電磁波工学 演習 (Dec. 17)

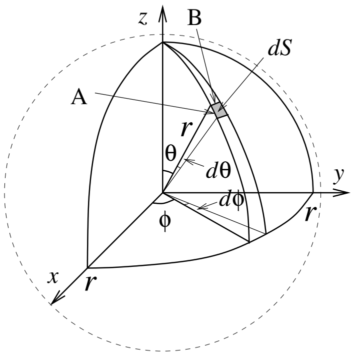
学籍番号:	氏名:

確認用の問題

$\boxed{1}$ 次の面積分を考える。

$$\oiint_S \sin^2\theta\, dS$$

図は球座標系の座標 (r, θ, ϕ) を示しており、S は半径 r の球面である。



(1) 座標 (r, θ, ϕ) の点から、θ を微小量 $d\theta$ 増やしたときの移動距離はいくらか (図中の A)。

(2) 座標 (r, θ, ϕ) の点から、ϕ を微小量 $d\phi$ 増やしたときの移動距離はいくらか (図中の B)。

(3) 上記を二つの辺とする面素 dS はいくらか (図中の影の面積)。

(4) 面積分 $\oiint_S \sin^2\theta\, dS$ を計算せよ。

(1) $r\, d\theta$

(2) $r\, \sin\theta\, d\phi$

(3) $dS = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$

(4) 以下の通り。$\cos\theta = t$ と積分変数を変換する。

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\theta r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi &= 2\pi r^2 \int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta \\ &= 2\pi r^2 \int_{-1}^{1} (1-t^2) dt = 2\pi r^2 \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\pi r^2\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 空間は真空とし、波数を $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ [rad/m] とする。微小ダイポール・アンテナの放射電力を 求める。波源から十分遠い点 (距離 d [m]、$k_0 d \gg 1$) において、微小ダイポール・アンテナ (電流 I [A]、長さ Δl [m]) がつくる電界は次式で表される。

$$\boldsymbol{E} = j\frac{60\pi I\,\Delta l}{\lambda_0 d} e^{-jk_0 d}\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

(1) 最大放射方向における電界の最大値 E_m [V/m] はいくらか。
(2) 電力束密度 p [W/m^2] はいくらか。
(3) 半径 d [m] の球面上の全電力 P [W] を求めよ。
(4) この電界の最大値 E_m [V/m] を、アンテナの放射電力 W_t [W] と伝搬距離 d [m] を用いて表せ。

(1) $E_m = \dfrac{60\pi I\,\Delta l}{\lambda_0 d}$

(2) $p = \dfrac{E_m^2}{2Z_0}\sin^2\theta_0 = \dfrac{E_m^2}{240\pi}\sin^2\theta_0$

(3)

$$\begin{aligned} P &= \oiint_S p\,dS = \frac{E_m^2}{240\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta_0 d^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi \\ &= \frac{E_m^2 d^2}{120}\int_0^{\pi}\sin^3\theta_0\,d\theta = \frac{E_m^2 d^2}{120}\frac{4}{3} = \frac{E_m^2 d^2}{90} \end{aligned}$$

(4) $P = W_t$ となるので、$E_m = \dfrac{\sqrt{90 W_t}}{d}$

$\boxed{3}$ 半波長ダイポール・アンテナを考える。原点を給電点とし、$-\dfrac{\lambda_0}{4} \leqq z \leqq \dfrac{\lambda_0}{4}$ にわたって z 軸に沿って置かれている。電流分布を $I(z) = I_0 \cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda_0} z\right)$ [A] と仮定する。

この位置 z [m](S とする) における微小長さ dz [m] の電流によって、原点からの距離 d [m]、z 軸からの角度 θ の位置 P にできる電界 $d\boldsymbol{E}$ は微小ダイポールの式から計算できる。

(1) 位置 S と P の間の距離を R [m] とする。$d \gg \lambda_0$ のときの R を近似式をもちいて $d\boldsymbol{E}$ を表せ。

(2) アンテナ全体にわたって $d\boldsymbol{E}$ を合成することで、半波長ダイポール・アンテナが放射する電界 $\boldsymbol{E}$ を求めよ。

(3) 関数 $\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}$ が最大となるのは $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のときである。最大放射電界強度 E_m [V/m] を求めよ。

(4) 電力束密度を半径 d [m] の球面上で面積分することで放射電力 W_t [W] を求めよ。ただし、$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta} d\theta \approx 1.218826697 \approx 1.22$ を用いてよい。

