FDTD 法

1 概要

有限差分時間領域 (Finite Difference Time Domain; FDTD) 法は、モーメント法 (Method of Moments; MOM)、有限差分法 (Finite Element Method; FEM) と並んで広く用いられている数値電磁界解析法であり、1966 年に K. S. Yee によって基本的アルゴリズムが提案された [?]。

時間領域の Maxwell の方程式を直接差分化する手法であり、連立一次方程式を解くことがないので、簡単に計算ができる (並列化も容易)。また時間領域解法であるため、広帯域の応答が一回の計算で得ることが可能である。また、非線形現象なども取り扱うことが可能である。

2 有限差分と精度

2.1 有限差分

有限差分とは、空間を離散的な点で表し、離散点での傾きを用いることで微分を近似的に表現する手法である。

最も簡単な方法として、空間座標 x を、適当に小さい値 Δx で分割し、各点を $x_i = i\,\Delta x$ $(i = 0, 1, \cdots)$ と表すこととする。また関数を $y(x)$ で表す。

このとき、x_i における微分 $\dfrac{dy}{dx}(x_i)$ は次のように表せる。

$$\frac{dy}{dx}(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{\Delta x} = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{\Delta x} = \frac{y(x_{i+\frac{1}{2}}) - y(x_{i-\frac{1}{2}})}{\Delta x} \tag{1}$$

これらはそれぞれ前進差分、後退差分、中心差分と呼ばれる。

2.2 精度

差分の精度は以下のように求められる。関数 $y(x)$ を x_i の周りでテイラー展開すると

$$y(x) = y(x_i) + \frac{dy}{dx}(x_i)(x - x_i) + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}(x_i)(x - x_i)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3y}{dx^3}(x_i)(x - x_i)^3 + \cdots \tag{2}$$

となる。これを用いると前進差分は

$$\begin{aligned}\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x}\left\{y(x_i) + \frac{dy}{dx}(x_i)\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}(x_i)\Delta x^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3y}{dx^3}(x_i)\Delta x^3 + \cdots - y(x_i)\right\} \\ &= \frac{dy}{dx}(x_i) + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}(x_i)\Delta x + \frac{1}{3!}\frac{d^3y}{dx^3}(x_i)\Delta x^2 + \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

となる。右辺第一項が厳密に x_i における微分なのに対し、第二項目以降は誤差となる。つまり、Δx を小さくしても誤差は $O(\Delta x)$ で小さくなる。

一方、中心差分は

$$
\begin{aligned}
\frac{y(x_{i+\frac{1}{2}})-y(x_{i-\frac{1}{2}})}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x}\left[\left\{y(x_i)+\frac{dy}{dx}(x_i)\frac{\Delta x}{2}+\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}(x_i)\frac{\Delta x^2}{2^2}+\frac{1}{3!}\frac{d^3y}{dx^3}(x_i)\frac{\Delta x^3}{2^3}+\cdots\right\}\right.\\
&\quad\left.-\left\{y(x_i)-\frac{dy}{dx}(x_i)\frac{\Delta x}{2}+\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}(x_i)\frac{\Delta x^2}{2^2}-\frac{1}{3!}\frac{d^3y}{dx^3}(x_i)\frac{\Delta x^3}{2^3}+\cdots\right\}\right]\\
&= \frac{dy}{dx}(x_i)+\frac{1}{3!}\frac{d^3y}{dx^3}(x_i)\frac{\Delta x^2}{2^2}+\cdots \qquad (4)
\end{aligned}
$$

となり、誤差は $O(\Delta x^2)$ で小さくなることが分かる。即ち、中心差分の方が精度が良い。

3 Yee アルゴリズムによる Maxwell の方程式の差分化

3.1 Yee アルゴリズム

Maxwell の方程式を中心差分を用いて差分化するが、回転の微分を平均化などを用いずに電磁界各成分をセル単位に割り当てるため、Yee アルゴリズムを採用する。

Yee アルゴリズムは以下となる。

- 電界と磁界の時刻は、時間ステップ Δ の半分、即ち $\dfrac{\Delta t}{2}$ だけずらして割り当てる。ここでは電界は $t = n\,\Delta t$ に、磁界は $t = \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t$ に割り当てる。
- 電磁界の各成分を、空間でもずらして配置する (staggered cell)。具体的には整数 i, j, k, n に対して、以下のように配置する。

$$
\begin{aligned}
E_x(x,y,z,t) &= E_x(\{i+\tfrac{1}{2}\}\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) &&\equiv E_x^n(i+\tfrac{1}{2}, j, k)\\
E_y(x,y,z,t) &= E_y(i\Delta x, \{j+\tfrac{1}{2}\}\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) &&\equiv E_y^n(i, j+\tfrac{1}{2}, k)\\
E_z(x,y,z,t) &= E_z(i\Delta x, j\Delta y, \{k+\tfrac{1}{2}\}\Delta z, n\Delta t) &&\equiv E_z^n(i, j, k+\tfrac{1}{2})\\
H_x(x,y,z,t) &= H_x(i\Delta x, \{j+\tfrac{1}{2}\}\Delta y, \{k+\tfrac{1}{2}\}\Delta z, \{n+\tfrac{1}{2}\}\Delta t) &&\equiv H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2})\\
H_y(x,y,z,t) &= H_y(\{i+\tfrac{1}{2}\}\Delta x, j\Delta y, \{k+\tfrac{1}{2}\}\Delta z, \{n+\tfrac{1}{2}\}\Delta t) &&\equiv H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2}, j, k+\tfrac{1}{2})\\
H_z(x,y,z,t) &= H_z(\{i+\tfrac{1}{2}\}\Delta x, \{j+\tfrac{1}{2}\}\Delta y, k\Delta z, \{n+\tfrac{1}{2}\}\Delta t) &&\equiv H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2}, j+\tfrac{1}{2}, k)
\end{aligned}
$$

