

ラグランジュ補間 [1]

2016 年 12 月 15 日

$(n + 1)$ 個の関数データ $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$ があつたときの補間多項式 $g(x)$ は以下となる。

$$g(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \varphi_i(x), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \prod_{j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \\ &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \end{aligned} \quad (2)$$

$\varphi_i(x)$ は $x = x_i$ において

$$\varphi_i(x_i) = \prod_{j \neq i}^n \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = 1 \quad (3)$$

となる。また、 $i \neq k$ となる $x = x_k$ において、必ず分子に $(x_k - x_k)$ が現れるので

$$\varphi_i(x_k) = \prod_{j \neq i}^n \frac{x_k - x_j}{x_i - x_j} = 0 \quad (4)$$

となる。結局、 $\varphi_i(x_k) = \delta_{ik}$ である (クロネッカーのデルタ)。

従つて、 $x = x_m$ において補間多項式 $g(x)$ は

$$g(x_m) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \varphi_i(x_m) = f(x_m) \quad (5)$$

となり、与えられた補間データの各点を通る多項式となる。

参考文献

[1] 戸田, 小野, 入門 数値計算 —チャートによる解説とプログラム—, オーム社, 1983.