数値フーリエ変換

時刻 $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, N\Delta$ におけるデータ $f_0 = f(0), f_1 = f(\Delta t), \dots, f_N = f(N\Delta t)$ があつたとき、数値的にフーリエ変換する方法を考える。 $t < 0$ において $f(t) = 0$ かつ、 $t > N\Delta t$ において $f(t) = 0$ とする。このとき、 $e^{-j\omega t}$ も離散点のみ考え、離散点を線形に補完した関数で考えれば、

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{N\Delta t} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\Delta t} f(t)e^{-j\omega t} dt + \int_{\Delta t}^{2\Delta t} f(t)e^{-j\omega t} dt + \dots + \int_{(N-1)\Delta t}^{N\Delta t} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{\Delta t}{2}(f_0 + f_1 e^{-j\omega \Delta t}) + \frac{\Delta t}{2}(f_1 e^{-j\omega \Delta t} + f_2 e^{-j\omega 2\Delta t}) + \dots + \frac{\Delta t}{2}(f_{N-1} e^{-j\omega (N-1)\Delta t} + f_N e^{-j\omega N\Delta t}) \\ &= \frac{\Delta t}{2} f_0 + \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} f_n e^{-j\omega n\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} f_N e^{-j\omega N\Delta t} \end{aligned} \quad (3)$$

仮に、 $f_0 = 0, f_N = 0$ とすれば、

$$F(\omega) = \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} f_n e^{-j\omega n\Delta t} = \Delta t \sum_{n=1}^N f_n e^{-j\omega n\Delta t} \quad (4)$$

で十分となる。

3 補足

実際には、変数 t の伸長・平行移動による変数変換を行ったときのフーリエ変換の変化を考えれば、時刻 1 毎のフーリエ変換だけを計算するルーチンがあればよい。また、このときの最大周波数は 0.5、離散周波数間隔は $\frac{1}{N}$ となるので、これを利用したルーチンが離散フーリエ変換 (Discrete Fourier Transform; DFT) と呼ばれるものである。

DFT の計算量は N 点の時系列データに対し、 $O(N^2)$ となる。一方、 N が 2 のべき乗である場合、各周波数のスペクトルは再帰的に求めることが可能となる。これを高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform; FFT) と呼び、計算量は $N \log_2 N$ に軽減される。