3.2 Maxwell の方程式の差分化

電磁界各成分を Yee アルゴリズムの時空間に配置できるように Maxwell の方程式を差分化する。

$\dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \dfrac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon\dfrac{\partial E_x}{\partial t} + J_x$ を差分化:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta y}\{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2}, j+\tfrac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2}, j-\tfrac{1}{2}, k)\}\\
&-\frac{1}{\Delta z}\{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2}, j, k+\tfrac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2}, j, k-\tfrac{1}{2})\}\\
&= \frac{\varepsilon}{\Delta t}\{E_x^n(i+\tfrac{1}{2}, j, k) - E_x^{n-1}(i+\tfrac{1}{2}, j, k)\} + J_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2}, j, k) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

$\dfrac{\partial H_x}{\partial z} - \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \dfrac{\partial E_y}{\partial t} + J_y$ を差分化:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta z}\{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\tfrac{1}{2}, k-\tfrac{1}{2})\} \\
&- \frac{1}{\Delta x}\{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2}, j+\tfrac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i-\tfrac{1}{2}, j+\tfrac{1}{2}, k)\} \\
&= \frac{\varepsilon}{\Delta t}\{E_y^n(i, j+\tfrac{1}{2}, k) - E_y^{n-1}(i, j+\tfrac{1}{2}, k)\} + J_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\tfrac{1}{2}, k)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$\dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon \dfrac{\partial E_z}{\partial t} + J_z$ を差分化:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta x}\{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2}, j, k+\tfrac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i-\tfrac{1}{2}, j, k+\tfrac{1}{2})\} \\
&- \frac{1}{\Delta y}\{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j-\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2})\} \\
&= \frac{\varepsilon}{\Delta t}\{E_z^n(i, j, k+\tfrac{1}{2}) - E_z^{n-1}(i, j, k+\tfrac{1}{2})\} + J_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k+\tfrac{1}{2})
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \dfrac{\partial H_x}{\partial t}$ を差分化:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta y}\{E_z^n(i, j+1, k+\tfrac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k+\tfrac{1}{2})\} - \frac{1}{\Delta z}\{E_y^n(i, j+\tfrac{1}{2}, k+1) - E_y^n(i, j+\tfrac{1}{2}, k)\} \\
&= -\frac{\mu}{\Delta t}\{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2})\}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \dfrac{\partial H_y}{\partial t}$ を差分化:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta z}\{E_x^n(i+\tfrac{1}{2}, j, k+1) - E_z^n(i+\tfrac{1}{2}, j, k)\} - \frac{1}{\Delta x}\{E_z^n(i+1, j, k+\tfrac{1}{2}) - E_y^n(i, j, k+\tfrac{1}{2})\} \\
&= -\frac{\mu}{\Delta t}\{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2}, j, k+\tfrac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2}, j, k+\tfrac{1}{2})\}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \dfrac{\partial H_z}{\partial t}$ を差分化:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta x}\{E_y^n(i, j+\tfrac{1}{2}, k+1) - E_y^n(i, j+\tfrac{1}{2}, k)\} - \frac{1}{\Delta y}\{E_x^n(i+\tfrac{1}{2}, j+1, k) - E_x^n(i+\tfrac{1}{2}, j, k)\} \\
&= -\frac{\mu}{\Delta t}\{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2}, j+\tfrac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2}, j+\tfrac{1}{2}, k)\}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

これらを各式の最新時刻の場を求める式に書き直すことで更新式を得る。

$$\begin{aligned} E_x^n(i+\tfrac{1}{2},j,k) = E_x^{n-1}(i+\tfrac{1}{2},j,k) &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta y}\{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2},j+\tfrac{1}{2},k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2},j-\tfrac{1}{2},k)\} \\ &- \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta z}\{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2},j,k+\tfrac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2},j,k-\tfrac{1}{2})\} - \frac{\Delta t}{\varepsilon}J_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2},j,k) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} E_y^n(i,j+\tfrac{1}{2},k) = E_y^{n-1}(i,j+\tfrac{1}{2},k) &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta z}\{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i,j+\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i,j+\tfrac{1}{2},k-\tfrac{1}{2})\} \\ &- \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta x}\{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2},j+\tfrac{1}{2},k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i-\tfrac{1}{2},j+\tfrac{1}{2},k)\} - \frac{\Delta t}{\varepsilon}J_y^{n-\frac{1}{2}}(i,j+\tfrac{1}{2},k) \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} E_z^n(i,j,k+\tfrac{1}{2}) = E_z^{n-1}(i,j,k+\tfrac{1}{2}) &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta x}\{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2},j,k+\tfrac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i-\tfrac{1}{2},j,k+\tfrac{1}{2})\} \\ &- \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta y}\{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i,j+\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i,j-\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2})\} - \frac{\Delta t}{\varepsilon}J_z^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k+\tfrac{1}{2}) \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} H_x^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i,j+\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2}) &- \frac{\Delta t}{\mu\Delta y}\{E_z^n(i,j+1,k+\tfrac{1}{2}) - E_z^n(i,j,k+\tfrac{1}{2})\} \\ &+ \frac{\Delta t}{\mu\Delta z}\{E_y^n(i,j+\tfrac{1}{2},k+1) - E_y^n(i,j+\tfrac{1}{2},k)\} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2},j,k+\tfrac{1}{2}) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2},j,k+\tfrac{1}{2}) &- \frac{\Delta t}{\mu\Delta z}\{E_x^n(i+\tfrac{1}{2},j,k+1) - E_x^n(i+\tfrac{1}{2},j,k)\} \\ &+ \frac{\Delta t}{\mu\Delta x}\{E_z^n(i+1,j,k+\tfrac{1}{2}) - E_z^n(i,j,k+\tfrac{1}{2})\} \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2},j+\tfrac{1}{2},k) = H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2},j+\tfrac{1}{2},k) &- \frac{\Delta t}{\mu\Delta x}\{E_y^n(i+1,j+\tfrac{1}{2},k) - E_y^n(i,j+\tfrac{1}{2},k)\} \\ &+ \frac{\Delta t}{\mu\Delta y}\{E_x^n(i+\tfrac{1}{2},j+1,k) - E_x^n(i+\tfrac{1}{2},j,k)\} \end{aligned} \tag{16}$$

