ダイポールを組み合わせて様々な電荷分布を表現

ダイポールを組み合わせることで様々な電荷分布を表現することができます。その意味で、電気双極子は「電荷分布の基本単位」としての意味を持っているためです。(電磁気学の範囲外になりますが、電磁波の場合は「電流ダイポール」を基本の波源として取り扱います。)

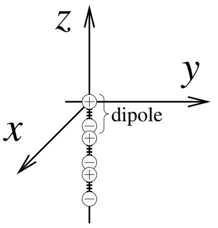

図 1 双極子による点電荷の表現

例 1. 点電荷: 原点に点電荷がある場合を、電気双極子で表現できるかを考えます。点電荷の方が取り扱いが簡単なため、無理やり電気双極子にする必要はないのですが、飽くまで「表現できるか」を確認するための例です。

この点電荷は、例えば z 軸上の $-\infty < z \leqq 0$ まで $+z$ 方向を向いた同じ大きさのダイポール・モーメントの電気双極子を置くことで表現できます。$z < 0$ では電気双極子は並んでいるため、正負の電荷はキャンセルされ 0 となります。しかし、$z = 0$ にある正の電荷のみはキャンセルするダイポールがないため、一つだけ残ることになります。

数学的な表現としては、$\boldsymbol{r}_0 = z_0\hat{\boldsymbol{z}}$ にある微小なダイポール・モーメント $d\boldsymbol{p} = q\,dz_0\hat{\boldsymbol{z}}$ として、これによる電位 $d\varphi$ が

$$d\varphi = \frac{d\boldsymbol{p} \bullet (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^3} = \frac{q\hat{\boldsymbol{z}} \bullet (\boldsymbol{r} - z_0\hat{\boldsymbol{z}})}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r} - z_0\hat{\boldsymbol{z}}|^3}dz_0 = \frac{q(z - z_0)}{4\pi\varepsilon_0\{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2\}^{\frac{3}{2}}}dz_0$$

となります。これを $-\infty < z_0 \leqq 0$ で積分することで電位 φ が得られます。

$$\begin{aligned}\varphi = \int d\varphi &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{0} \frac{z - z_0}{\{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2\}^{\frac{3}{2}}}dz_0 \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2\}^{-\frac{1}{2}}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\{x^2 + y^2 + z^2\}^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

これは原点に点電荷があるときの電位と等しいことが分かります。

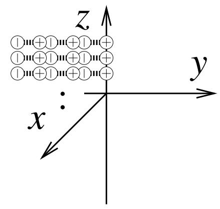

図 2 双極子による線電荷の表現

例 2. 無限長直線電荷: z 軸上に無限長の線電荷の場合を考えます。線電荷密度として λ [C/m] としましょう。

これを電気双極子で表すには、例えば $+y$ 方向を向いた微小ダイポール・モーメント $d\boldsymbol{p} = \lambda\,dz_0\,dy_0\hat{\boldsymbol{y}}$ が、$-\infty < y_0 < 0$ と $-\infty < z_0 < \infty$ に分布していればよいことになります。

式は立てられますが、この場合に無限遠を 0 とした電位は求められないので、無限遠を 0 としたダイポールの電位の式を積分すると発散してしまいます。

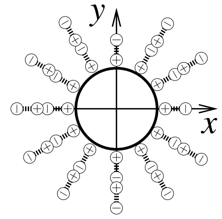

図 3 双極子による円周線電荷

例 3. 円周上に分布した線電荷: 半径 a [m] の円周上に線電荷密度 λ [C/m] で分布している状態を考えます。

この場合、$-\rho$ 方向を向いたダイポールが $\rho \geqq a$ に分布していれば円周上に分布した線電荷を表すことができます。位置 $\boldsymbol{r}_0 = \rho_0(\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi_0\hat{\boldsymbol{y}})$, $a \leqq \rho_0 < \infty, 0 \leqq \phi_0 < 2\pi$ に、ダイポール・モーメント $d\boldsymbol{p} = \lambda a\,d\phi_0\,d\rho_0\{-\hat{\boldsymbol{\rho}}(\phi_0)\}$ が分布していると考えます。

従って、

$$
\begin{aligned}
d\varphi &= \frac{-\lambda a\, d\phi_0\, d\rho_0 \hat{\boldsymbol{\rho}}(\phi_0) \bullet \{\boldsymbol{r} - \rho_0(\cos\phi_0 \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi_0 \hat{\boldsymbol{y}})}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r} - \rho_0(\cos\phi_0 \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi_0 \hat{\boldsymbol{y}})|^3} \\
&= \frac{-\lambda a\, d\phi_0\, d\rho_0 \{(x - \rho_0\cos\phi_0)\cos\phi_0 + (y - \rho_0\sin\phi_0)\sin\phi_0\}}{4\pi\varepsilon_0 \{(x - \rho_0\cos\phi_0)^2 + (y - \rho_0\sin\phi_0)^2 + z^2\}^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

となります。

これを積分すれば電位 φ がわかりますが、z 軸上の点 $\boldsymbol{r} = z\hat{\boldsymbol{z}}$ でないと、数式で積分結果を式で得ることができません。そこで、$\boldsymbol{r} = z\hat{\boldsymbol{z}}$ として計算しましょう。

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \int d\varphi = \int_a^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\lambda a \rho_0}{4\pi\varepsilon_0 \{\rho_0^2 + z^2\}^{\frac{3}{2}}} d\phi_0\, d\rho_0 = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0} \int_a^\infty \frac{\rho_0}{(\rho_0^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho_0 \\
&= \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0} \left[-(\rho_0^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right]_a^\infty = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0 (a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
$$

直接解けばもう少し簡単なことを、より難しく計算しただけです。