

解析電磁気学

第1章 イン트로ダクション

1.1 電磁気学で勉強すること

電磁気学は電気と磁気に関する学問です。電気と磁気は互いに関係があるので、それをまとめて「電磁気学」と呼んでいます。

電磁気学で学ぶことは、①電気と磁気に関わる諸現象と②その法則、③コイルやコンデンサといった、電磁気現象を応用したものの動作と原理になります。

電荷や電流が存在すると、周囲に電磁場と呼ばれるものができます。これが電磁気現象の根本です。当然に、電荷や電流の分布の仕方が異なれば、それによってできる電磁場の分布も異なります。

また、周囲に物体（導体、誘電体、磁性体）があると、それによっても電磁場の分布が変化します。

つまり、電荷と電流の分布、および物体の形状と特性を指定すれば、電磁場は一意に決定できることになります。

電磁場の分布を決定するには、解くべき方程式としてマクスウェル (Maxwell) の方程式があります。これは、電磁場の法則をまとめたものです。

また電磁気学では、電場と磁場に関する法則だけでなく、コイルやコンデンサなど、それを工学的に応用した基本的なものを述べ、その動作原理や、その性能を表すための指標を定義します。

1.2 解析電磁気学の範囲

解析電磁気学では、基礎電磁気学でならった電磁気現象全体を更に深く説明し、もう少し数学的に厳密に取り扱って、実際の電磁気現象について取り組める（＝解析できる）ようにするのが目的です。

ただ、それには数学の実力が必要であり、具体的には関数と微積分、ベクトルが重要となってきます。

いずれも当然に習っているとは思いますが、「それを使って実際に起こっている問題を解く」となると自由自在に使える必要があります。この授業でも、ごく基本的なものしか取り扱う時間しかありませんが、予習・復習でじっくり取り組んでもらいたいと思います。

1.3 用語について

用いる各種用語をここで明確にしておきます。

- 定義とは、物事や概念をそれ自身と決めること。
- 定理とは、定義されたことを用いて証明されたこと。従って、数学の話です。
- 法則とは、自然に存在する個々の現象を貫く一般的な性質のこと。従って、物理の話です。
- 公式とは、覚えておくと計算が早くできて便利な式のこと。
- 方程式とは、等号で結ばれた式で、その式中の未知量がある条件のときに成立する式のこと。
- 恒等式とは、等号で結ばれた式で、その式中の量がいつでも必ず成立する式のこと。

一般と特殊 一般と特殊という用語は、物理学では日常会話とは異なった使い方がされます。日常会話では「一般的には」といった場合は「普通は」という意味です。また、それとは違う、普通でない、時々起こるようなことを「特殊」と言っています。

しかし、物理や数学で「一般的」というのは、「どのようなケースにも当てはまる、より広い範囲で成立する」ことを言います。

それに対して「特殊」というのは、「適用される範囲が限定された」ことを指します。

例えば、 x を独立変数とする関数 $y(x)$ に対する微分方程式 $\frac{dy}{dx} = 3$ の解は、 $y(x) = 3x$ は一つの解ですが、 $y(x) = 3x + 1$ や $y(x) = 3x + 2$ も同様に解ですので、それぞれが「特殊な解」です。これらを全部ひっくめて、任意の数 C を用いて $y(x) = 3x + C$ と書くと「一般的な解」になります。

「一般」と「特殊」は概念としては対立していますが、異なるものを指すわけではなく、「一般」のうちの一部が「特殊」になります。「特殊」は「一般」に含まれる、包含関係にあります。

電場と磁場について この授業では、電場と磁場という用語について、少し特殊な使い方をします。他の教科書では、電界と電場は同じ意味に用いられましたが、この授業では「電界と電場は違うもの」とします。

電界は物理量であり、その単位は V/m です。電場は「電氣的な作用が及んでいる空間」を指すものとします。ですから、電場は「電界と電束密度をひっくめるめたもの」と考えてもらって OK です。

磁場も同様で、磁界と磁束密度をひっくめるめた、磁氣的作用が及んでいる空間のことを指すものとします。

1.4 物理量について

スカラーとベクトル この授業で扱う物理量としては、スカラーとベクトルがあります。例えば、電流や仕事はスカラー、速度や力はベクトル量です。

この二つを混同しないように気をつけて下さい。もちろん、「スカラー量とベクトル量の和」とかは存在しません。「ベクトルで割る」こともできません。

場 また、物理量には、単なる量と場というものがあります。前者の「単なる量」は、電流とか体重とか、通常あついているもので、簡単にイメージできるかと思います。

それに対して、すこし理解しづらいのが「場」です。この電磁気学の授業を通して、場を常に意識して勉強をして下さい。

「場」とは、空間の各点に存在する物理量であり、例えば、「温度」はスカラーの場です。温度計を各点におけばその点の温度が測れる、他の点では違った値となる、というものです。また、「電界」はベクトルの場です。各点に電界が存在し、各点で異なる「向き」と「大きさ」を持ったベクトルである電界が測れます。「場」は「空間の位置を変数とする関数」で表現できます。

「場」が皆さんにとって理解しづらい理由は、教科書に表現することが難しいからです。特に3次元の場は、どんな手法を使っても表現することは極めて困難です。

表現する手法としては、スカラー場であれば、カラーマップ、等値線(面)での表現があります。また、ベクトル場であれば、グリッド点上での矢印による表現や、流線による表現があります。しかし、せいぜい2次元しか表現できません。皆さんに頭の中で想像してもらおうしかありません。

1.5 単位について

単位とは物事を測る際の基準とする量のことです。その基準量に対して何倍かでもって量を測ります。

秒であれば、1秒を表す時間の長さを定義します。ある時間が、その1秒の5倍であれば「5秒」と呼ぶこととなります。

この基準 (単位) が異なってしまうと測定値がずれてしまいますので、しっかり計測すればずれないように基準を国際的に定めています¹。

物事が異なれば加算減算はできないので、異なる単位の量を加算減算する式は存在しません。1 + 3 はできますが、1 m + 3 kg はできません、1 m の棒と 3 kg のリンゴを加える、といっても答えがでないことになります。この簡単な例なら分かったとは思いますが、難しい計算をやったあとに、単位が異なる量を足した式とかを出している人が結構います。

当然、基準量 (単位) の定義が異なれば現れる式が異なってきます。ここでは SI(MKSA 有理) 単位系を用います。

電磁気学で用いる基本的な単位は m, kg, s(sec), A の 4 つです。他の量はこの基本単位の組み合わせで表せます。

しかし 4 つの単位だけですと混乱します。混乱を防ぐために多くの量で独自の単位を定義しています。例えば、V(ボルト) を基本単位だけで表すと $\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$ となってしまいます。また、F(ファラド) は $\text{m}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$ です。このように、異なる単位は、その指数部の値が異なるだけですので、理解がしやすいことが分かります。そのため、V(ボルト) や F(ファラド) といった独自の単位 (組立単位と呼びます) をつくります。

組立単位をつくと覚える単位が増えてしまいますが、上のように 4 つの単位の次数を覚えるよりはマシでしょう。

1.6 なぜ電磁気学は「難しい」のか

一般に「電磁気学は難しい」と言われます。また、私自身の記憶からも、電磁気学が理解し難かった記憶があります。ここでは、なぜ電磁気学は難しいと言われるのか、私なりの考察をまとめておきます。これによって、皆さんが電磁気を勉強する際に、どの点を注意すべきかが分かるのではないかと思います。

電磁気学が難しい理由 (1): 「電磁場は 3 次元ベクトル場」であるから

先程説明した「場」ですが、知識として理解するのはそんなに困難ではなくても、本当に理解するのは少し努力が必要です。さらに、電場や磁場は「ベクトルの場」であり、空間の (無限にある) 各点にベクトル量が割り当たっている、という状態です。これを理解しないと、電磁気学は「複雑で難しい」学問になります。

さらにこの「3 次元のベクトル場」を紙面に表すことは不可能です。理解したものを頭の中に描くことしかできず、そのために最初はイメージしづらいものとなります。

電磁気学が難しい理由 (2): 多くの教科書で、ベクトル場であることをあえて避けているから

イメージしづらい 3 次元ベクトル場に対して、多くの教科書では「3 次元ベクトル場を意識しないで学べるような」アプローチが取られています。最初からスカラーで計算するようにして、計算上の困難さを避けることができるためでしょう。

ところが、このアプローチは大きな問題があると考えられます。最も大きな理由は「ベクトル場の概念に慣れることができない」ことです。概念を身に付けるには、多少の時間と訓練が必要ですが、それを避けては身に付けることができません。

¹ 細かな値は省きますが、例えば 1 秒とは、セシウムという原子において、ある準位からある準位に電子が遷移したとき、そのエネルギー差に相当する電磁波が発生するのですが、その電磁波はある周波数を持っているわけで、「その電磁波の X 周期分の時間」を 1 秒とする、とされています。m(メートル) は、「電磁波が真空中を Y 秒間に進む距離」とされています (つまり、秒の定義が先)。また 1 kg は、「これが 1 kg のオモリ」というのが保管されています (日本にもコピーがあります。運搬時にはパトカーが先導するくらい大事なものです。現在、このオモリを使った定義は止める議論の最中です)。量を測るには、それらに対して何倍か、ということが問題となります。

ベクトルで計算する方法は「一般的」であり、どのような場合にも当てはまります。つまり、一つの方法を覚えておけば OK です。一方で、スカラーで計算できるようにするには、それぞれの場合で異なる定式化が必要となります。

電磁気学が難しい理由 (4): ベクトル場の微積分の計算が難しいから

ベクトル場の微積分は慣れるまで時間がかかります。そのため、途中でくじけてしまう人にとっては「難しい」となります。「解き方を覚えればいい」と考えるのではなく、どういう原理なのかを考えてじっくり取り組んで下さい。

電磁気学が難しい理由 (3): 一番簡単な座標系である、デカルト座標系において解ける問題がないから

これまでの勉強で慣れているのが (x, y, z) を用いるデカルト座標系です。しかし、電磁気学の場合は「球対称」「線対称」な構造をしているときに易しい問題で、このときは球座標系や円筒座標系といった、慣れていない座標系になります。「問題は簡単だが、座標系が慣れていない」ため、難しく感じるようになります。