即ち、全ての i,j,k に対して $\boldsymbol{E}^0, \boldsymbol{H}^{\frac{1}{2}}$ が分かっていれば式 (11)-(13) で $\boldsymbol{E}^1$ が計算でき、$\boldsymbol{H}^{\frac{1}{2}}$ と今計算したばかりの $\boldsymbol{E}^1$ を用いて式 (14)-(16) で $\boldsymbol{H}^{1+\frac{1}{2}}$ が計算でき、$\cdots$ となって時時刻刻の電磁界を更新することができる。

このように、過去の値のみから次の時刻の値を計算できる方法 (scheme; スキーム) を**陽的なスキーム** (explicit scheme) と呼ぶ。一方で、次の時刻の計算に、その時刻の値が必要なスキームを**陰的なスキーム** (implicit scheme) と呼ぶ。

4 安定条件 (Courant(-Friedrich-Levy); CFL 条件)

陽的なスキームでは、更新時間である時間ステップ Δt に上限が存在する。これを決める条件を**安定条件** (stability condition) と呼ぶ。この安定条件は Courant-Friedrich-Levy(CFL) 条件とも呼ばれている。

単一の周波数 (角周波数 ω [rad/m]) における単一の波数ベクトル ($\tilde{\boldsymbol{k}} = \tilde{k}_x\hat{\boldsymbol{x}} + \tilde{k}_y\hat{\boldsymbol{y}} + \tilde{k}_z\hat{\boldsymbol{z}}$) を持

つ平面波:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}\exp(-j\tilde{\boldsymbol{k}}\bullet\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}\exp(-j\{\tilde{k}_x x + \tilde{k}_y y + \tilde{k}_z z\}) \tag{17}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}\exp(-j\tilde{\boldsymbol{k}}\bullet\boldsymbol{r}) \tag{18}$$

を考える。この式から、例えば $A(i+1,j,k) = A(i,j,k)e^{-j\tilde{k}_x\Delta x}$ といった関係式が得られる。

式 (11) に代入することで、$H_y^{n-\frac{1}{2}}, H_z^{n-\frac{1}{2}}$ から E_x^n を求める式が導出できる。

$$\begin{aligned} E_x^n(i+\tfrac{1}{2},j,k) &= E_x^{n-1}(i+\tfrac{1}{2},j,k) + \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta y}(1-e^{j\tilde{k}_y\Delta y})H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2},j+\tfrac{1}{2},k) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta z}(1-e^{j\tilde{k}_z\Delta z})H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2},j,k+\tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leftrightarrows E_x^n(i+\tfrac{1}{2},j,k) &= E_x^{n-1}(i+\tfrac{1}{2},j,k) - \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta y}e^{j\frac{\tilde{k}_y\Delta y}{2}}(e^{j\frac{\tilde{k}_y\Delta y}{2}} - e^{-j\frac{\tilde{k}_y\Delta y}{2}})H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2},j+\tfrac{1}{2},k) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta z}e^{j\frac{\tilde{k}_z\Delta z}{2}}(e^{j\frac{\tilde{k}_z\Delta z}{2}} - e^{-j\frac{\tilde{k}_z\Delta z}{2}})H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2},j,k+\tfrac{1}{2}) \\ \leftrightarrows E_x^n(i+\tfrac{1}{2},j,k) &= E_x^{n-1}(i+\tfrac{1}{2},j,k) - \frac{2j\Delta t}{\varepsilon\Delta y}e^{j\frac{\tilde{k}_y\Delta y}{2}}\sin\frac{\tilde{k}_y\Delta y}{2}H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2},j+\tfrac{1}{2},k) \\ &\quad + \frac{2j\Delta t}{\varepsilon\Delta z}e^{j\frac{\tilde{k}_z\Delta z}{2}}\sin\frac{\tilde{k}_z\Delta z}{2}H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2},j,k+\tfrac{1}{2}) \end{aligned} \tag{19}$$

