微小ダイポール電流からの放射

2023 年 7 月 13 日

安藤芳晃

1 問題設定

位置 $\boldsymbol{r}_0$ における電流素片 (ヘルツ・ダイポール) を $\boldsymbol{J} = I\,\Delta l\,\hat{\boldsymbol{d}}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ [A/m^2] とする。$\hat{\boldsymbol{d}}$ は電流素片の向きを表す単位ベクトルであり、$\hat{\boldsymbol{d}} = d_x\hat{\boldsymbol{x}} + d_y\hat{\boldsymbol{y}} + d_z\hat{\boldsymbol{z}}$、または $\hat{\boldsymbol{d}} = d_R\hat{\boldsymbol{R}} + d_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 + d_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}_0$ と表せるものとする。

ローレンツ・ゲージにおけるベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を用いて電磁界は以下で与えられる。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}}{j\omega\varepsilon\mu} = -j\omega\boldsymbol{A} + \frac{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\bullet\boldsymbol{A}}{j\omega\varepsilon\mu} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} \tag{2}$$

ベクトル・ポテンシャルは以下のベクトル・ヘルムホルツ方程式を解くことで得られる。

$$\nabla^2\boldsymbol{A} + k^2\boldsymbol{A} = -\mu\boldsymbol{J} = -\mu I\,\Delta l\,\hat{\boldsymbol{d}}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) \tag{3}$$

2 ベクトル・ポテンシャルの導出

ベクトル・ポテンシャルは、デカルト座標系で考えれば以下の式を解けばよい。

$$\begin{aligned}
\nabla^2 A_x + k^2 A_x &= -\mu I\,\Delta l\,d_x\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\\
\nabla^2 A_y + k^2 A_y &= -\mu I\,\Delta l\,d_y\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\\
\nabla^2 A_z + k^2 A_z &= -\mu I\,\Delta l\,d_z\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)
\end{aligned}$$

この解は付録 B 節の結果より以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
A_x(\boldsymbol{r}) &= \mu I\,\Delta l\,d_x\frac{e^{-jkR}}{4\pi R}\\
A_y(\boldsymbol{r}) &= \mu I\,\Delta l\,d_y\frac{e^{-jkR}}{4\pi R}\\
A_z(\boldsymbol{r}) &= \mu I\,\Delta l\,d_z\frac{e^{-jkR}}{4\pi R}
\end{aligned}$$

結局、ベクトル・ポテンシャルは以下のように書ける。

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mu I\,\Delta l\,\hat{\boldsymbol{d}}\frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \tag{4}$$

3　電磁界の導出

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = A(R)\hat{\boldsymbol{d}}$ とおく。ここで、$A(R)$ は以下である。

$$A(R) = \frac{\mu I\,\Delta l}{4\pi R}e^{-jkR} = C_0\frac{e^{-jkR}}{R} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\times\{A(R)\hat{\boldsymbol{d}}\} = \boldsymbol{\nabla}A(R)\times\hat{\boldsymbol{d}} = \frac{dA}{dR}\frac{\boldsymbol{R}\times\hat{\boldsymbol{d}}}{R} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{\nabla}\times\left\{\frac{1}{R}\frac{dA}{dR}(\boldsymbol{R}\times\hat{\boldsymbol{d}})\right\} = \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{R}\frac{dA}{dR}\right)\times(\boldsymbol{R}\times\hat{\boldsymbol{d}}) + \frac{1}{R}\frac{dA}{dR}\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{R}\times\hat{\boldsymbol{d}})\\
&= \frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{R}\frac{dA}{dR}\right)\boldsymbol{R}\times(\boldsymbol{R}\times\hat{\boldsymbol{d}}) + \frac{1}{R}\frac{dA}{dR}\{(\hat{\boldsymbol{d}}\bullet\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{R} - \hat{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{\nabla}\bullet\boldsymbol{R}\}\\
&= \frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{R}\frac{dA}{dR}\right)\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{R}\bullet\hat{\boldsymbol{d}}) - \hat{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{R}\bullet\boldsymbol{R})\} + \frac{1}{R}\frac{dA}{dR}(\hat{\boldsymbol{d}} - 3\hat{\boldsymbol{d}})\\
&= \frac{1}{R^2}\left(-\frac{1}{R}\frac{dA}{dR} + \frac{d^2A}{dR^2}\right)\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{R}\bullet\hat{\boldsymbol{d}}) - R^2\hat{\boldsymbol{d}}\} - 2\frac{1}{R}\frac{dA}{dR}\hat{\boldsymbol{d}}
\end{aligned} \tag{7}$$