電磁気学が難しい理由 (4): 「物理」と「工学的応用」と「数学」が混ざって講義されるから

電磁気学そのものは「物理」です。つまり、自然において、電気現象や磁気現象がどんな法則を持っているか(「万有引力の法則」のように)を勉強するものです。

ところが、(特に工学系では)「それを何に应用できるか」がもう一つの主題になってきます。そこで、コンデンサやコイルといった、人工物の性質を勉強する必要があります。そして、その人工物の性質を定量的に表すため、静電容量やインダクタンスといった新しい事項が教科書になります。

「電圧」や「電流」はスカラーであり、単なる「量」です(「場」ではない)。従って、微積分は高校生で習ったものと大きく変わりません。しかし電磁気学は「場」を扱います。例えば、微分は「傾き」ですが、空間的に分布している場の場合、色々な方向で色々な傾きが定義できてしまいます(山の傾斜を考えれば、進む方向によって急だったり、緩やかだったり、平らだったり、色々な傾きがあります)。これを一般的に表現する、新しい「数学」=ベクトル解析が必要になります。

上記の3つの要素(物理、工学的応用、数学)が、同時に授業で出てきてしまうことから、混乱してしまうようです。どれが物理でどれが工学的応用なのか、数学の説明なのか物理の説明なのか、自分でしっかり区別して勉強して下さい。

第2章 電磁気学に必要な計算法

ここからは、電磁気学に必要な計算法について述べます。これまで「数学」の科目で習ってきたことと重複があるかと思いますが、その復習と思って下さい。「数学」でなく計算法と呼んでいる理由は、単に電磁気学に出てくる式を取り扱うだけのもので、数学と呼べるほどのものではないためです。定義と説明と解き方だけという、あまりおもしろくない部分です。

しかし、これを理解してもらわないと、電磁気現象を正確に扱うことができません。土台となるツールですので、自在に使えるようにして、電磁気現象を勉強をする際にわずらわされないようにして下さい。

2.1 ベクトル

2.1.1 ベクトルの基本

大きさと方向を持つ量をベクトルと呼びます。この授業ではベクトルは、太いボールド体で表現します ($\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ など)。ノートに書くときは $\mathbf{C}$, $\mathbf{E}$ のように、1本加えて書いて下さい。

任意ベクトル $\mathbf{A}$ は、成分毎に表記すると、一意に表現できます。デカルト座標系では次のようになります。

$$\mathbf{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \quad (2.1)$$

$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ は、それぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルです (他の本では i, j, k などを使っています。この講義では、座標パラメタ (x, y, z) をベクトルを示すボールド体とし、単位ベクトルを示す $\hat{}$ を付けて表す形式で統一します)。

成分を用いて、ベクトル $\mathbf{A}$ の大きさ $|\mathbf{A}|$ は $\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ と表せます。

単位ベクトルは、大きさが1のベクトルです。この授業では、単位ベクトルについては、 $\hat{}$ (ハット) を付けて $\hat{\mathbf{A}}, \hat{n}$ などと表します。

任意のベクトル $\mathbf{A}$ をそれ自身の大きさを割れば、その結果は大きさが1の、 $\mathbf{A}$ の方向を向いた単位ベクトル $\hat{\mathbf{A}}$ が得られます。

任意のベクトル $\mathbf{A}$ は、その大きさ $|\mathbf{A}|$ と方向を表す単位ベクトル $\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \equiv \hat{\mathbf{A}}$ の積で、一意に表せます。

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = |\mathbf{A}| \hat{\mathbf{A}} \quad (2.2)$$

2.1.2 内積

直交座標系における3つの基本単位ベクトル (例えば $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$) に対して、自分自身との内積の結果は1、異なるベクトル同士の内積は0となります。即ち、 $\hat{x} \cdot \hat{x} = 1, \hat{x} \cdot \hat{y} = 0, \hat{x} \cdot \hat{z} = 0$ です。これを用いると、ベクトル $\mathbf{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$ と $\mathbf{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$ の内積は分配則を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) \cdot (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}) \\ &= A_x B_x \hat{x} \cdot \hat{x} + A_x B_y \hat{x} \cdot \hat{y} + A_x B_z \hat{x} \cdot \hat{z} + A_y B_x \hat{y} \cdot \hat{x} + \cdots \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (2.3)$$

と計算できます。

ベクトル A と x 方向の単位ベクトル $\hat{x}$ との内積は $A \cdot \hat{x} = A_x$ となり、ベクトル A の x 成分となります。同様に任意方向の単位ベクトル $\hat{a}$ との内積 $A \cdot \hat{a}$ の結果は、ベクトル A の $\hat{a}$ 方向成分となります (図 2.1 参照)。

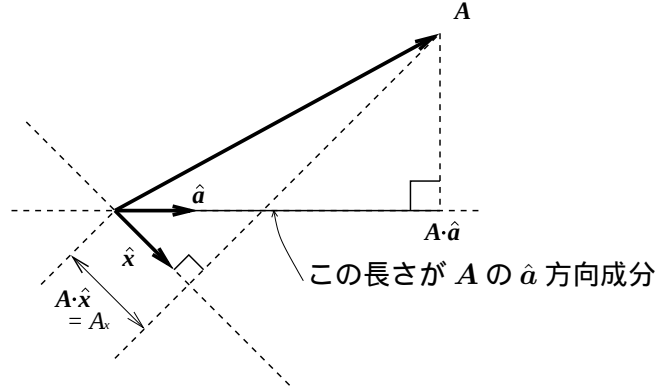


図 2.1: 単位ベクトルとの内積

2.1.3 外積

右手座標系とは、「 $+x$ 方向から $+y$ 方向に右ねじを回したとき、ねじの進む方向が $+z$ 方向」とした座標系です (図 2.2 参照)。

外積の定義は、「ベクトル a と b の外積 $a \times b$ は、 a と b に垂直なベクトルであり、 a から b に右ねじを回した方向、その大きさは a と b のつくる平行四辺形の面積」です (図 2.3 参照)。

基本単位ベクトル $\hat{x}$ と $\hat{y}$ の内積を考えると、 $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ となります。同様に、 $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$, $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$ です。また、順序を逆にすると $\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$ となり、他も同様です。

また、同じベクトル同士の外積 $\hat{x} \times \hat{x}$ は、2 つのベクトルがつくる平行四辺形の面積が 0 となるので、外積は零ベクトルとなります。

ベクトル $A = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$ と $B = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$ の外積は、分配して同様の規則を適用すれば得られます。

$$\begin{aligned}
 A \times B &= (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) \times (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}) \\
 &= A_x B_x \hat{x} \times \hat{x} + A_x B_y \hat{x} \times \hat{y} + A_x B_z \hat{x} \times \hat{z} \\
 &\quad + A_y B_x \hat{y} \times \hat{x} + A_y B_y \hat{y} \times \hat{y} + A_y B_z \hat{y} \times \hat{z} \\
 &\quad + A_z B_x \hat{z} \times \hat{x} + A_z B_y \hat{z} \times \hat{y} + A_z B_z \hat{z} \times \hat{z} \\
 &= A_x B_y \hat{z} - A_x B_z \hat{y} - A_y B_x \hat{z} + A_y B_z \hat{x} + A_z B_x \hat{y} - A_z B_y \hat{x} \\
 &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

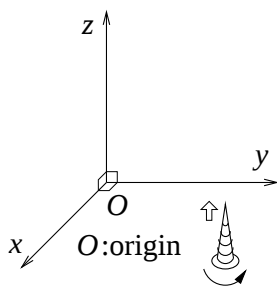


図 2.2: 右手座標系

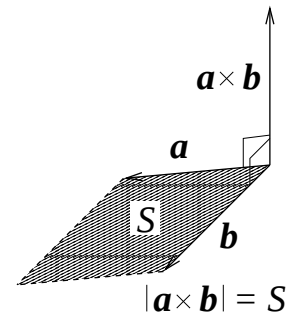


図 2.3: 外積

スカラー三重積は $A \cdot (B \times C)$ と書かれるもので、 A, B, C の3つの辺でできる平行六面体 (図 2.4 参照) の体積となります (ただし、 B と C のなす角 θ が $0 < \theta < \pi$ 、かつ $B \times C$ と A のなす角 φ は $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ の必要がある)。

巡回的 (サイクリック) といって、以下が成立します。

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) \quad (2.5)$$

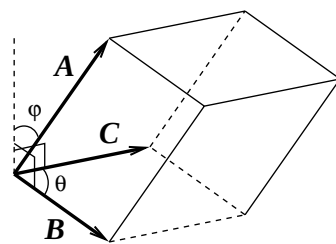


図 2.4: スカラー三重積と平行六面体

ベクトル三重積はありますが、この講義ではあまり使いません。次の公式を覚えておくぐらいで良いでしょう (デカルト座標系で成分毎に分けて公式が成立することを確認してみてください)。

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \quad (2.6)$$

応用: 3 点を通る平面: 位置ベクトル a, b, c で表される 3 点を通る平面 (図 2.5 参照) の式は、以下のようにして機械的に求めることができます。ベクトル $b-a, c-a$ は平面に平行なベクトルです。従って、 $(b-a) \times (c-a)$ は平面に垂直なベクトルになります。ある点 $r = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ がこの平面にあるとすると、 $r-a$ は平面に平行となります。従って、 $(r-a) \cdot \{(b-a) \times (c-a)\} = 0$ を満足します。整理しますと、 $r \cdot (a \times b + b \times c + c \times a) = a \cdot (b \times c)$ と書けます。

2.2 ベクトル関数 (特に、位置ベクトル関数)

一つ以上のパラメタによって変化するベクトルをベクトル関数と呼びます。パラメタを s としたとき、 $a(s)$ などと書きます。各成分毎に表せば、 $a(s) = a_x(s)\hat{x} + a_y(s)\hat{y} + a_z(s)\hat{z}$ と書けます。