同様に、式 (12)-(16) に代入することで以下のようにまとめることができる。

$$\boldsymbol{E}^n = \boldsymbol{E}^{n-1} + \frac{2j\Delta t}{\varepsilon}\mathbf{C}\bullet\boldsymbol{H}^{n-\frac{1}{2}} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}^{n+\frac{1}{2}} &= \boldsymbol{H}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2j\Delta t}{\mu}\mathbf{D}\bullet\boldsymbol{E}^n = \boldsymbol{H}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2j\Delta t}{\mu}\mathbf{D}\bullet\left\{\boldsymbol{E}^{n-1} + \frac{2j\Delta t}{\varepsilon}\mathbf{C}\bullet\boldsymbol{H}^{n-\frac{1}{2}}\right\} \\ &= \boldsymbol{H}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2j\Delta t}{\mu}\mathbf{D}\bullet\boldsymbol{E}^{n-1} - \frac{4\Delta t^2}{\mu\varepsilon}\mathbf{D}\bullet\mathbf{C}\bullet\boldsymbol{H}^{n-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2j\Delta t}{\mu}\mathbf{D}\bullet\boldsymbol{E}^{n-1} + \left\{\mathbf{I} - 4\Delta t^2c^2\mathbf{D}\bullet\mathbf{C}\right\}\bullet\boldsymbol{H}^{n-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{21}$$

ここで、$\mathbf{C}, \mathbf{D}$ は以下で与えられる。

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_z^+ & -\alpha_y^+ \\ -\alpha_z^+ & 0 & \alpha_x^+ \\ \alpha_y^+ & -\alpha_x^+ & 0 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_z^- & \alpha_y^- \\ \alpha_z^- & 0 & -\alpha_x^- \\ -\alpha_y^- & \alpha_x^- & 0 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$\alpha_w^\pm = \frac{1}{\Delta w}e^{\pm\frac{\tilde{k}_w\Delta w}{2}}\sin\frac{\tilde{k}_w\Delta w}{2}, \qquad (w = x,y,z) \tag{24}$$

全体をまとめると以下のように書き表せる。

$$\boldsymbol{V}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \frac{2j\Delta t}{\varepsilon}\mathbf{C} \\ \frac{2j\Delta t}{\mu}\mathbf{D} & \mathbf{I} - 4\Delta t^2c^2\mathbf{D}\bullet\mathbf{C} \end{bmatrix}\bullet\boldsymbol{V}^{n-1} = \mathbf{F}\bullet\boldsymbol{V}^{n-1} \tag{25}$$

ここで、$\boldsymbol{V}^n$ は以下で表される。

$$\boldsymbol{V}^n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}^n \\ \boldsymbol{H}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \tag{26}$$

式 (25) は電磁界を時間ステップ更新する演算が行列 $\mathbf{F}$ をかけることを表している。そこで、最初の時刻から N 時間ステップ更新するには $\mathbf{F}^N$ をかけることになるが、時間更新をして値が発散しないためにはその値が発散しないことが条件となる。これは行列 $\mathbf{F}$ の全ての固有値 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, 6)$ に対し、$|\lambda_i| \leqq 1$ となる必要がある。これを安定条件と呼ぶ。

固有値を求めるための固有方程式は

$$|\mathbf{F} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \tag{27}$$

となる。ブロック行列の行列式の公式:

$$\left| \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \right| = |\mathbf{A}_{11}| \cdot |\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \bullet \mathbf{A}_{11}^{-1} \bullet \mathbf{A}_{12}| \qquad (\mathbf{A}_{11} \text{ が正則のとき}) \tag{28}$$

を用いれば、固有方程式は

$$\begin{aligned} &|(1-\lambda)\mathbf{I}| \cdot \left| (1-\lambda)\mathbf{I} - 4c^2 \Delta t^2 \mathbf{D} \bullet \mathbf{C} - \frac{2j\Delta t}{\mu} \mathbf{D} \bullet \frac{1}{1-\lambda} \mathbf{I} \bullet \frac{2j\Delta t}{\varepsilon} \mathbf{C} \right| \\ &= (1-\lambda)^3 \left| (1-\lambda)\mathbf{I} + \frac{\lambda}{1-\lambda} 4c^2 \Delta t^2 \mathbf{D} \bullet \mathbf{C} \right| = 0 \end{aligned} \tag{29}$$

となる。定式の第一因子は $\lambda = 1$ であることから、第二因子で決定される固有値を調べる必要がある。

第二因子を変形すると以下の式となる。

$$|\beta \mathbf{I} + \mathbf{D} \bullet \mathbf{C}| = 0 \tag{30}$$

$$\beta = \frac{(1-\lambda)^2}{4\lambda c^2 \Delta t^2} \tag{31}$$

これを明示的に書けば次のように書ける。

$$\left| \begin{bmatrix} \beta + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 & -\alpha_y^+ \alpha_x^- & -\alpha_z^+ \alpha_x^- \\ -\alpha_x^+ \alpha_y^- & \beta + \alpha_z^2 + \alpha_x^2 & -\alpha_z^+ \alpha_y^- \\ -\alpha_x^+ \alpha_z^- & -\alpha_y^+ \alpha_z^- & \beta + \alpha_x^2 + \alpha_y^2 \end{bmatrix} \right| = 0 \tag{32}$$

$$\alpha_w^2 = \alpha_w^+ \alpha_w^- = \frac{1}{\Delta w^2} \sin^2 \frac{\tilde{k}_w \Delta w}{2} \tag{33}$$