ここで、

$$\frac{dA}{dR} = \left(-jk - \frac{1}{R}\right)A \tag{8}$$

$$\frac{d^2A}{dR^2} = \left\{\frac{1}{R^2} + \left(jk + \frac{1}{R}\right)^2\right\}A = \left\{\frac{2}{R^2} + 2j\frac{k}{R} - k^2\right\}A \tag{9}$$

$$-\frac{1}{R}\frac{dA}{dR} + \frac{d^2A}{dR^2} = \left\{j\frac{k}{R} + \frac{1}{R^2} + \frac{2}{R^2} + 2j\frac{k}{R} - k^2\right\}A = \left\{\frac{3}{R^2} + 3j\frac{k}{R} - k^2\right\}A \tag{10}$$

を代入すると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} &= \frac{1}{R^2}\left(\frac{3}{R^2} + 3j\frac{k}{R} - k^2\right)A\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{R}\bullet\hat{\boldsymbol{d}}) - R^2\hat{\boldsymbol{d}}\} + 2\left(j\frac{k}{R} + \frac{1}{R^2}\right)A\hat{\boldsymbol{d}}\\
&= \left(\frac{3}{R^2} + 3j\frac{k}{R} - k^2\right)A\{\hat{\boldsymbol{R}}(\hat{\boldsymbol{R}}\bullet\hat{\boldsymbol{d}}) - \hat{\boldsymbol{d}}\} + 2\left(j\frac{k}{R} + \frac{1}{R^2}\right)A\hat{\boldsymbol{d}}\\
&= \left(\frac{3}{R^2} + 3j\frac{k}{R} - k^2\right)A\hat{\boldsymbol{R}}(\hat{\boldsymbol{R}}\bullet\hat{\boldsymbol{d}}) - \left(\frac{1}{R^2} + j\frac{k}{R} - k^2\right)A\hat{\boldsymbol{d}}
\end{aligned} \tag{11}$$

$\hat{\boldsymbol{d}} = d_R\hat{\boldsymbol{R}} + d_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 + d_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}_0$ とする。このとき $d_R = \hat{\boldsymbol{R}}\bullet\hat{\boldsymbol{d}}$ である。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} &= \left(\frac{3}{R^2} + 3j\frac{k}{R} - k^2\right)Ad_R\hat{\boldsymbol{R}} - \left(\frac{1}{R^2} + j\frac{k}{R} - k^2\right)A(d_R\hat{\boldsymbol{R}} + d_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 + d_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}_0)\\
&= 2\left(\frac{1}{R^2} + j\frac{k}{R}\right)Ad_R\hat{\boldsymbol{R}} - \left(\frac{1}{R^2} + j\frac{k}{R} - k^2\right)A(d_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 + d_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}_0)
\end{aligned} \tag{12}$$

電磁界 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ は以下のようにして導出できる。

$$\boldsymbol{B} = \frac{dA}{dR}\frac{\boldsymbol{R}\times\hat{\boldsymbol{d}}}{R} = \left(-jk - \frac{1}{R}\right) A\frac{\boldsymbol{R}\times\hat{\boldsymbol{d}}}{R} = -j\frac{k\mu I\,\Delta l}{4\pi}\left(\frac{1}{R} - j\frac{1}{kR^2}\right)e^{-jkR}\hat{\boldsymbol{R}}\times\hat{\boldsymbol{d}} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \frac{\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}}{j\omega\varepsilon\mu} = \frac{Z\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}}{jk\mu} \\ &= \frac{Z}{jk\mu}A\left\{2\left(\frac{1}{R^2} + j\frac{k}{R}\right)d_R\hat{\boldsymbol{R}} - \left(\frac{1}{R^2} + j\frac{k}{R} - k^2\right)(d_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 + d_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}_0)\right\} \\ &= \frac{Z}{jk\mu}\frac{\mu I\,\Delta l}{4\pi R}e^{-jkR}\left\{2\left(\frac{1}{R^2} + j\frac{k}{R}\right)d_R\hat{\boldsymbol{R}} - \left(\frac{1}{R^2} + j\frac{k}{R} - k^2\right)(d_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 + d_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}_0)\right\} \\ &= -j\frac{ZkI\,\Delta l}{4\pi}e^{-jkR}\left\{2\left(\frac{1}{k^2R^3} + j\frac{1}{kR^2}\right)d_R\hat{\boldsymbol{R}} - \left(\frac{1}{k^2R^3} + j\frac{1}{kR^2} - \frac{1}{R}\right)(d_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 + d_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}_0)\right\}\end{aligned} \tag{14}$$

4　例

■z 方向を向いた原点にあるダイポール:　$\hat{\boldsymbol{d}} = \hat{\boldsymbol{z}}$ であり、$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{0}$ とする。
このとき、$\hat{\boldsymbol{z}} = \cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ より $d_R = \cos\theta, d_\theta = -\sin\theta, d_\phi = 0$ となるので

$$\boldsymbol{E} = -j\frac{ZkI\,\Delta l}{4\pi}e^{-jkr}\left\{2\left(\frac{1}{k^2r^3} + j\frac{1}{kr^2}\right)\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{1}{k^2r^3} + j\frac{1}{kr^2} - \frac{1}{r}\right)\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\} \tag{15}$$