ベクトル関数のうち、位置ベクトルの関数はたいへん有用です。パラメタが一つの位置ベクトル関数の場合、その変数を変化させることでベクトル関数の先端は線を描きます。2 パラメタの場合は、2 変数を独立に動かすと面を描きます。さらに 3 パラメタの場合は体積を描くことになります。

位置ベクトル関数を用いると、時刻 t における荷電粒子の運動 $r(t)$ など表現することができます。

3 次元空間の位置 x, y, z を 3 つのパラメタとするベクトル関数 $A(x, y, z)$ を定義できます (これは位置ベクトル関数でなく、普通のベクトル関数です)。空間の各点にベクトルを割り当てることができ、これをベクトル場と呼びます。

2.2.1 経路を表す位置ベクトル関数 $r(s)$

ベクトルの先端が経路 C を動く位置ベクトル関数を $r(s)$ とします。一つのパラメタを持つ位置ベクトルの関数は、そのパラメタの範囲を与えることで空間に経路を表現することができます。 s が範囲 $s_1 \leq s \leq s_2$ を通ることで経路 C を描く、即ち $r(s_1)$ が C の積分経路の始点、 $r(s_2)$ がの終点になります (図 2.6 参照)。

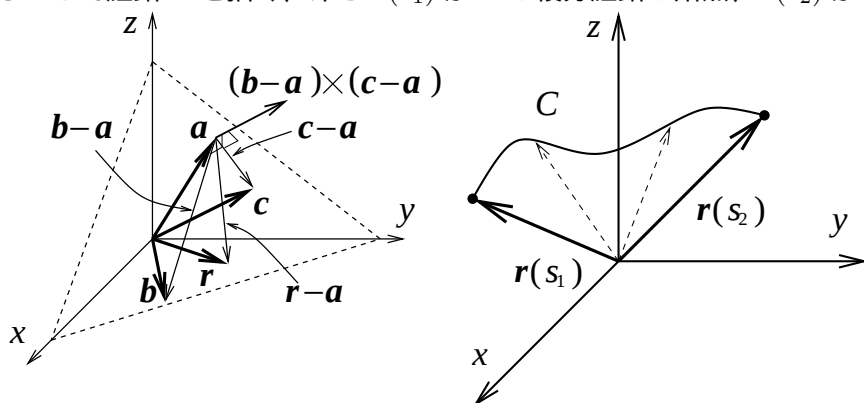


図 2.5: 3 つのベクトル a, b, c がつくる平面

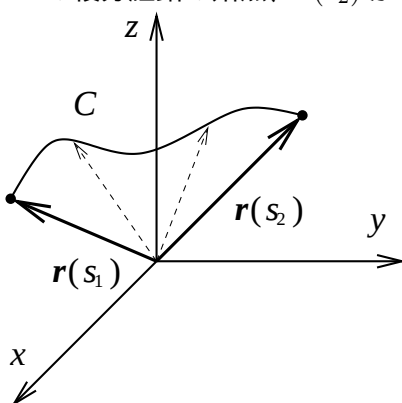


図 2.6: 経路を表すベクトル関数

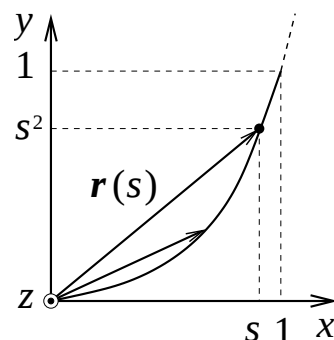


図 2.7: 例 2 の経路

なお、同じ経路を表すベクトル関数は一通りではなく、何通りも存在します。

以下の例のベクトル関数が示す経路を描いてみましょう。

例 1. $\mathbf{r}(s) = s\hat{x} + 2s\hat{y}, \quad 0 \leq s \leq 1$

例 2. $\mathbf{r}(s) = s\hat{x} + s^2\hat{y}, \quad 0 \leq s \leq 1$ (図 2.7 参照)

例 3. $\mathbf{r}(s) = 3\cos\psi\hat{x} + 3\sin\psi\hat{y}, \quad 0 \leq \psi \leq \pi$

例 4. $\mathbf{r}(s) = s\hat{x} + s\hat{y} + s\hat{z}, \quad 0 \leq s \leq 1$

例 1 については、 s はちょうど座標 x と一致しますので、 $\mathbf{r} = x\hat{x} + 2x\hat{y}, \quad 0 \leq x \leq 1$ というように、座標変数とパラメタを同じ記号にすると分かり易いと思います。

経路の表現法 実際の現象を解析するときは、上の例題とは逆で、“経路が与えられた時に、それを表すベクトル関数とパラメタの範囲を見つける”ことが必要となってきます。ベクトルの加減算などを用いて与えられた経路を見つけるのは多少の訓練が必要です。

- 経路が直線するとき 例えば始点が $\mathbf{a}$ 、終点が $\mathbf{b}$ とする。始点から終点に向かうベクトルは $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ 。従って、 $\mathbf{r}(s) = \mathbf{a} + s(\mathbf{b} - \mathbf{a}), 0 \leq s \leq 1$ とすると見つかります。ただし、それが分かりやすい表現とは限りません。
- 経路が円弧上るとき 角度をパラメタとした三角関数を使うと比較的簡単です。

経路を表す際の注意 経路を表す位置のベクトル関数を選ぶ際には、以下の注意点を守るようにしましょう。

- 始点から終点へと移動する際に、パラメタが増える方向に選ぶようにします。仮に選んだものが減る方向だったら、パラメタに負符号をつけるなどして下さい。
- うまくパラメタを選ばないと多価関数になってしまいます。(例: $x = y^2, -1 \leq y \leq 1$ となる経路は、①: $\mathbf{r}(s) = -s\hat{x} - \sqrt{-s}\hat{y}, -1 \leq s \leq 0$, ②: $\mathbf{r}(s) = s\hat{x} + \sqrt{s}\hat{y}, 0 \leq s \leq 1$ と二つに分ける必要がありますが、 $\mathbf{r}(s) = s^2\hat{x} + s\hat{y}, -1 \leq s \leq 1$ とすれば一つで十分です)
- 経路が滑らかでない場合 (折れている場合など)、一つのベクトル関数で表すことはできません。二つ以上のベクトル関数を用いて経路を表して下さい。

2.2.2 曲面を表すベクトル関数 $\mathbf{r}(u, v)$

2変数の位置ベクトル関数 $\mathbf{r}(u, v)$ は、パラメタ u, v がある範囲 ($u_1 \leq u \leq u_2, v_1 \leq v \leq v_2$) を独立に動くことで面を描きます(「独立に」というのは、 v を動かさずに u を動かしたりできる、という意味です)。この方法で様々な曲面を表現する方法をここでは勉強します。イメージとしては図 2.8 を参照して下さい。

u, v は独立して動きますが、範囲の上限、下限はどちらかに依存することがあります。例えば、 $u_1 \leq u \leq u_2, v_1(u) \leq v \leq v_2(u)$ という感じになったりします。

例 1. $\mathbf{r}(u, v) = u\hat{x} + v\hat{y} + \hat{z}, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 1 \leq v \leq 2$

例 2. $\mathbf{r}(u, v) = u\hat{x} + v\hat{y} + (1 - u - v)\hat{z}, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1 - u$

例 3. $\mathbf{r}(u, v) = 3\cos v \sin u\hat{x} + 3\sin v \sin u\hat{y} + 3\cos u\hat{z}, \quad 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$

例 3 は、 u は球座標系で用いる角度 θ 、 v は角度 ϕ と同一なので、 $\mathbf{r}(\theta, \phi) = 3\cos\phi \sin\theta\hat{x} + 3\sin\phi \sin\theta\hat{y} + 3\cos\theta\hat{z}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$ と書くイメージしやすいかと思います。

曲面が与えられたときに、それを表すベクトル関数とパラメタの範囲を見つけるには、結構な訓練が必要です。

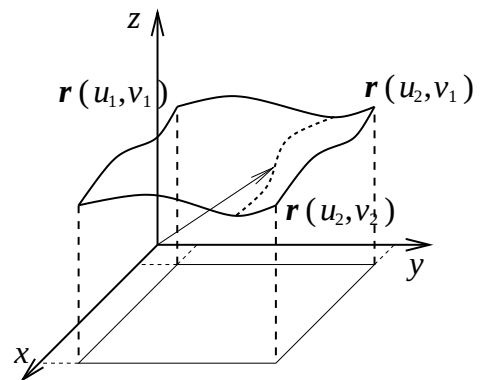


図 2.8: 曲面を表すベクトル関数

開曲面と閉曲面: 曲面が縁を持っている場合は開曲面と呼びます。曲面が閉じて縁を持たない場合を閉曲面と呼びます (図 2.9 参照)。

また、別の言い方をすると、次のようにも表せます。面には表裏の二面がありますが、面の片側の面からその裏側まで、その面自身を通過せずに移動できるものが開曲面、できないものが閉曲面です。 $r(\theta, \phi) = a \cos \phi \sin \theta \hat{x} + a \sin \phi \sin \theta \hat{y} + a \cos \theta \hat{z}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ は閉曲面を表し、半径 a の球面となります。

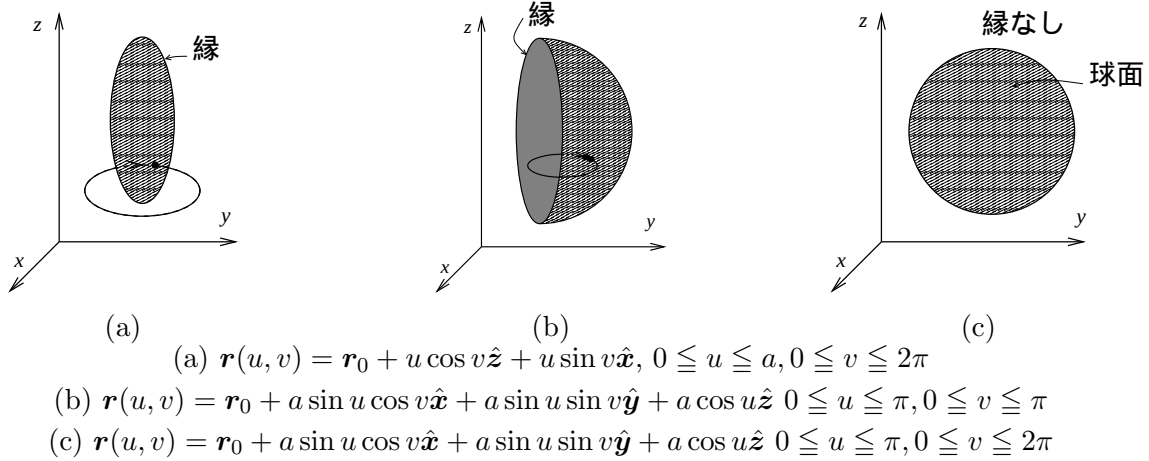


図 2.9: 開曲面 (左と中央) と閉曲面 (右)