これを展開すると次式となる。

$$\beta(\beta + \alpha^2)^2 = 0 \tag{34}$$

$$\alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 \tag{35}$$

従って、$\beta = 0, -\alpha^2$ である。$\beta = 0$ から $\lambda = 1$ であることが分かる。$\beta = -\alpha^2$ からは次のようになる。

$$\frac{(1-\lambda)^2}{4\lambda c^2 \Delta t^2} = -\alpha^2 \tag{36}$$

$$\leftrightarrows \lambda^2 + 2(2\alpha^2 c^2 \Delta t^2 - 1)\lambda + 1 = 0 \tag{37}$$

これを解くと次のようになる。

$$\lambda = 1 - \gamma \pm \sqrt{(1-\gamma)^2 - 1} \tag{38}$$

$$\gamma = 2\alpha^2 c^2 \Delta t^2 \tag{39}$$

この解について、混合の中の符号に分けて考える。

1) $(1-\gamma)^2 - 1 > 0$ のとき、$1-\gamma > 1$ または $1-\gamma < -1$ となるが、それぞれ $1-\gamma + \sqrt{(1-\gamma^2)^2 - 1}$ $1-\gamma-\sqrt{(1-\gamma^2)^2-1}$ に対応する固有値が $|\lambda| > 1$ となってしまい、安定条件を満たさない。

2) $(1-\gamma)^2 - 1 = 0$ のとき、$1-\gamma = 1$ または $1-\gamma = -1$ となり、対応する固有値は $|\lambda| = 1$ となり、安定条件を満たす。

3) $(1-\gamma)^2 - 1 < 0$ のとき、$\lambda = 1-\gamma \pm j\sqrt{1-(1-\gamma)^2}$ となるが、$|\lambda| = (1-\gamma)^2 + \{1-(1-\gamma)^2\} = 1$ となり、安定条件を満たす。

結局、安定条件は $(1-\gamma)^2 \leqq 1$ となるが、これを満たす γ は $0 \leqq \gamma \leqq 2$ にある。$\beta \geqq 0$ は自明なので $\beta \leqq 2$ が安定条件となる。従って、次式が言える。

$$c\Delta t \leqq \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2}\sin^2\frac{\tilde{k}_x \Delta x}{2} + \frac{1}{\Delta y^2}\sin^2\frac{\tilde{k}_y \Delta y}{2} + \frac{1}{\Delta z^2}\sin^2\frac{\tilde{k}_z \Delta z}{2}}} \tag{40}$$

伝搬する電磁波にには $\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z$ について様々な値を持つものが含まれるため、いずれの値でも定式の安定条件を満たすためには、その最低値: $\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}$ より小さい必要がある。結局、最終的な安定条件は以下となる。

$$c\Delta t \leqq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}} \tag{41}$$

これを Courant(-Friedrich-Levy; CFL) 条件と呼ぶ。

5　数値分散

媒質定数 ε [F/m]、μ [H/m] の媒質であれば電磁波は $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ [m/s] で伝搬するが、FDTD 法で計算した電磁波は、有限差分による誤差があり、その速度では伝搬せず、それとわずかに異なる数値上の速度で伝搬する。また、この数値上の速度は周波数によって変わることから (分散性)、これを数値分散、またはグリッド分散と呼ぶ。

分散関係式を導出する。式 (25) において、$\boldsymbol{V}^n = \boldsymbol{V}_0 e^{j\omega n\Delta t}$ とおくと、

$$(e^{j\omega\Delta t}\mathbf{I} - \mathbf{F}) \bullet \boldsymbol{V}_0 = \mathbf{0} \tag{42}$$

となる。これを満たすためには係数行列の行列式が 0 となる必要がある。即ち、

$$|e^{j\omega\Delta t}\mathbf{I} - \mathbf{F}| = 0 \tag{43}$$

ここから、次の関係式 (分散関係式) を得る。

$$\frac{1}{c^2\Delta t^2}\sin^2\frac{\omega\Delta t}{2}=\frac{1}{\Delta x^2}\sin^2\frac{\tilde{k}_x\Delta x}{2}+\frac{1}{\Delta y^2}\sin^2\frac{\tilde{k}_y\Delta y}{2}+\frac{1}{\Delta z^2}\sin^2\frac{\tilde{k}_z\Delta z}{2} \tag{44}$$

即ち、FDTD 法の数値グリッド上では、角周波数 ω の電磁波は上式を満たす数値波数:

$$\tilde{\boldsymbol{k}}=\tilde{k}_x\hat{\boldsymbol{x}}+\tilde{k}_y\hat{\boldsymbol{y}}+\tilde{k}_z\hat{\boldsymbol{z}} \tag{45}$$

$$=\tilde{k}(\sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}+\sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}+\cos\theta\hat{\boldsymbol{z}}) \tag{46}$$

で伝搬する。

また、グリッド上の数値速度 $\tilde{c}$ は

$$\tilde{c}=\frac{\omega}{\tilde{k}} \tag{47}$$

によって得られる。

上の式から、角度 (θ,ϕ) によっても数値速度 $\tilde{c}$ が異なることが分かる (数値異方性)。これは、FDTD 法のセルが直方体であることから、グリッドに沿う方向とセルの対角線方向とで誤差が異なることからも予想ができる。

