Fourier 変換

2023 年 6 月 9 日

1　フーリエ変換対

ここでは、以下のフーリエ変換対について述べる。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \tag{1}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} dt \tag{2}$$

フーリエ変換を以下のように書く。左右逆に書く場合もある。

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega) \tag{3}$$

2　フーリエ変換の公式

2.1　シフト

$$f(t - t_0) \Leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0} \tag{4}$$

$$F(\omega - \omega_0) \Leftrightarrow e^{j\omega_0 t} f(t) \tag{5}$$

フーリエ変換 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$ において、$t - t_0 = t'$ と積分変数を変換すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-j\omega t'} dt' = e^{-j\omega t_0} F(\omega) \tag{6}$$

また、逆の場合は $\omega - \omega_0 = \omega'$ とおけばよい。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') e^{j\omega' t} d\omega' = e^{j\omega_0 t} f(t) \tag{7}$$

2.2　微分

$$\frac{df}{dt}(t) \Leftrightarrow j\omega F(\omega) \tag{8}$$

$$\frac{dF}{d\omega}(\omega) \Leftrightarrow -jtf(t) \tag{9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-j\omega t} dt = \left[f(t) e^{-j\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega F(\omega) \tag{10}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF}{d\omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[F(\omega) e^{j\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty} - jt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = -jt f(t) \tag{11}$$

2.3　伸縮

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} F(\tfrac{\omega}{a}) \tag{12}$$

$$F(a\omega) \Leftrightarrow \frac{1}{a} f(\tfrac{t}{a}) \tag{13}$$

$a > 0$とする。$at = s$となる積分変数を変換する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-j\frac{\omega}{a}s} ds = \frac{1}{a} F(\tfrac{\omega}{a}) \tag{14}$$

$a\omega = \omega'$となる積分変数を変換する。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(a\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{a} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') e^{j\omega' \frac{t}{a}} d\omega' = \frac{1}{a} f(\tfrac{t}{a}) \tag{15}$$

3　各種フーリエ変換の例

3.1　矩形パルス

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_0}, & -\frac{t_0}{2} \leqq t \leqq \frac{t_0}{2} \\ 0, & |t| > \frac{t_0}{2} \end{cases} \tag{16}$$

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega t_0} \sin \frac{\omega t_0}{2} \tag{17}$$

3.2 $\sin^3 \omega_0 t$

$$f(t) = \begin{cases} \sin^3 \omega_0 (t - t_0), & t_0 \leqq t \leqq \frac{2\pi}{\omega_0} + t_0 \\ 0, & \text{上以外} \end{cases} \tag{18}$$

$$F(\omega) = j\frac{12}{\omega_0}\,\sin\left(\frac{\omega}{\omega_0}\pi\right)\,e^{-j\frac{\omega}{\omega_0}\pi}\,e^{-j\omega t_0}\,\frac{1}{\{(\frac{\omega}{\omega_0})^2 - 9\}\{(\frac{\omega}{\omega_0})^2 - 1\}} \tag{19}$$

次式のフーリエ変換を考える。

$$f(t) = \begin{cases} \sin^3 \omega_0 (t - t_0), & t_0 \leqq t \leqq \frac{2\pi}{\omega_0} + t_0 \\ 0, & \text{上以外} \end{cases} \tag{20}$$

次の式を計算すればよい。

$$F(\omega) = \int_{t_0}^{\frac{2\pi}{\omega_0} + t_0} \sin^3 \omega_0 (t - t_0) e^{-j\omega t} dt \tag{21}$$

$\omega_0(t - t_0) - \pi = \tau$ の変数変換をすると、

$$F(\omega) = -\frac{1}{\omega_0} e^{-j\omega t_0} e^{-j\frac{\omega}{\omega_0}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 \tau\, e^{-j\frac{\omega}{\omega_0}\tau} d\tau \tag{22}$$

ここで次の積分:

$$I = I_r - jI_i = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 \tau\, e^{-j\frac{\omega}{\omega_0}\tau} d\tau \tag{23}$$

の実部 I_r は被積分関数が奇関数のため 0 となる。虚部 I_i は以下となる。

$$I_i = 2\int_0^{\pi} \sin^3 \tau\, \sin\frac{\omega}{\omega_0}\tau\, d\tau \tag{24}$$

$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$ より、

$$\begin{aligned} I_i &= \frac{3}{2}\int_0^{\pi} \sin\tau\,\sin\frac{\omega}{\omega_0}\tau\, d\tau - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin 3\tau\,\sin\frac{\omega}{\omega_0}\tau\, d\tau \\ &= \frac{3}{4}\int_0^{\pi} \{\cos(1 - \tfrac{\omega}{\omega_0})\tau - \cos(1 + \tfrac{\omega}{\omega_0})\tau\} d\tau - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \{\cos(3 - \tfrac{\omega}{\omega_0})\tau - \cos(3 + \tfrac{\omega}{\omega_0})\tau\} d\tau \\ &= \frac{\sin\frac{\omega}{\omega_0}\pi}{4}\left(\frac{3}{1 - \frac{\omega}{\omega_0}} + \frac{3}{1 + \frac{\omega}{\omega_0}} - \frac{1}{3 - \frac{\omega}{\omega_0}} - \frac{1}{3 + \frac{\omega}{\omega_0}}\right) \\ &= \frac{12\sin\frac{\omega}{\omega_0}\pi}{\{(\frac{\omega}{\omega_0})^2 - 9\}\{(\frac{\omega}{\omega_0})^2 - 1\}} \end{aligned}$$

3.3 $\sqrt{\dfrac{\mu}{j\omega\sigma}}$

[1] の式 (10.20)

$$f(t) = \sqrt{\frac{\mu}{\pi\sigma t}} \tag{25}$$

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{\mu}{j\omega\sigma}} \tag{26}$$

$\dfrac{1}{\sqrt{w}}$ を逆フーリエ変換

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega t}}{\sqrt{\omega}}d\omega \tag{27}$$

$\sqrt{\omega} = x$ とおくと $\dfrac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = 2dx$ より

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega t}}{\sqrt{\omega}}d\omega = \frac{1}{\pi}\int e^{jx^2 t}dx = \frac{1}{\pi\sqrt{-jt}}\sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{-j\pi t}} \tag{28}$$

従って、$\sqrt{\dfrac{\mu}{j\omega\sigma}}$ の逆フーリエ変換は $\sqrt{\dfrac{\mu}{\pi\sigma t}}$ となる。

3.4 正規分布 $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\dfrac{t^2}{2\sigma^2}\right)$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \tag{29}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \exp\left(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right) \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2 + j2\sigma^2\omega t}{2\sigma^2}\right)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\{t + j\sigma^2\omega\}^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\{t + j\sigma^2\omega\}^2}{2\sigma^2}\right)dt
\end{aligned} \tag{31}$$

$s = \dfrac{t + j\sigma^2\omega}{\sqrt{2}\sigma}$ とおくと $\sqrt{2}\sigma\, ds = dt$ より

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-s^2) ds = \exp\left(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right) \tag{32}$$

参考文献

[1] 宇野, FDTD 法による電磁界およびアンテナ解析, コロナ社, 1998.