2.2.3 体積 (領域) を表すベクトル関数 $r(u, v, w)$

三つのパラメタ (例えば u, v, w とする) を持つ位置ベクトル $r(u, v, w)$ と、三つのパラメタの範囲を与えることで、体積 (領域) を設定することができます。

u, v, w が独立に動くこと、またその動く範囲の上限・下限については他の変数に依存する可能性があることは、表面の場合と同じです。

例 1: $r(u, v, w) = u \hat{x} + v \hat{y} + w \hat{z}$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$, $0 \leq w \leq 1$ は、一辺が 1 の立方体を表し、その頂点は $0, \hat{x}, \hat{y}, \hat{x} + \hat{y}, \hat{z}, \hat{x} + \hat{z}, \hat{y} + \hat{z}, \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$ にあります。この例ではパラメタ (u, v, w) はデカルト座標系 (x, y, z) に対応するので、 $r(x, y, z) = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ と書くとイメージし易いかと思います。

例 2: $r(u, v, w) = u \cos w \sin v \hat{x} + u \sin w \sin v \hat{y} + u \cos v \hat{z}$ とし、 $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi, 0 \leq w \leq 2\pi$ の範囲にあるとき、この位置ベクトル $r(u, v, w)$ は原点を中心とする半径 1 の球の領域を表します。この例では、パラメタ (u, v, w) は球座標系の (r, θ, ϕ) に対応しますので、 $r(r, \theta, \phi) = r \cos \phi \sin \theta \hat{x} + r \sin \phi \sin \theta \hat{y} + r \cos \theta \hat{z}$ とし、 $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ と書くと、イメージし易いかと思います。

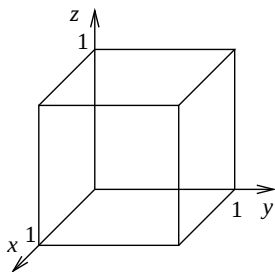


図 2.10: 例 1 のベクトル関数が表現する体積

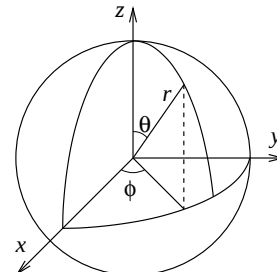
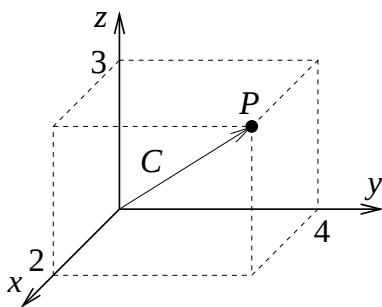
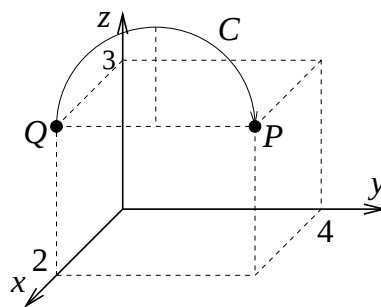
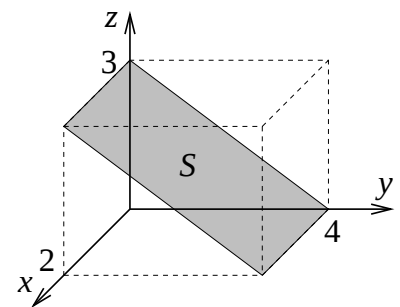
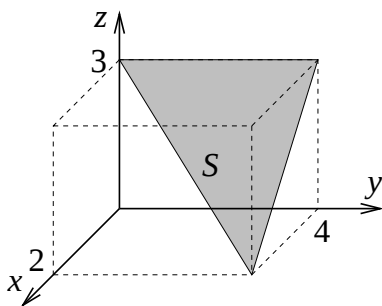
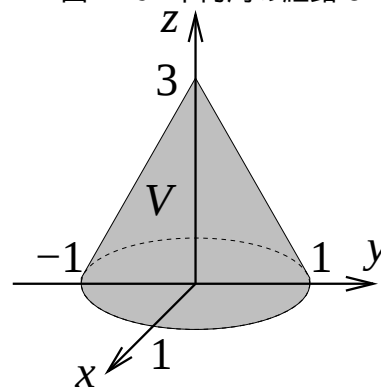
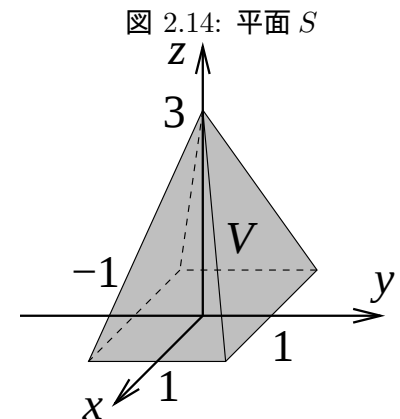


図 2.11: 例 2 のベクトル関数が表現する体積

2.2.4 演習問題

- (1) 図 2.12 に示す、原点から点 P までの経路 C を表すベクトル関数を求めよ。また、パラメタの範囲も示せ。経路 C は直線である。
- (2) 図 2.13 に示す、 Q 点から点 P までの経路 C を表すベクトル関数を求めよ。また、パラメタの範囲も示せ。経路 C は半円周である。
- (3) 図 2.14 に示す、四点を結ぶ平面 S を表すベクトル関数を求めよ。また、パラメタの範囲も示せ。
- (4) 図 2.15 に示す、三点を結ぶ平面 S を表すベクトル関数を求めよ。また、パラメタの範囲も示せ。
- (5) 図 2.16 に示す、円錐の体積領域 V を表すベクトル関数を求めよ。また、パラメタの範囲も示せ。
- (6) 図 2.17 に示す、四角錐の体積領域 V を表すベクトル関数を求めよ。また、パラメタの範囲も示せ。

図 2.12: 直線の経路 C 図 2.13: 半円周の経路 C 図 2.14: 平面 S 図 2.15: 平面 S 図 2.16: 体積領域 V 図 2.17: 体積領域 V

2.3 座標系

3次元空間の任意の一点は、3個の独立なパラメタ (=座標と呼びます) で一意に指定できます (「一意」とは一通りという意味です。多少の例外を除き、一点を表す座標は一通りしかありません)。この三つの座標の組み合わせを座標系と呼びます。以下では、3次元空間を表す、最も有名な3つの座標系について説明します。

2.3.1 デカルト座標系 (直角座標系)

基本単位ベクトルとして $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ を用います。

(x_0, y_0, z_0) の座標の点は、位置ベクトル r_0 を基本単位ベクトルを使って $r_0 = x_0\hat{x} + y_0\hat{y} + z_0\hat{z}$ と表すことができます。

前回も言いましたが、「 $+x$ 軸方向から $+y$ 軸方向に回転するとき、その回転で『右ねじ』の進む方向を $+z$ 方向とする」ものを右手座標系と呼びます (何も断りがなければ右手座標系を用います。逆の左手座標系を使うと間違えますので気を付けて下さい)。まずは、 $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ を覚えるのが基本です。

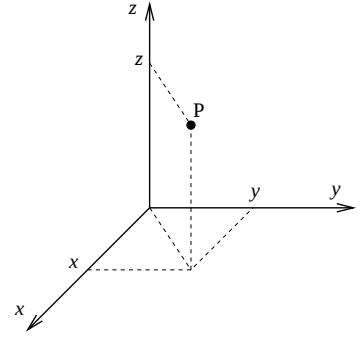


図 2.18: デカルト座標系

2.3.2 円筒座標系 (円柱座標系)

ある点を表す三つのパラメタとして ρ, ϕ, z を用います。

- ρ : xy 平面 ($z = 0$ の面) に射影したとき、その射影した点と原点との距離を ρ とします。
- ϕ : $+x$ 軸と ρ を測った方向との角度を ϕ とします。 $+x$ 軸から $+y$ 軸に回転する方向を正にとります。
- z : デカルト座標と同じ。 z 軸に降ろした (射影した) 位置が z 座標。

三次元空間全体を表すとき、各パラメタの取り得る範囲は、 $\rho : 0 \sim \infty, \phi : 0 \sim 2\pi, z : -\infty \sim \infty$ となります。

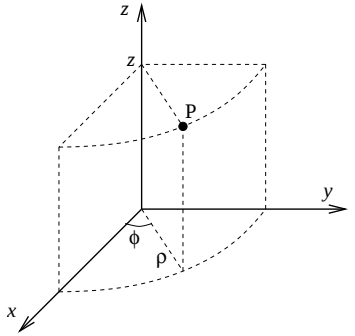


図 2.19: 円筒座標系

円筒座標系の各座標と、デカルト座標系の各座標の関係は以下の通りになります。

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z \quad (2.7)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad z = z \quad (2.8)$$

基本単位ベクトル $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$ は、「ある点における、ある座標方向の基本単位ベクトルの方向」は、「他の 2 座標を固定して、その座標だけを微小に増やしたときの移動方向」になります。図 2.20 のように、P 点における $\hat{\rho}$ の方向は、 ϕ, z を一定として、 ρ を増やす方向です。

デカルト座標系の基本単位ベクトルを用いると以下のように表せます (図 2.21 参照)。

$$\hat{\rho} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}, \quad \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}, \quad \hat{z} = \hat{z} \quad (2.9)$$