式 (44) において、$\Delta t,\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0$ の極限をとると

$$\frac{\omega^2}{c^2}=k^2=\tilde{k}_x^2+\tilde{k}_y^2+\tilde{k}_z^2 \tag{48}$$

となり、実際の物理上での関係式と同一となる。つまり、セルサイズを十分に小さくとれば誤差が小さくなると言える。実際にはセルサイズは $\dfrac{\lambda}{10}$ 以下、ある程度の精度を求めるのであれば $\dfrac{\lambda}{20}$ 以下にするべきである。

6 吸収境界条件

6.1 Mur の吸収境界条件

6.2 Berenger の PML

計算領域の自由空間と、その周囲に波動インピーダンスが整合した導伝率・導磁率を持つ仮想的な層を考え、無反射で電磁波を減衰させることを目的とする。

垂直入射の場合、

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\sqrt{\frac{\mu-j\frac{\sigma}{\omega}}{\varepsilon-j\frac{\sigma^*}{\omega}}} \tag{49}$$

が成立すればインピーダンスが整合していることから、整合条件は以下となる。

$$\frac{\sigma}{\varepsilon}=\frac{\sigma^*}{\mu} \tag{50}$$

ただし、垂直でない角度での入射ではインピーダンスが整合しない。全ての角度でインピーダンスが整合する条件はないので、電磁場と各方向に伝搬する成分に分け、垂直に入射成分のみについてインピーダンス整合した導電率、導磁率を設けて減衰させるものとする。

2 次元 TM_z 波 (E_z, H_x, H_y) で考える。導電率、導磁率を加えた Maxwell の方程式は以下で与えられる。

$$\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{51}$$

$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} + \sigma^* H_x = -\frac{\partial E_z}{\partial y} \tag{52}$$

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} + \sigma^* H_y = \frac{\partial E_z}{\partial x} \tag{53}$$

ここで、H_x は y 方向に伝搬、H_y は x 方向に伝搬する成分であり、E_z は x 方向と y 方向の両方に伝搬する成分を持つ。式 (51) の右辺第一項が x 方向に伝搬する成分であり、同第二項が y 方向に伝搬する成分である。

そこで、E_z を x, y 方向に伝搬する成分 (E_{zx}, E_{zy}) に分け、導電率、導磁率についても x, y 方向に対するものをそれぞれ $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_x^*, \sigma_y^*$ とする。

$$\varepsilon \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} + \sigma_x E_{zx} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \tag{54}$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \sigma_y E_{zy} = -\frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{55}$$

$$E_z = E_{zx} + E_{zy} \tag{56}$$

$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} + \sigma_y^* H_x = -\frac{\partial E_z}{\partial y} \tag{57}$$

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} + \sigma_x^* H_y = \frac{\partial E_z}{\partial x} \tag{58}$$

これを差分化した更新式は次式で与えられる。

$$E_{zx}^n(i,j) = \frac{\frac{\varepsilon}{\Delta t} - \frac{\sigma_x}{2}}{\frac{\varepsilon}{\Delta t} + \frac{\sigma_x}{2}} E_{zx}^{n-1}(i,j) + \frac{1}{\frac{\varepsilon}{\Delta t} + \frac{\sigma_x}{2}} \frac{1}{\Delta x} \{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2}, j) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i-\tfrac{1}{2}, j)\} \tag{59}$$

$$E_{zy}^n(i,j) = \frac{\frac{\varepsilon}{\Delta t} - \frac{\sigma_y}{2}}{\frac{\varepsilon}{\Delta t} + \frac{\sigma_y}{2}} E_{zy}^{n-1}(i,j) - \frac{1}{\frac{\varepsilon}{\Delta t} + \frac{\sigma_x}{2}} \frac{1}{\Delta y} \{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\tfrac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j-\tfrac{1}{2})\} \tag{60}$$

$$E_z^n(i,j) = E_{zx}^n(i,j) + E_{zy}^n(i,j) \tag{61}$$

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\tfrac{1}{2}) = \frac{\frac{\mu}{\Delta t} - \frac{\sigma_y^*}{2}}{\frac{\mu}{\Delta t} + \frac{\sigma_y^*}{2}} H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\tfrac{1}{2}) - \frac{1}{\frac{\mu}{\Delta t} + \frac{\sigma_y^*}{2}} \frac{1}{\Delta y} \{E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i,j)\} \tag{62}$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2}, j) = \frac{\frac{\mu}{\Delta t} - \frac{\sigma_x^*}{2}}{\frac{\mu}{\Delta t} + \frac{\sigma_x^*}{2}} H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\tfrac{1}{2}, j) + \frac{1}{\frac{\mu}{\Delta t} + \frac{\sigma_x^*}{2}} \frac{1}{\Delta x} \{E_z^n(i+1, j) - E_z^n(i,j)\} \tag{63}$$

更新式における導電率、導磁率は、更新する場の位置におけるものである。

差分化による影響のため、インピーダンス整合がとれていても反射は生じる。そのため PML については数セルの深さを持たせ、導電率を深さ方向に徐々に大きくしていく分布をさせる。一例として、垂直入射の場合の反射係数 R を設定した、以下の分布が用いられる。

$$\sigma_x(x') = \sigma_{\max}\left(\frac{x'}{L\Delta x}\right)^M \tag{64}$$

$$\sigma_{\max} = -\frac{(M+1)Y}{2L\Delta x}\ln R \tag{65}$$

ここで、x' は PML 表面からの深さ、L は PML の層数、M は分布を決める次数である。また、Y は波動アドミタンスである。この分布では PML の表面で $\sigma = 0$、PML の最深部で $\sigma_{\max}$ となる。$L = 12, M = 4, R = 10^{-6}$ 程度に選ばれる。