(5) 最大の電界強度 E_m を放射電力 W_t [W] と伝搬距離 d [m] で表せ。

(1) $d\boldsymbol{E} = j\dfrac{60\pi I_0 \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}z)dz}{\lambda_0 R} e^{-jk_0R} \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} \approx= j\dfrac{60\pi I_0 \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}z)dz}{\lambda_0 d} e^{-jk_0d} e^{jk_0 z\cos\theta} \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$

(2)

$$\boldsymbol{E} = \int d\boldsymbol{E} = \int_{-\frac{\lambda_0}{4}}^{\frac{\lambda_0}{4}} j\frac{60\pi I_0 \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}z)}{\lambda_0 d} e^{-jk_0d} e^{jk_0z\cos\theta} \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} dz$$

$$= j\frac{60\pi I_0}{\lambda_0 d} e^{-jk_0d} \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} \int_{-\frac{\lambda_0}{4}}^{\frac{\lambda_0}{4}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}z\right) e^{jk_0z\cos\theta} dz$$

$$\int_{-\frac{\lambda_0}{4}}^{\frac{\lambda_0}{4}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}z\right) e^{jk_0z\cos\theta} dz = 2\int_0^{\frac{\lambda_0}{4}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}z\right) \cos(k_0z\cos\theta) dz$$

$$= \int_0^{\frac{\lambda_0}{4}} \left\{\cos\frac{2\pi}{\lambda_0}z(1+\cos\theta) + \cos\frac{2\pi}{\lambda_0}z(1-\cos\theta)\right\} dz$$

$$= \left[\frac{\lambda_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda_0}z(1+\cos\theta)}{2\pi(1+\cos\theta)} + \frac{\lambda_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda_0}z(1-\cos\theta)}{2\pi(1-\cos\theta)}\right]_0^{\frac{\lambda_0}{4}}$$

$$= \frac{\lambda_0 \sin\frac{\pi}{2}(1+\cos\theta)}{2\pi(1+\cos\theta)} + \frac{\lambda_0 \sin\frac{\pi}{2}(1-\cos\theta)}{2\pi(1-\cos\theta)} = \frac{\lambda_0 \cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{2\pi(1+\cos\theta)} + \frac{\lambda_0 \cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{2\pi(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\lambda_0 \cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{2\pi} \frac{2}{\sin^2\theta} = \frac{\lambda_0}{\pi} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$

$$\therefore \boldsymbol{E} = j\frac{60\pi I_0 \,\Delta l}{\lambda_0 d} e^{-jk_0d} \sin\theta \frac{\lambda_0}{\pi} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin^2\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} = j\frac{60 I_0}{d} e^{-jk_0d} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

(3) $E_m = \dfrac{60 I_0}{d}$

(4)

$$W_t = \frac{E_m^2}{2Z_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin^2\theta} d^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \frac{E_m^2 d^2}{120} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta} d\theta \approx \frac{E_m^2 d^2}{98.4}$$

(5) $E_m = \dfrac{\sqrt{98.4 W_t}}{d}$

問題 (自習用)

$\boxed{1}$ (一陸技 H22 年 7 月) 次は微小ダイポールによる電界についての記述である。空欄を埋めよ。

アンテナの中心軸から角度 θ [rad] 方向の距離 d [m] 離れた点における電界の θ 方向の成分 E_θ は $1/d^3$、$1/d^2$、$1/d$ それぞれに比例する項からなる三つの電界の成分を含んでいる。d が $\boxed{\text{A}}$ のところで三つの成分の大きさが等しくなるが、この値よりも d が小さい範囲では、最も大きいのは $\boxed{\text{B}}$ 成分で、次に大きいのは $\boxed{\text{C}}$ 成分である。

d が大きくなると放射電界の成分が支配的になり、d が 5λ [m] のところでは、放射電界の大きさ 1 に対して、誘導電界の大きさは約 $\boxed{\text{D}}$ となる (λ は波長)。

(解) A. 約 0.16λ　　B. 静電界　　C. 誘導電界　　D. 0.032

$\boxed{2}$ (一陸技 H21 年 7 月) 自由空間において、放射電力が等しい微小ダイポールと半波長ダイポールアンテナによって最大放射方向の同じ距離の点に生ずるそれぞれの電界強度 E_1 および E_2 [V/m] の比 E_1/E_2 の値はいくらか。　**(解)** 約 0.96