基本ベクトル間の関係として、 $\hat{\rho} \times \hat{\phi} = \hat{z}$ があり、これも巡回的に成立します ($\hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{\rho}, \hat{z} \times \hat{\rho} = \hat{\phi}$)。

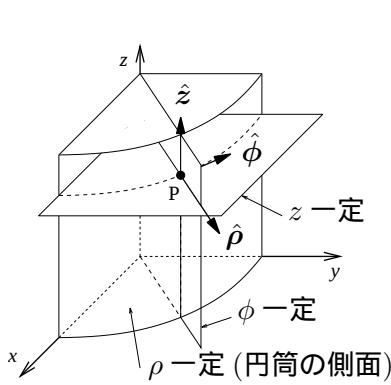


図 2.20: 円筒座標系の基本単位ベクトル

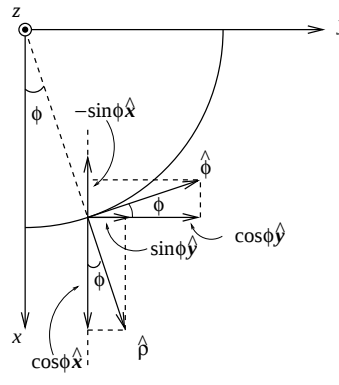


図 2.21: 円筒座標系とデカルト座標系の基本単位ベクトルの関係 1

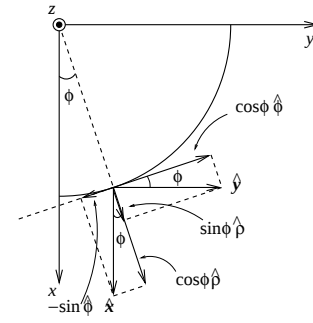


図 2.22: 円筒座標系とデカルト座標系の基本単位ベクトルの関係 2

円筒座標系の基本単位ベクトルは、「どの点を基準にして基本単位ベクトルを定めるか」によって方向が異なります。例えば、 $\phi = 0$ の位置を基準とした基本単位ベクトル $\hat{\rho}$ は $\hat{\rho} = \hat{x}$ となりますが、 $\phi = \frac{\pi}{2}$ なら $\hat{\rho} = \hat{y}$ となります。これがデカルト座標系との最も大きな違いです。基本単位ベクトル $\hat{\rho}, \hat{\phi}$ は、基準にする座標 ϕ に依存しますので、正確には $\hat{\rho}(\phi), \hat{\phi}(\phi)$ と書くべきなのですが、省略されることが多いです。

逆に、デカルト座標系の基本単位ベクトルを、円筒座標系のそれを用いて表現すると以下となります (図 2.22 参照)。

$$\hat{x} = \cos \phi \hat{\rho} - \sin \phi \hat{\phi}, \quad \hat{y} = \sin \phi \hat{\rho} + \cos \phi \hat{\phi}, \quad \hat{z} = \hat{z} \quad (2.10)$$

(ρ_0, ϕ_0, z_0) の座標の点の位置ベクトルを r_0 とします。 r_0 を基本単位ベクトルと座標を使って表現すると、 $r_0 = \rho_0 \hat{\rho}(\phi_0) + z_0 \hat{z}$ となります ($r_0 = \rho_0 \hat{\rho}(\phi_0) + \phi_0 \hat{\phi}(\phi_0) + z_0 \hat{z}$ とかではありませんので、気を付けて下さい。しかも、 ϕ_0 は長さの単位を持ってはいませんので、このベクトルの式自体が「あり得ない」ものです。ただし、 ϕ_0 の前に長さ 1 がかけられている場合は長さの単位になりますのであり得ます)。

ϕ_0 以外を基準にした基本単位ベクトルを用いたとき、 $\hat{\rho}, \hat{\phi}$ が異なるので、同じ座標でも表現が異なります。また、座標各点毎に基本単位ベクトルが変わる形で用いることがあります (むしろこちらが一般的)。つまり、 (ρ, ϕ, z) の点において、基本単位ベクトルは $\hat{\rho}(\phi), \hat{\phi}(\phi), \hat{z}$ となります。見て分かる通り、 ρ, z には依存しませんので、 ϕ が同じなら同じベクトルになります。

例 1. $\phi = 0$ を基準としたときの円筒座標系の基本単位ベクトルは $\hat{\rho} = \hat{x}, \hat{\phi} = \hat{y}$ となります。

例 2. $\phi = \frac{\pi}{6}$ を基準としたときの円筒座標系の基本単位ベクトルは $\hat{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{y}, \hat{\phi} = -\frac{1}{2} \hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{y}$ となります。

例 3. $\phi = \frac{\pi}{2}$ を基準としたときの円筒座標系の基本単位ベクトルは $\hat{\rho} = \hat{y}, \hat{\phi} = -\hat{x}$ となります。

例 4. $a = 3\hat{x} + 4\hat{y} + 5\hat{z}$ は、 $\phi = 0$ を基準にした $\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z}$ を用いると、 $a = 3\hat{\rho}(0) + 4\hat{\phi}(0) + 5\hat{z}$ と表せます。また、 $\phi = \frac{\pi}{6}$ を基準とした基本単位ベクトルを用いると $a = (\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2)\hat{\rho}(\frac{\pi}{6}) + (-\frac{3}{2} + 2\sqrt{3})\hat{\phi}(\frac{\pi}{6}) + 5\hat{z}$ と表せます。また、 $\phi = \tan^{-1} \frac{4}{3} = \alpha$ を基準にした基本単位ベクトルを用いると $a = 5\hat{\rho}(\alpha) + 5\hat{z}$ と表せます。

2.3.3 球座標系

球座標系はある点を表す三つのパラメタとして r, θ, ϕ を用います。以下が定義です。

- r : ある点と原点との距離です。
- θ : r を測る方向と z 軸とのなす角です。+ z 軸から $-z$ 軸の方向に正となります。
- ϕ : ある点から xy 平面に射影したとき、原点からその射影した点との方向と x 軸との角度が ϕ (円筒座標系と同じ) と定義されます。

r, θ, ϕ のそれぞれの座標が取り得る値としては、 $r: 0 \sim \infty, \theta: 0 \sim \pi, \phi: 0 \sim 2\pi$ となります。
他の座標系との関係は以下の通りになります。

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta, \quad (2.11)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad (2.12)$$

$$\rho = r \sin \theta, \quad \phi = \phi, \quad z = r \cos \theta, \quad (2.13)$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{\rho^2 + z^2}}{z}, \quad \phi = \phi \quad (2.14)$$

各基本単位ベクトル $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ は以下となります。

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}, \quad (2.15)$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}, \quad (2.16)$$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \quad (2.17)$$

基本ベクトル間の関係として、 $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\phi}$ があり、これも巡回的に成立します ($\hat{\theta} \times \hat{\phi} = \hat{r}, \hat{\phi} \times \hat{r} = \hat{\theta}$)。

また、デカルト座標系の基本単位ベクトルは、球座標系のそれを用いて以下のように表せます。

$$\hat{x} = \sin \theta \cos \phi \hat{r} + \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \sin \phi \hat{\phi}, \quad (2.18)$$

$$\hat{y} = \sin \theta \sin \phi \hat{r} + \cos \theta \sin \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi}, \quad (2.19)$$

$$\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \quad (2.20)$$

上で分かる通り、 $\hat{r}, \hat{\theta}$ は θ, ϕ に依存しますし、 $\hat{\phi}$ は ϕ に依存しますので、 $\hat{r}(\theta, \phi), \hat{\theta}(\theta, \phi), \hat{\phi}(\phi)$ と書くべきですが、通常は変数は省略されています。どこの θ, ϕ を基準とした基本単位ベクトルなのか、注意して下さい。

2.3.4 色々な座標系を使う理由

(例えば球のような) 対称性のよい特殊な構造があったときの物理現象では、物理量がある座標変数に依存しないことがよくあります。例えば、 z 軸に沿って流れる無限長電流がつくる静磁場は、 z 軸に依存しません。

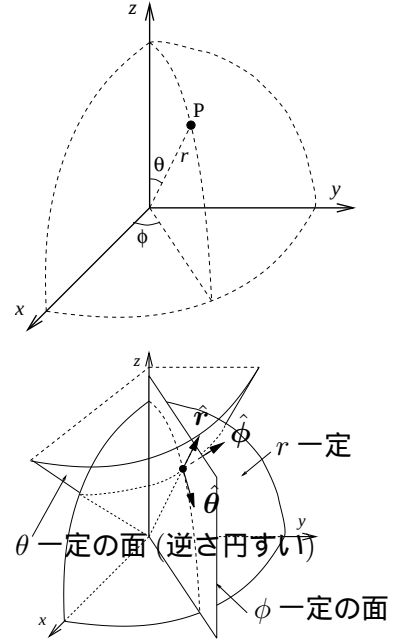
このようなときは、その依存しない座標変数を考える必要はありませんし、物理量はその座標の関数にならずに、他の座標のみに依存することになります。これを使用する変数が少なくなることから“次元の低下”と呼びましょう。

次元の低下が起こる場合は、二次元または一次元の問題に帰着し、問題を解く (電磁場を求める) ことが格段に易しくなることが多いです。つまり、デカルト座標系では三つの座標で解かなければいけない場合でも、球座標系であれば一つの座標で解くことができるようになります。いくつかの電磁場の問題は球対称や軸対称の構造をしていることが多く、これが色々な座標系を使う理由です。

一例として、「真空中において、原点に電荷 Q [C] があるときの $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ における電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 」と考えます。このとき、デカルト座標系を用いたときと、球座標系を用いたときの表記は以下となります。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)} \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (2.21)$$

見ての通り、球座標系では単位ベクトルは一つしか現れず、簡単な表記となっていることが分かります。ここでの $\hat{r}$ は、固定した点を基準にしたものでなく、電界を求めるその点 (各点) を基準としたものであることに注意して下さい。



2.4 ベクトル関数の積分

この節では、電磁気学においてよく現れるベクトルの微積分について説明します。特に、以下のベクトルの積分と体積積分については詳細に説明します。

$$\textcircled{1} : \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \quad \textcircled{2} : \iint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}, \quad \textcircled{3} : \iiint_V \phi(\mathbf{r}) dV, \quad \iiint_V \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV, \quad (2.22)$$