7 励振

7.1 電流源

更新式 (11)-(13) にある電流密度を与えることで電流源が実現できる。

例えば、位置 $(i_s\Delta x, j_s\Delta y, (k_s+\frac{1}{2})\Delta z)$ において電流密度 $J_z^n(i_s, j_s, k_s+\frac{1}{2}) = \dfrac{I(n\Delta t)}{\Delta x\Delta y}$ [A/m^2] を与えた場合、$I(t)$ [A] が時刻 t [s] において $(i_s-\frac{1}{2})\Delta x \leqq x \leqq (i_s+\frac{1}{2})\Delta x$、$(j_s-\frac{1}{2})\Delta y \leqq y \leqq (j_s+\frac{1}{2})\Delta y$ の範囲に流れる電流を表し、$k_s\Delta z \leqq z \leqq (k_s+1)\Delta z$ の長さを流れることになる。

7.2 平面波入射 — TF/SF 境界

散乱問題やレーダなどのシミューレションにおいては、遠方から電磁波が放射され、その電磁波によって散乱体に散乱される様子を計算する必要が生じる。しかし、遠方の放射源と散乱体を含む計算領域を確保するのは計算効率が悪い。そこで、放射源から放射された電磁波の解析的な式を与え（ $\boldsymbol{E}^{\text{inc}}(\boldsymbol{r},t), \boldsymbol{H}^{\text{inc}}(\boldsymbol{r},t)$ とする)、この電磁波が散乱体に入射する部分のみを計算する。

入射波は計算領域外にも存在するため計算領域内の入射波の更新にはその情報が必要なこと、および計算領域境界付近は吸収境界条件を設ける必要があることから、計算領域境界まで入射波の FDTD の更新式に組み入れることはできない。そこで、計算領域境界は散乱体の存在によって生じた散乱界のみを計算するものとする。

計算領域を二つの領域に分け、中央部分を含む領域 (全電磁界領域; Total Field (TF) region) では全電磁界 (TF) を計算し、その周囲の領域 (散乱界領域 (Scattered field (SF) region) では散乱界のみを計算するものとする。

全電磁場は、入射波 (Incident field; IF) と、その入射波が散乱体に入射して誘導された散乱界 (SF) の和で表される。

$$\boldsymbol{E}^t = \boldsymbol{E}^{\text{inc}} + \boldsymbol{E}^s, \qquad \boldsymbol{H}^t = \boldsymbol{H}^{\text{inc}} + \boldsymbol{H}^s \tag{66}$$

Maxwell の方程式の線形性から、散乱界、入射波それぞれに対しても Maxwell の方程式が成立する。

従って、TF 領域で TF を計算する更新式だけでなく、SF 領域においては SF を計算する更新式も通常の FDTD 法の更新式が適用できる。

実際の計算では電磁界を記憶するメモリには SF 領域には SF のみ、TF 領域には TF のみを記憶し、同じ更新式を割り当てて計算する。

しかしながら、TF 領域と SF 領域の境界 (TF/SF 境界) では、更新する場と隣接するセルの場が TF または SF 同士とはならない箇所が生じるため、ここでは修正が必要である。修正は、解析的に計算できる入射波を用いて「 TF の更新式」または「 SF の更新式」をつくるように行われる。

■例: 2 次元 TM$_z$ 波　$(i_1, j_1) - (i_2, j_2)$ で決まる矩形領域を TF 領域、その外側を SF 領域とし、境界上では TF を計算するものとする。

図**??**に示した、$(i, j) = (i_1, j)$ における E_z を更新する場合、記憶している場をそのまま用いた更新式を明示的に書くと以下となる。

$$E_z^{n,t}(i_1, j) = E_z^{n-1,t}(i_1, j) + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x}\{H_y^{n-\frac{1}{2},t}(i_1 + \tfrac{1}{2}, j) - H_y^{n-\frac{1}{2},s}(i_1 - \tfrac{1}{2}, j)\}$$
$$- \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y}\{H_x^{n-\frac{1}{2},t}(i_1, j + \tfrac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2},t}(i_1, j - \tfrac{1}{2})\} \tag{67}$$

上式は TF と SF が混在した誤った式である。これを修正するためには入射波を加減することで TF または SF どちらかのみの更新式とする必要がある。従って、以下のように修正する必要がある。

$$E_z^{n,t}(i_1, j) = E_z^{n-1,t}(i_1, j) + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x}\{H_y^{n-\frac{1}{2},t}(i_1 + \tfrac{1}{2}, j) - [H_y^{n-\frac{1}{2},s}(i_1 - \tfrac{1}{2}, j) + H_y^{n-\frac{1}{2},\mathrm{inc}}(i_1 - \tfrac{1}{2}, j)]\}$$
$$- \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y}\{H_x^{n-\frac{1}{2},t}(i_1, j + \tfrac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2},t}(i_1, j - \tfrac{1}{2})\} \tag{68}$$

8　物体のモデル化

アンテナや散乱体など、物質定数を持つものをシミュレーションに組み入れるためには、物体の物質定数をモデル化して更新式に入れる必要がある。

8.1　体積状、面状の導体

体積状、面状の導体については、導体表面の電界の接線成分を 0 とすることでモデル化が可能である。

例えば、$(i_0 + \frac{1}{2}, j_0 + \frac{1}{2}, k_0 + \frac{1}{2})$ の点を中心とするセルが金属の場合、その表面に接する以下の

