解析電磁気学 補足資料 (2016 年 7 月 25 日)

1 境界値問題 — 鏡像法

電磁場を決定する際、電磁場の満たす式 (微分方程式) と求める領域の境界の値を与えることを**境界値問題**と呼びます。ここでは、静電界の境界値問題について考えます。

1.1 境界値問題の一意性

静電ポテンシャル (電位)$\varphi(\boldsymbol{r})$ [V] はポアソンの方程式: $\nabla^2\varphi = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$ を満たします。

領域 V(その表面 S) 内の静電ポテンシャルを決定したいとき、S 上の φ の値が与えられていれば、V 内の φ は一意に決定できます (解の一意性)。

また、S 上の S に対する法線成分 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ が与えられていると、定数の不定性以外は決定できます。

V は無限に広がっていた場合、無限遠での φ の値が与えられている必要があります (通常は 0)。

1.2 半無限導体上の電荷

図??に示すように、$z < 0$ の半無限領域は完全導体で電位 0 V とし (グランド平面)、そこから距離 h [m] のところに点電荷 Q [C] があるものとします。$z > 0$ は真空とします。このときの静電ポテンシャル $\varphi(\boldsymbol{r})$ [V] は以下のような方法で求められます。

自由空間 (グランド平面がない場合) の場合、静電ポテンシャルは $\varphi_p(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$ となります。ここで、r_1 は点電荷と任意の点 $\boldsymbol{r}$ との距離で、$r_1 = \sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}$ です。

このポテンシャルは境界条件 $\varphi(x,y,0) = 0$ を満たしません。$z = 0$ でのポテンシャルを 0 とするには、常に等距離に、大きさが同じで反対符号の電荷があれば良いので、「$z = -h$ に反対符号の電荷 $-Q$ [C] があるかのようなポテンシャル分布 $\varphi_s = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$」を足して、

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \tag{1}$$

というポテンシャルを考えます。ここで、$r_2 = \sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}$ です。

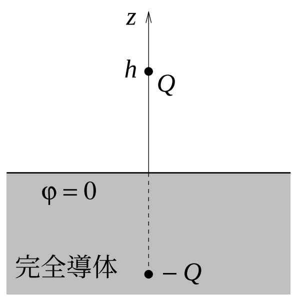

図 1 半無限導体上の点電荷

このポテンシャルは $z = 0$ で $r_1 = r_2$ となるので、$\varphi(x,y,0) = 0$ を満たします。また、無限遠で 0 となり、無限遠での境界条件も満たします。さらに、ポアソンの方程式 ($z > 0$ では $h\hat{z}$ の点以外では $\rho = 0$ です) を満たしています。つまり、**ポアソンの方程式と境界条件を満たすポテンシャル**が見つかり、解が得られたことになります。

$z = -h$ の点に電荷があるわけではありません。ただ、導体表面に対してちょうど鏡写しの位置に、反対符号の電荷があるようなポテンシャル分布を <u>導体外の領域で</u> 考えることで解が得られた

ことになります。

この方法を**鏡像法** (image method) と呼びます。

1.3 接地した導体球と点電荷

真空中に原点を中心に半径 a [m] の導体球があり、電位が 0 V になるよう接地されているものとします。また、$\boldsymbol{r}_0 = r_0\hat{\boldsymbol{r}}(\theta_0, \phi_0) = r_0\hat{\boldsymbol{r}}_0$ の点に点電荷 Q [C] があるものとします。このときのポテンシャル分布 $\varphi(\boldsymbol{r})$ を求めます。$\hat{\boldsymbol{r}}_0$ は θ_0, ϕ_0 の方向を向いた単位ベクトルです。

境界条件は無限遠と $|\boldsymbol{r}| = a$ で $\varphi = 0$ です。

このとき、導体内部の $\boldsymbol{r}_1 = r_1\hat{\boldsymbol{r}}_0$ の点 $(r_1 < a)$ に鏡像電荷 Q_1 [C] を考えたポテンシャル分布 $\varphi(\boldsymbol{r})$:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon|r\hat{\boldsymbol{r}} - r_0\hat{\boldsymbol{r}}_0|} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon|r\hat{\boldsymbol{r}} - r_1\hat{\boldsymbol{r}}_0|} \tag{2}$$