2.4.1 単なる微積分

ベクトル関数は微積分できます。基本単位ベクトルが変数に依存しなければ、各成分を微積分するだけでOKです。即ち、 $\mathbf{A}(x, y, z) \equiv \mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x(\mathbf{r})\hat{\mathbf{x}} + A_y(\mathbf{r})\hat{\mathbf{y}} + A_z(\mathbf{r})\hat{\mathbf{z}}$ のとき、

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{\mathbf{z}} \quad (2.23)$$

$$\int \mathbf{A} dx = \left(\int A_x dx \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\int A_y dx \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\int A_z dx \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (2.24)$$

となります。

基本単位ベクトルが変数に依存するような場合、つまり円筒座標系や球座標系のような場合は、依存性に気をつけて微積分する必要があります。すごくややこしくなる場合もありますが、デカルト座標系に直して積分するののも一つの方法です。

2.4.2 ベクトルの経路方向成分の線積分

線素 dr と線素ベクトル $d\mathbf{r}$

s をパラメタとするベクトル関数 $\mathbf{r}(s)$ を考えます。 s がある値 (それを s とします) をとって、そこから s を微小に (ds だけ) 増やしたとき、ベクトル関数 $\mathbf{r}(s)$ の先端は微小に移動します。この移動距離を dr とし、移動した変位ベクトル (移動前の点から移動後の点を指すベクトル) を $d\mathbf{r}$ と書きます (図 2.23 参照)。この dr を線素、 $d\mathbf{r}$ を線素ベクトルと呼びます。

このベクトル関数 $\mathbf{r}(s)$ を、デカルト座標系の表示で

$$\mathbf{r}(s) = X(s)\hat{\mathbf{x}} + Y(s)\hat{\mathbf{y}} + Z(s)\hat{\mathbf{z}} \quad (2.25)$$

と書いたとします。 $X(s)$, $Y(s)$, $Z(s)$ はそれぞれ s を独立変数とする関数です。 s を微小に ds だけ増やしたとき、 $X(s)$, $Y(s)$, $Z(s)$ は $dX = \frac{dX}{ds} ds$, $dY = \frac{dY}{ds} ds$, $dZ = \frac{dZ}{ds} ds$ だけ増えますので、線素ベクトルは

$$d\mathbf{r}(s) = \frac{dX}{ds} ds \hat{\mathbf{x}} + \frac{dY}{ds} ds \hat{\mathbf{y}} + \frac{dZ}{ds} ds \hat{\mathbf{z}} \quad (2.26)$$

となります。ここで、 $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dX}{ds} \hat{\mathbf{x}} + \frac{dY}{ds} \hat{\mathbf{y}} + \frac{dZ}{ds} \hat{\mathbf{z}}$ ですので、微小変位ベクトルは $d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds$ と書けます。もちろん dr は s の関数です ($dr(s)$ と書く方が正確と言えます)。

線素 dr は、線素ベクトル $d\mathbf{r}$ の大きさなので $dr = |d\mathbf{r}|$ から計算できます。

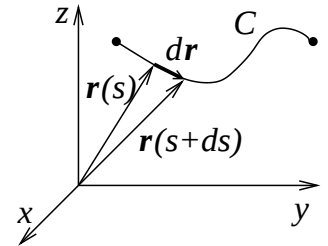


図 2.23: 線素ベクトル

ベクトル場の経路方向線積分

ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ が存在するとき、経路 C にわたる経路方向成分の線積分 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ を考えます。

パラメタ s のある値 (それを s とします) で位置 $\mathbf{r}(s)$ の、ベクトル場の値は $\mathbf{A}(\mathbf{r}(s)) = \mathbf{A}(x(s), y(s), z(s))$ となります。これと線素ベクトルの内積 $\mathbf{A}(\mathbf{r}(s)) \cdot d\mathbf{r}(s)$ との内積をとり (内積をとるということは、その演算結果は当然スカラーになります)、それを経路全体にわたって集めることで線積分となります。

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}(s)) \cdot d\mathbf{r}(s) \quad (2.27)$$

s_1 が経路の始点、 s_2 が経路の終点に相当し、 s_1 から s_2 には s が大きくなる方向にとる必要があることに注意して下さい。

例 1. ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = xy^2\hat{x} + y^2\hat{y} + z\hat{z}$ を、図 2.24 に示す経路 C に沿って線積分せよ、即ち $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ を計算せよ。

(解) 経路 C はパラメタ s を用いて、 $\mathbf{r}(s) = \hat{x} + s\hat{y} + \hat{z}$, $0 \leq s \leq 1$ と書けます。このときの線素ベクトル (つまり、 s が微小 ds だけ増えたときの $\mathbf{r}$ の先端の移動ベクトル) は $d\mathbf{r} = ds\hat{y}$ となります ($\mathbf{r}$ は x, z 成分を持っていますが、 $d\mathbf{r}$ は y 成分だけです。 s を増やしたとき、 $\mathbf{r}$ の先端の移動ベクトルがどちら向きか、考えてみてください)。

$\mathbf{r}(s)$ の x 成分は 1、 y 成分は s 、 z 成分は 1 ですから、 $\mathbf{r}(s)$ の位置におけるベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ の値 $\mathbf{A}(\mathbf{r}(s))$ は、 x に 1、 y に s 、 z に 1 を代入して、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(s)) = s^2\hat{x} + s^2\hat{y} + \hat{z} \quad (2.28)$$

となります。つまり、パラメタ s で指定できる C 上の点における、ベクトル場 $\mathbf{A}$ の値であり、 s を用いた表現法です。

次に、ベクトル場と線素ベクトルとの内積をとります。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(s)) \cdot d\mathbf{r} = \{s^2\hat{x} + s^2\hat{y} + \hat{z}\} \cdot (ds\hat{y}) = s^2 ds \quad (2.29)$$

これが、 $\mathbf{r}(s)$ の点から、(s を ds だけ増やしたときの変位のベクトル) $d\mathbf{r}(s)$ だけ経路に沿って移動したときの量となります。

これを $0 \leq s \leq 1$ の範囲で集めます。即ち、積分します。

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{A}(\mathbf{r}(s)) \cdot d\mathbf{r}(s) = \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3} \quad (2.30)$$

これで、経路 C に沿ったベクトル場の線積分の値が得られました。

例 2. ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = xy^2\hat{x} + y^2\hat{y} + z\hat{z}$ を、図 2.24 と逆向きの経路 C' に対して、 $\int_{C'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ を計算せよ。

(解) 上の問題と逆の経路になりますので、解は $-\frac{1}{3}$ と予想できます。ここではあえて、同じようにして計算をしてみます (パラメタをどう選ぶかの練習になります)。

経路 C' の方向に、「パラメタが増える」ように選ぶ必要があるため、例えば経路 C' は $\mathbf{r}(s) = \hat{x} - s\hat{y} + \hat{z}$, $-1 \leq s \leq 0$ などと選ぶ必要があります。あるいは、 $\mathbf{r}(s) = \hat{x} + (1-s)\hat{y} + \hat{z}$, $0 \leq s \leq 1$ などと選んでも OK です。どちらも同じ答えがでます。

計算は各自でやってみて下さい。

例 3. ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = y^2x\hat{x} + axy\hat{y} + z\hat{z}$ を、図 2.25 に示す半円周の経路 C に対して、 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ を計算せよ。

(解) 円周の経路ですので、三角関数を用いて経路を表すのが簡単です。図 2.25 の角度 θ を用いると、始点が $\theta = \pi$ 、終点が $\theta = 0$ となり、経路の方向に沿ってパラメタが減ってしまうこととなります。そこで、 x 軸の負方向からの角度 $\xi = \pi - \theta$ を用いて表記するようにしましょう。

$$\mathbf{r}(\xi) = a \cos \theta \hat{x} + a \sin \theta \hat{y} = a \cos(\pi - \xi) \hat{x} + a \sin(\pi - \xi) \hat{y} = -a \cos \xi \hat{x} + a \sin \xi \hat{y} \quad (2.31)$$

従って、線素ベクトルは $d\mathbf{r} = (a \sin \xi \hat{x} + a \cos \xi \hat{y}) d\xi$ となります。

この位置ベクトルで表される経路 C 上のベクトル場 $\mathbf{A}$ は、 $x = -a \cos \xi$, $y = a \sin \xi$, $z = 0$ を代入して、

$$\mathbf{A} = a^2 \sin^2 \xi (-a \cos \xi) \hat{x} + a(-a \cos \xi) a \sin \xi \hat{y} = -a^3 (\sin^2 \xi \cos \xi \hat{x} + \sin \xi \cos \xi \hat{y}) \quad (2.32)$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^\pi -a^3 (\sin^2 \xi \cos \xi \hat{x} + \sin \xi \cos \xi \hat{y}) \cdot (a \sin \xi \hat{x} + a \cos \xi \hat{y}) d\xi \\ &= -a^4 \int_0^\pi \{\sin^3 \xi \cos \xi + \cos^2 \xi \sin \xi\} d\xi = a^4 \int_0^\pi \{(1 - \cos^2 \xi) \cos \xi + \cos^2 \xi\} (-\sin \xi) d\xi \\ &= a^4 \int_1^{-1} \{(1 - t^2)t + t^2\} dt = a^4 \int_{-1}^1 \{t^3 - t^2 - t\} dt = -\frac{2}{3}a^4 \end{aligned} \quad (2.33)$$

