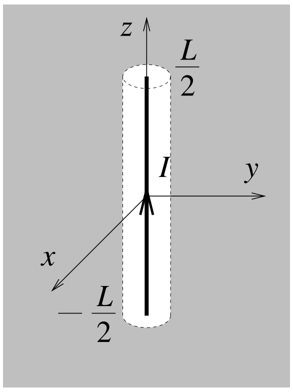
均一な導体中に長さ L [m] の直流電流 I [A] を、周囲導体とは絶縁して流し、両端は周囲導体に接しているものとする。このとき、周囲にできる磁界を求めよ。

図のように z 軸に沿って電流が流れるように座標軸をとり、電流の中央を原点とする。



$\dfrac{L}{2}\hat{\boldsymbol{z}}$ の点で電流は周囲媒質に対して放射状に流れ、$-\dfrac{L}{2}\hat{\boldsymbol{z}}$ の点でも同様である。従って、電流密度 $\boldsymbol{J}$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J} &= \frac{I}{4\pi r_1^2}\hat{\boldsymbol{r}}_1 - \frac{I}{4\pi r_2^2}\hat{\boldsymbol{r}}_2 + \frac{I}{2\pi\rho}\delta(\rho)\theta(\tfrac{L}{2}-|z|)\hat{\boldsymbol{z}} \\ &= \frac{I}{4\pi r_1^2}\hat{\boldsymbol{r}}_1 - \frac{I}{4\pi r_2^2}\hat{\boldsymbol{r}}_2 + I\delta(x)\delta(y)\theta(\tfrac{L}{2}-|z|)\hat{\boldsymbol{z}} \qquad (1)\end{aligned}$$

となる。ここで $\hat{\boldsymbol{r}}_1$ は $\dfrac{L}{2}\hat{\boldsymbol{z}}$ を原点とする r 方向、$\hat{\boldsymbol{r}}_2$ は $-\dfrac{L}{2}\hat{\boldsymbol{z}}$ を原点とする r 方向であり、$r_1 = |\boldsymbol{r}_1|, r_2 = |\boldsymbol{r}_2|$ である。また、$\theta(t)$ はヘヴィサイド関数であり、$\theta(t) = 1 \quad (t > 0), 0 \quad (t < 0)$ となる。

電流密度の z 成分 J_z は以下となる。

$$\begin{aligned}J_z &= \frac{I}{4\pi r_1^2}\cos\theta_1 - \frac{I}{4\pi r_2^2}\cos\theta_2 + \frac{I}{2\pi\rho}\delta(\rho)\theta(\tfrac{L}{2}-|z|) \\ &= \frac{I}{4\pi r_1^3}(z-\tfrac{L}{2}) - \frac{I}{4\pi r_2^3}(z+\tfrac{L}{2}) + \frac{I}{2\pi\rho}\delta(\rho)\theta(\tfrac{L}{2}-|z|) \qquad (2)\end{aligned}$$

ここで θ_1, θ_2 は、$\pm\frac{L}{2}\hat{\boldsymbol{z}}$ の点から各点を見たときの z 軸とのなす角である。

できる磁界は ϕ 成分のみであり (?)、対称性からアンペールの法則で導出することができる。z 軸に垂直で z を中心とした円周 C と、その C を縁とする円でアンペールの法則を適用すると以下となる。

$$\begin{aligned}2\pi\rho H_\phi &= 2\pi\int_0^\rho J_z(\rho_0)\rho_0 d\rho_0 \\ &= \frac{I}{2}(z-\tfrac{L}{2})\int_0^\rho \frac{\rho_0\,d\rho_0}{\{\rho_0^2+(z-\frac{L}{2})^2\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{I}{2}(z+\tfrac{L}{2})\int_0^\rho \frac{\rho_0\,d\rho_0}{\{\rho_0^2+(z+\frac{L}{2})^2\}^{\frac{3}{2}}} + I\theta(\tfrac{L}{2}-|z|) \\ &= -\frac{I}{2}(z-\tfrac{L}{2})\left[\frac{1}{\{\rho_0^2+(z-\frac{L}{2})^2\}^{\frac{1}{2}}}\right]_0^\rho + \frac{I}{2}(z+\tfrac{L}{2})\left[\frac{1}{\{\rho_0^2+(z+\frac{L}{2})^2\}^{\frac{1}{2}}}\right]_0^\rho + I\theta(\tfrac{L}{2}-|z|) \\ &= -\frac{I}{2}\frac{z-\frac{L}{2}}{\{\rho^2+(z-\frac{L}{2})^2\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{I}{2}\frac{z+\frac{L}{2}}{\{\rho^2+(z+\frac{L}{2})^2\}^{\frac{1}{2}}} \qquad (3)\end{aligned}$$

$$\therefore H_\phi = \frac{I}{4\pi\rho}\left[\frac{z+\frac{L}{2}}{\{\rho^2+(z+\frac{L}{2})^2\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{z-\frac{L}{2}}{\{\rho^2+(z-\frac{L}{2})^2\}^{\frac{1}{2}}}\right] \qquad (4)$$

これは、長さ L の電流がつくる磁界をビオ=サバールの法則で求めたときと同じ結果となる。

参考文献

[1] J. R. Wait, *Electromagnetic Wave Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1987.