電界の各成分を 0 とすればよい。

$$\begin{aligned} E_x(i_0+\tfrac{1}{2}, j_0, k_0) = 0, &\quad E_x(i_0+\tfrac{1}{2}, j_0+1, k_0) = 0, \\ E_x(i_0+\tfrac{1}{2}, j_0, k_0+1) = 0, &\quad E_x(i_0+\tfrac{1}{2}, j_0+1, k_0+1) = 0 \\ E_y(i_0, j_0+\tfrac{1}{2}, k_0) = 0, &\quad E_y(i_0+1, j_0+\tfrac{1}{2}, k_0) = 0, \\ E_y(i_0, j_0+\tfrac{1}{2}, k_0+1) = 0, &\quad E_y(i_0+1, j_0+\tfrac{1}{2}, k_0+1) = 0 \\ E_z(i_0, j_0, k_0+\tfrac{1}{2}) = 0, &\quad E_z(i_0+1, j_0, k_0+\tfrac{1}{2}) = 0, \\ E_z(i_0, j_0+1, k_0+\tfrac{1}{2}) = 0, &\quad E_z(i_0+1, j_0+1, k_0+\tfrac{1}{2}) = 0 \end{aligned}$$

8.2 線状の導体

線状導体の場合は、体積状、面状と同様に導体に対して電界の接線成分を 0 とすることでモデル化はでき、それが散乱体として存在する場合には十分である。しかし、線状アンテナのように線状導体そのもので励振するなど、重要な (シミュレーション結果で得たいパラメタと直接関わるなど) 役割を果たす場合は、より詳細なモデル化が必要となる。そこで、本節では「グリッドに沿った線状導体」のモデル化について述べる。

図**??**に示すように、$(i_w, j_w, k_w+\frac{1}{2})$ を中心に z 方向に半径 a [m] の線状導体があるものとする (更に $\pm z$ 方向に線状導体が続いているものとする)。このとき、$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_w+\frac{1}{2}, j_w, k_w+\frac{1}{2})$ の更新を考える。

導体近傍の場は (セルが波長に対して小さいことから)z 方向の場を一定と近似すればほぼ静電磁場の振る舞いで近似できるので、線状導体の中心からの距離を ρ に対して $H_y \propto \dfrac{1}{\rho}, E_x \propto \dfrac{1}{\rho}$ という変化をしていると仮定できる。即ち、以下のようにおける。

$$H_y(x, j_w\Delta y, \{k_w+\tfrac{1}{2}\}\Delta z, \{n+\tfrac{1}{2}\}\Delta t) = \frac{\frac{\Delta x}{2}}{\rho} H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_w+\tfrac{1}{2}, j_w, k_w+\tfrac{1}{2}) \tag{69}$$

$$E_x(x, j_w\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \frac{\frac{\Delta x}{2}}{\rho} E_x^n(i_w+\tfrac{1}{2}, j_w, k) \tag{70}$$

上式を用いて、図**??**の周回路に関する Maxwell の方程式: $-\mu\frac{d}{dt}\iint_{\Delta S} H_y dS = \oint_{\Delta C} \boldsymbol{E} \bullet d\boldsymbol{r}$ は

以下のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
-\mu\frac{d}{dt}\iint_{\Delta S} H_y dS &= -\mu\left(\frac{dH_y}{dt}\right)^n (i_w+\tfrac{1}{2}, j_w, k_w+\tfrac{1}{2})\frac{\Delta x}{2}\Delta z\int_a^{\Delta x}\frac{d\rho}{\rho} \\
&= -\frac{\mu}{\Delta t}\{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_w+\tfrac{1}{2}, j_w, k_w+\tfrac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_w+\tfrac{1}{2}, j_w, k_w+\tfrac{1}{2})\}\frac{\Delta x}{2}\Delta z\log\frac{\Delta x}{a} \\
&= \oint_{\Delta C}\boldsymbol{E}\bullet d\boldsymbol{r} \\
&= \int_a^{\Delta x}\{E_x(\rho, j_w, k_w+1) - E_x(\rho, j_w, k_w)\}d\rho - E_z(i_w+1, j_w, k_w+\tfrac{1}{2})\Delta z \\
&= \{E_x(i_w+\tfrac{1}{2}, j_w, k_w+1) - E_x(i_w+\tfrac{1}{2}, j_w, k_w)\}\frac{\Delta x}{2}\log\frac{\Delta x}{a} \\
&\quad - E_z(i_w+1, j_w, k_w+\tfrac{1}{2})\Delta z
\end{aligned} \tag{71}
$$

ここから更新式が以下のように導出できる。

$$
\begin{aligned}
H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_w+\tfrac{1}{2}, j_w, k_w+\tfrac{1}{2}) &= H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_w+\tfrac{1}{2}, j_w, k_w+\tfrac{1}{2}) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{\mu\Delta z}\{E_x(i_w+\tfrac{1}{2}, j_w, k_w+1) - E_x(i_w+\tfrac{1}{2}, j_w, k_w)\} \\
&\quad + \frac{\Delta t}{\mu\Delta x}\frac{2}{\log\frac{\Delta x}{a}}E_z(i_w+1, j_w, k_w+\tfrac{1}{2})
\end{aligned} \tag{72}
$$

同様の処理を線状導体を囲む四つのセルに対して適用することで線状導体をモデル化できる。