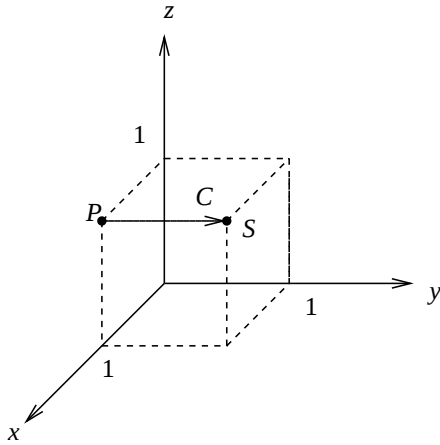


図 2.24: 例1の経路

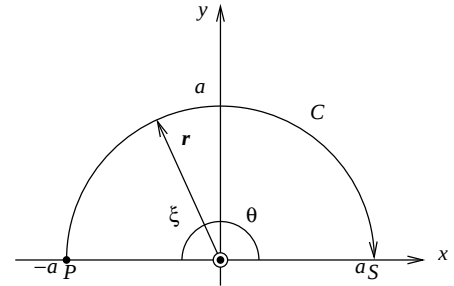


図 2.25: 例3の半円周の経路

例4. 実際への応用例 … 電界中で電荷を移動するときの仕事: 原点に1 Cの電荷があるとき、 $z = 0$ の面内では電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{x} + y\hat{y}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ ができる。この電界中で電荷 q [C] を、経路 $\mathbf{r} = s\hat{x} + (1 + 2s)\hat{y}$, $0 \leq s \leq 1$ に沿って動かすときに要する仕事を考える。

[考え方] 力学で勉強した仕事の定義として、「仕事は、質量をもつ物体に力を加えて移動させたときの、“移動方向距離”と“力の移動方向成分”の積」となります。力の方向が変わったりしたら、それぞれの合計をとります。そこで、電界中の電荷にはどれだけ力をかける必要があるかを考えます。

電荷は電界によって力を受けますので、支えてあげないと飛んでいってしまいます。一方で、静止している電荷に、受ける力と逆向きに同じ力をかければ合力は0となりますので、静止したままです。あとは力は必要ありません(仕事をしなくてよい)ので、そのまま移動すればOKです。

[定式化 = 解析] 今、動かしている電荷が、経路 C 上のある位置にあり、その位置を表すパラメタを s とします。このとき、位置ベクトルは一例として $\mathbf{r}(s) = x(s)\hat{x} + y(s)\hat{y} = s\hat{x} + (1 + 2s)\hat{y}$ と書けます。この位置ベクトルで表される点の電界は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}(s)) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x(s)\hat{x} + y(s)\hat{y}}{[\{x(s)\}^2 + \{y(s)\}^2]^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{s\hat{x} + (1 + 2s)\hat{y}}{\{s^2 + (1 + 2s)^2\}^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{s\hat{x} + (1 + 2s)\hat{y}}{(5s^2 + 4s + 1)^{3/2}} \quad (2.34)$$

となります。この点では電界に $q\mathbf{E}(\mathbf{r}(s))$ だけの力がかかるので、 $-q\mathbf{E}(\mathbf{r}(s))$ の力をかけながら動かす必要があります。

この点から、経路上に微小な距離だけ動かすベクトルは線素ベクトル $d\mathbf{r}$ で表すことができますので、 $d\mathbf{r} = \left\{ \frac{dx(s)}{ds} \hat{x} + \frac{dy(s)}{ds} \hat{y} \right\} ds = (\hat{x} + 2\hat{y}) ds$ となります。この距離だけ動かしたときの微小な仕事 dW は

$$dW = -q\mathbf{E}(\mathbf{r}(s)) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{s\hat{x} + (1 + 2s)\hat{y}}{(5s^2 + 4s + 1)^{3/2}} \cdot (\hat{x} + 2\hat{y}) ds = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{5s + 2}{(5s^2 + 4s + 1)^{3/2}} ds \quad (2.35)$$

経路全体で動かしたときの仕事は、上記の微小仕事 dW を経路全体 ($0 \leq s \leq 1$) にわたって集めればよいので

$$W = \int dW = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \frac{5s+2}{(5s^2+4s+1)^{\frac{3}{2}}} ds \quad (2.36)$$

という積分を行えばよいことになります (定式化終了。これ以降は数学、というより単なる計算です)。

$t = 5s^2 + 4s + 1$ と積分変換すると、 $dt = 2(5s+2)ds$ であり、 $s: 0 \rightarrow 1$ において、 $t: 1 \rightarrow 10$ より、

$$-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \frac{5s+2}{(5s^2+4s+1)^{\frac{3}{2}}} ds = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_1^{10} \frac{1}{2} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{10}}\right) \quad (2.37)$$

従って、 $W = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ を得ます。

2.4.3 ベクトルの法線方向成分の面積分

二つのパラメタ u, v を持つ位置ベクトル関数 $\mathbf{r}(u, v)$ が、 u, v がある範囲を動くことで面 S を表しているものとします。

この面 S について、あるベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ を以下の式で面積分することを考えます。

$$\iint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.38)$$

面素ベクトル $d\mathbf{S}$

式 (2.38) の最後の $d\mathbf{S}$ を面素ベクトルと呼びます。面素ベクトル $d\mathbf{S}$ は、積分する面上において、微小面積を大きさに持ち、その向きは面に直角です。

ある u において、 v を動かさずに u を微小に増やしたときの変位ベクトルは $\partial_u \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du$ となります。逆に u を動かさずに v を微小に増やしたときは変位ベクトルは $\partial_v \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv$ となります。 $d\mathbf{S}$ はこれらの外積を用いて以下のように書けます (図 2.26 参照)。

$$d\mathbf{S} = \partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} du dv \quad (2.39)$$

例: $\mathbf{r}(\theta, \phi) = a \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + a \sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + a \cos \theta \hat{\mathbf{z}}$ とする (θ, ϕ は何らかの範囲を持っている)。

$$d\mathbf{S} = \partial_\theta \mathbf{r} \times \partial_\phi \mathbf{r} = a^2 \sin \theta d\theta d\phi (\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}) = a^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}}(\theta, \phi).$$

注意: ここで、外積の順序と面積分したい向きに注意して下さい。逆の場合は $d\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du dv$ とすれば OK です。

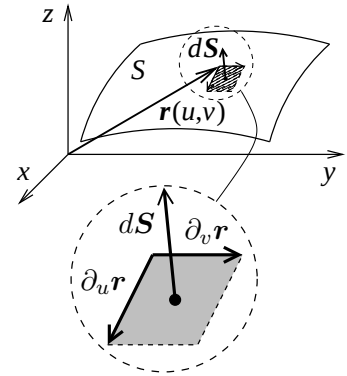


図 2.26: 面素ベクトル

面積分

面積分 $\iint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$ は、面積分する表面を表すベクトル関数 $\mathbf{r}(u, v)$ と、それによってできた面素ベクトル $d\mathbf{S} = \partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}$ によって、以下で計算できます。

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} du dv \quad (2.40)$$

例1. 図2.27に示す影 S を表すベクトル関数とその範囲を求め、ベクトル場 $A(\mathbf{r}) = x\hat{x} + y\hat{y} + x^2yz\hat{z}$ に対して、 $\iint_S A \cdot d\mathbf{S}$ を求めよ。ただし、 $d\mathbf{S}$ の向きは $+z$ 方向とする。

(解) 面 S は、 $\mathbf{r}(x, y) = x\hat{x} + y\hat{y} + \hat{z}$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ と表現できます。このとき、 $\partial_x \mathbf{r} = dx\hat{x}$, $\partial_y \mathbf{r} = dy\hat{y}$ となりますので、 $d\mathbf{S} = \partial_x \mathbf{r} \times \partial_y \mathbf{r} = dx dy \hat{x} \times \hat{y} = dx dy \hat{z}$ を得ます。また、ベクトル関数で表される $\mathbf{r}(x, y)$ の点におけるベクトル場は $(x, y, 1)$ を代入して $A(\mathbf{r}(x, y)) = x\hat{x} + y\hat{y} + x^2yz\hat{z}$ となります。従って、

$$\iint_S A \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 (x\hat{x} + y\hat{y} + x^2yz\hat{z}) \cdot \hat{z} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 x^2y dx dy = \frac{1}{6} \quad (2.41)$$

例2. 図2.28(a)に示す影の面 S を表すベクトル関数とその範囲を求め、ベクトル場 $A(\mathbf{r}) = x\hat{x} + y\hat{y} + x^2yz\hat{z}$ に対して、 $\iint_S A \cdot d\mathbf{S}$ を求めよ。ただし、 $d\mathbf{S}$ の向きは $+z$ 方向とする。

☞ 積分する面は例1の半分となっているが、積分結果は $\frac{1}{2}$ となりますでしょうか？予想を立ててから次を読んでみて下さい。

(解) 面 S を表すベクトル関数は $\mathbf{r}(x, y) = x\hat{x} + y\hat{y} + \hat{z}$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$ と表現できます。ここで、 y の範囲が x に依存することに注意して下さい。図を見ればわかる通り、ある x を考えたとき、 y の範囲は x によって変わることが分かります(図2.28(b))。また、この際には、 y を先に積分してから x について積分する必要があります。従って、

$$\iint_S A \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^x (x\hat{x} + y\hat{y} + x^2yz\hat{z}) \cdot \hat{z} dy dx = \int_0^1 \int_0^x x^2y dy dx = \frac{1}{10} \quad (2.42)$$

例3. 上の例2において、「先に x について積分する」ことを考えます。このとき、ある y についての x の積分範囲を考えますと、面 S を表すベクトル関数とそのパラメタの範囲は $\mathbf{r}(x, y) = x\hat{x} + y\hat{y} + \hat{z}$, $y \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ と表現できます(図2.28(c))。従って、

$$\iint_S A \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_y^1 (x\hat{x} + y\hat{y} + x^2yz\hat{z}) \cdot \hat{z} dx dy = \int_0^1 \int_y^1 x^2y dx dy = \frac{1}{10} \quad (2.43)$$

となり、同じ積分値が得られていることが分かります。

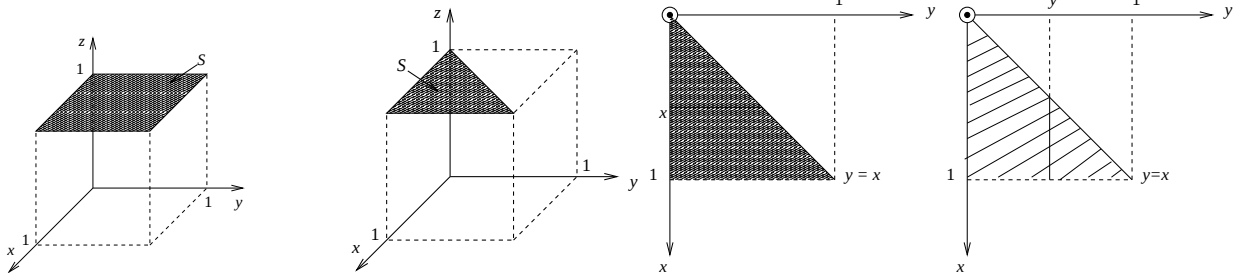


図 2.27: 例1の積分範囲

(a) 積分範囲 (b) y を先に積分 (c) x を先に積分

図 2.28: 三角形の積分範囲。積分範囲が他のパラメタに依存する。

例4. 電界 $E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ が出来ている空間を考える。この電界 $E(\mathbf{r})$ に対し、半径 a の球