を考え、境界値を満たす $\boldsymbol{r}_1, Q_1$ を探しましょう。$\hat{\boldsymbol{r}}$ は θ, ϕ の方向を向いた単位ベクトルです。

既に、$|\boldsymbol{r}| \to \infty$ での境界条件は満たされていますので、$r = a$ での境界条件を考えれば十分です。

$|\boldsymbol{r}| = a$ でのポテンシャル $\varphi(\boldsymbol{r}) = \varphi(a, \theta, \phi)$ は次のようになります。

$$\begin{aligned}
\varphi(a,\theta,\phi) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon|a\hat{\boldsymbol{r}} - r_0\hat{\boldsymbol{r}}_0|} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon|a\hat{\boldsymbol{r}} - r_1\hat{\boldsymbol{r}}_0|} \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\{(a\hat{\boldsymbol{r}} - r_0\hat{\boldsymbol{r}}_0) \bullet (a\hat{\boldsymbol{r}} - r_0\hat{\boldsymbol{r}}_0)\}^{-\frac{1}{2}} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\{(a\hat{\boldsymbol{r}} - r_1\hat{\boldsymbol{r}}_0) \bullet (a\hat{\boldsymbol{r}} - r_1\hat{\boldsymbol{r}}_0)\}^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}(a^2 - 2ar_0\hat{\boldsymbol{r}} \bullet \hat{\boldsymbol{r}}_0 + r_0^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}(a^2 - 2ar_1\hat{\boldsymbol{r}} \bullet \hat{\boldsymbol{r}}_0 + r_1^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{a}\left(1 - 2\frac{r_0}{a}\hat{\boldsymbol{r}} \bullet \hat{\boldsymbol{r}}_0 + \left\{\frac{r_0}{a}\right\}^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1}{r_1}\left(\left\{\frac{a}{r_1}\right\}^2 - 2\frac{a}{r_1}\hat{\boldsymbol{r}} \bullet \hat{\boldsymbol{r}}_0 + 1\right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{3}$$

ここで、

$$\frac{Q}{a} = -\frac{Q_1}{r_1}, \qquad \frac{r_0}{a} = \frac{a}{r_1} \tag{4}$$

が成立していれば、$\varphi(a, \theta, \phi = 0$ が成立します。

従って、$\boldsymbol{r}_1 = \dfrac{a^2}{r_0}\hat{\boldsymbol{r}}_0$ の位置に $Q_1 = -\dfrac{a}{r_0}Q$ の電荷を置けば境界条件が満たされますので、球外のポテンシャルが得られたことになります。

1.4 誘電体平面境界と点電荷

$z > 0$ で ε_1, $z < 0$ で ε_2、$\boldsymbol{r}_1 = h\hat{\boldsymbol{z}}$ に点電荷 Q があるとき、ポテンシャルを以下のように仮定して境界条件を合わせるように設定することで分布を求めることができます。

- $z > 0$ のポテンシャルは、「全空間が ε_1 の誘電率」で「$\boldsymbol{r}_1$ の点電荷 Q」と「鏡像の位置 $-\boldsymbol{r}_1$

に K 倍の点電荷 KQ」がつくるポテンシャル:

$$\varphi_1(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|} K \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_1|} \tag{5}$$

- $z < 0$ のポテンシャルは、「全空間が ε_2 の誘電率」で「$\boldsymbol{r}_1$ に T 倍の点電荷 TQ」がつくるポテンシャル:

$$\varphi_2(\boldsymbol{r}) = T\frac{Q}{4\pi\varepsilon_2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|} \tag{6}$$

境界条件は

- $z = 0$ で E_x が連続:

$$-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x,y,0) = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x,y,0) \tag{7}$$

- $z = 0$ で E_y が連続:

$$-\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}(x,y,0) = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}(x,y,0) \tag{8}$$

- $z = 0$ で D_z が連続:

$$-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x,y,0) = -\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x,y,0) \tag{9}$$

ここから、

$$\frac{1}{\varepsilon_1}(1+K) = \frac{T}{\varepsilon_2}, \qquad -1+K = -T \tag{10}$$

という関係式が得られます。これを解いて

$$K = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \tag{11}$$

$$T = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \tag{12}$$

を得ます。