付録 A　定義、公式

定義:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R} &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 \\ R &= |\boldsymbol{R}| \\ \hat{\boldsymbol{R}} &= \frac{\boldsymbol{R}}{R} \\ \hat{\boldsymbol{z}}\bullet\hat{\boldsymbol{R}} &= \cos\theta_0, \qquad 0 \leqq \theta_0 \leqq \pi \\ |\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{R}}| &= \sin\theta_0 \\ \hat{\boldsymbol{\phi}}_0 &= \frac{\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{R}}}{|\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{R}}|} = \frac{\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{R}}}{\sin\theta_0}, \quad (\hat{\boldsymbol{z}}\bullet\hat{\boldsymbol{\phi}}_0 = 0) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_0 &= \hat{\boldsymbol{\phi}}_0\times\hat{\boldsymbol{R}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} &= \cos\theta_0\hat{\boldsymbol{R}} - \sin\theta_0\hat{\boldsymbol{\theta}}_0\end{aligned}$$

公式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}(\psi\boldsymbol{F}) &= \boldsymbol{\nabla}\psi\times\boldsymbol{F} + \psi\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) &= (\boldsymbol{G}\bullet\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\nabla}\bullet\boldsymbol{F}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\nabla}\bullet\boldsymbol{G}) - (\boldsymbol{F}\bullet\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{G}\end{aligned}$$

付録 B　スカラー・ヘルムホルツ方程式の解

次のスカラー・ヘルムホルツ (Helmholtz) 方程式を考える。

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r}) + k^2\phi(\boldsymbol{r}) = -\delta(\boldsymbol{r}) \tag{16}$$

対称性から、$\phi(\boldsymbol{r})$ は原点からの距離 r にのみ依存する ($\phi(\boldsymbol{r}) \to \phi(r)$)。ラプラシアンを明示的に書くと、$r \neq 0$ において以下のようになる。

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) + k^2\phi = 0 \tag{17}$$

ここで、$\phi(r) = \dfrac{\psi(r)}{r}$ と変換すると以下のように書き換えられる。

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + k^2\psi = 0, \qquad \therefore \psi = Ae^{-jkr} \tag{18}$$

従って、以下のようになる。

$$\psi(r) = A\frac{e^{-jkr}}{r} \tag{19}$$

次に係数 A を決定するため、式 (16) を原点を中心とする半径 a の球の領域 V で体積積分をする。

$$\iiint_V \nabla^2\phi\,dV + k^2\iiint_V \phi\,dV = -1 \tag{20}$$

式 (20) の左辺第一項目は以下のように計算できる[*1]。

$$\iiint_V \nabla^2\phi\,dV = \oiint_S \boldsymbol{\nabla}\phi \bullet d\boldsymbol{S} = \oiint_S \frac{d\phi}{dr}dS = 4\pi a^2\frac{d\phi}{dr}(a) \tag{21}$$

ここで、

$$\frac{d\phi}{dr} = A\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) = A\left(-jk\frac{e^{-jkr}}{r} - \frac{e^{-jkr}}{r^2}\right) \tag{22}$$

より、

$$\iiint_V \nabla^2\phi\,dV = 4\pi a^2 A\left(-jk\frac{e^{-jka}}{a} - \frac{e^{-jka}}{a^2}\right) = -4\pi A(jka+1)e^{-jka} \tag{23}$$

式 (20) の左辺第二項目は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
k^2\iiint_V \phi\,dV &= k^2 4\pi A\int_0^a \frac{e^{-jkr}}{r}r^2\,dr = k^2 4\pi A\int_0^a re^{-jkr}dr \\
&= k^2 4\pi A\left\{\left[-r\frac{e^{-jkr}}{jk}\right]_0^a + \frac{1}{jk}\int_0^a e^{-jkr}dr\right\} \\
&= k^2 4\pi A\left\{-a\frac{e^{-jka}}{jk} + \frac{1}{k^2}\left[e^{-jkr}\right]_0^a\right\} = k^2 4\pi A\left\{-a\frac{e^{-jka}}{jk} + \frac{e^{-jka}-1}{k^2}\right\}
\end{aligned} \tag{24}$$

[*1] 正確には、特異点である原点を含む領域でガウスの定理が適用できるかは議論が必要かも知れない

従って、式 (20) は以下のようになる。

$$-4\pi A(jka+1)e^{-jka}+k^2 4\pi A\left\{-a\frac{e^{-jka}}{jk}+\frac{e^{-jka}-1}{k^2}\right\}=-1 \tag{25}$$

ここで、$a\to 0$ の極限をとると以下のようになる。

$$-4\pi A=-1, \qquad \therefore A=\frac{1}{4\pi} \tag{26}$$

結局、式 (16) の解 $\phi(\boldsymbol{r})$ は以下で与えられる。

$$\phi(\boldsymbol{r})=\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \tag{27}$$