面 S 上で $\oiint_S E(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$ を計算せよ。

(解) 半径 a の球面 S は $\mathbf{r}(\theta, \phi) = a \cos \phi \sin \theta \hat{x} + a \sin \phi \sin \theta \hat{y} + a \cos \theta \hat{z}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ で表せます。したがって、面素ベクトル $d\mathbf{S}$ は $d\mathbf{S} = a^2 \sin \theta d\theta d\phi (\sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z})$ となります。また、パラメタ (θ, ϕ) のときの位置 $\mathbf{r}(\theta, \phi)$ における電界は、 $x(\theta, \phi) = a \cos \phi \sin \theta$, $y(\theta, \phi) = a \sin \phi \sin \theta$, $z(\theta, \phi) = a \cos \theta$

となりますので、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + a \sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + a \cos \theta \hat{\mathbf{z}}}{(\{a \cos \phi \sin \theta\}^2 + \{a \sin \phi \sin \theta\}^2 + \{a \cos \theta\}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^2} \{\cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}\} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{S} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^2} \{\cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}\} \bullet a^2 \sin \theta d\theta d\phi (\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}) \\ &= \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} d\theta d\phi \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} d\theta d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \cdot 2 = \frac{1}{\epsilon_0} \quad (2.46)$$

上の計算結果は、のちに勉強する「ガウスの法則」の確認になります。ガウスの法則は、「真空中では、 $\oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{S}$ の積分結果は、その表面 S 内の領域に含まれる電荷 Q の $1/\epsilon_0$ 倍となる」ということです。今回は半径 a [m] の球内には 1 C の電荷が存在していますので、積分結果が $\frac{1}{\epsilon_0}$ になりました。もちろん、閉曲面 S の形がどんなものでも、電荷のある点 (今回は原点) を含みさえすれば、同じ積分結果となります。

2.4.4 体積積分

三つのパラメタ u, v, w を持つ位置ベクトル関数 $\mathbf{r}(u, v, w)$ において、各パラメタがある範囲を動くことで領域 V を表しているものとします。このとき、スカラー場 $\varphi(\mathbf{r})$ に対して、次式の領域 V での体積積分を考えます。

$$\iiint_V \varphi(\mathbf{r}) dV \quad (2.47)$$

体積要素 dV

式 (2.47) の最後にある dV を体積要素と呼びます。

体積要素 dV は各パラメタ u, v, w を微小に増加させたときの、微小変位ベクトル $\partial_u \mathbf{r}, \partial_v \mathbf{r}, \partial_w \mathbf{r}$ のスカラー三重積で表せます：

$$dV = \partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r} \bullet \partial_w \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} du dv dw \quad (2.48)$$

ここで、ベクトル三重積の結果が負とならないように選ぶ必要があります。あるいは絶対値をとっても OK でしょう。

例： $\mathbf{r}(r, \theta, \phi) = r \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + r \sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + r \cos \theta \hat{\mathbf{z}}$ とすると、体積要素は次のようにして求められます。

$$\partial_r \mathbf{r} = (\cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}) dr \quad (2.49)$$

$$\partial_\theta \mathbf{r} = (\cos \phi \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \cos \theta \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}}) r d\theta \quad (2.50)$$

$$\partial_\phi \mathbf{r} = (-\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}}) r d\phi \quad (2.51)$$

$$\partial_r \mathbf{r} \times \partial_\theta \mathbf{r} = (-\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}) r dr d\theta \quad (2.52)$$

$$\partial_r \mathbf{r} \times \partial_\theta \mathbf{r} \bullet \partial_\phi \mathbf{r} = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (2.53)$$

体積積分

三つのパラメタ (u, v, w) で表現した体積領域 $\mathbf{r}(u, v, w)$, $u_1 \leq u \leq u_2, v_1 \leq v \leq v_2, w_1 \leq w \leq w_2$ と、体積要素 $dV = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} du dv dw$ によって体積積分が評価できる。

$$\iiint_V \phi dV = \int_{w_1}^{w_2} \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \phi(\mathbf{r}(u, v, w)) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} du dv dw \quad (2.54)$$

被積分関数がベクトル場でも同じです。

$$\iiint_V \mathbf{A} dV = \int_{w_1}^{w_2} \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v, w)) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} du dv dw \quad (2.55)$$

2.5 テイラー (級数) 展開

2.5.1 一変数関数のテイラー展開

「任意の関数を、ある点の周囲において多項式を用いて近似する」ことを考えます。

例えば、 $\sin x$ でもよいし、 $\cos(\sin x^2)$ でもよいのですが、それを $f(x)$ とします。「ある点の周囲」の「ある点」を $x = 0$ としましょう。このとき、

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \quad (2.56)$$

という形で表すことができるものとします。右辺が $f(x)$ と近くなれば、 $a_0, a_1, a_2, \dots$ が求められた、ということになります。

それでは、係数 $a_0, a_1, a_2, \dots$ をどのように選べばよいのか、について考えますが、この係数を求めるには前提が必要で、それは「ある点 (今回の場合は $x = 0$) での関数値や微分値が分かっているが分かっている」ということです。つまり、私達は $f(0)$ や、 $f'(0), f''(0), \dots$ を知っているものとします。ここで、 $f'(0)$ は、 $f(x)$ を x で微分した導関数 $\frac{df}{dx}$ に $x = 0$ を代入したものです。その他も同様です。

さて、両辺を x で微分すると、 $\frac{df}{dx}(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$ となりますが、これに $x = 0$ を代入すれば $\frac{df}{dx}(0) = a_1$ を得ます。

以下同様に、さらに微分すれば $\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdots 3a_4 x^2 + \cdots$ となりますが、これに $x = 0$ を代入すれば $\frac{d^2 f}{dx^2}(0) = 2a_2$ を得ます。

このようにすれば各係数が得られますので、結局、

$$f(x) = f(0) + \frac{df}{dx}(0)x + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(0)x^2 + \frac{1}{3 \cdot 2} \frac{d^3 f}{dx^3}(0)x^3 + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} \frac{d^4 f}{dx^4}(0)x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(0)x^n \quad (2.57)$$

というふうに展開できます。この展開を「 $x = 0$ のまわりでのテイラー (級数) 展開」と呼びます。

勉強のポイント: 式 (2.57) の一番右の辺は一見すると難しそうに見えます。これは、真ん中の辺のように書くと長くなってしまいますが、「なるべく短く記述しよう」と色々な記号を定義したため、一見すると難しく見えてしまうためです。

例えば、 $1 + 2 + 3 + \dots$ と書けば易しいですが、 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ と書くと難しく見えるのと同じです。

数学では、このような「短く書くために難しく見える」ことが非常に多くあります。これは慣れれば易しくなりますので、“パッと見” が難しいからと言って読むことを止める (思考を停止する) ようなことはしないで欲しいと思います。

一方で、易しく書くために長く書いているとダラダラと長くなってしまい、見通しも悪く、逆に分かりづらくなってしまいます。初学者にとっては $1 + 2 + \dots$ と書いた方が分かり易いかも知れませんが、全ての式をそう書くわけにはいきません。

この短く書く方法が色々で発明されていますが、この発明がなかったら、今の数学を含む科学・技術の発展はなかったでしょう。

次節で出てくる $\nabla \cdot \mathbf{A}$ もよい例です。これらは、この電磁気学の授業を通してかなりの頻度で出てきます。分からないときは、それに慣れるまでは自分で展開するなどをして下さい。

例 1. e^x を $x = 0$ の周囲で展開すると、 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$

例 2. $\sin x$ を $x = 0$ の周囲で展開すると、 $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$ (図 2.29 参照)

さて、このテイラー展開をしたことで、何が嬉しいのでしょうか？

それは、「今まで出来なかった計算が、出来るようになった」ということです。

例えば、 $f(x) = \sin x$ としたとき、 $x = 0.1$ rad のときの値はいくらでしょうか？これは、ふつうは電卓で計算しないと分かりません。(実際に、電卓で計算してみてください。計算したときは、電卓で計算した値が間違えていないか、確認しましょう。特に、関数電卓で三角関数を計算するときは、入力した値が弧度法の radian なのか、degree(度) なのかを気にして下さい)

テイラー展開の計算ができれば、それに値を入れて

$$\sin 0.1 \approx 0.1 - \frac{1}{3!}0.1^3 + \frac{1}{5!}0.1^5 - \dots = 0.1 - \frac{0.001}{6} + \frac{0.00001}{120} - \dots \approx 0.09983341667 \quad (2.58)$$

となり、かなり良い近似になっていないでしょうか？

つまり、私達は、高校のときから慣れ親しんでいる (?) $\sin x$ ですら、その関数の値として $x = 0.1$ のときも $x = 0.2$ のときも $x = 1$ のときも計算できません。結局、よく分かっていないのです。(値がよく分からないから、“sin” という記号を使っているのです)

一方で、多項式は良く分かっています。複雑な場合はたいへんですが、計算することはできます。つまり、テイラー展開をすることで、「計算できなかった関数値が計算できるようになった」ということが言えます。

さて、式 (2.57) の展開ですが、無限に計算することはできませんので、どこかの有限項で打ち切る必要があります。例えば、 $f(x) = \sin x$ を $x = 0$ の点のまわりでテイラー展開した式で、展開を $N = 1, 3, 5, 11$ の次数までで打ち切ったときの、 $x = 0.1, 0.3, 1.0$ の値を見ていきましょう (表 2.1)。

これを見ますと、 $x = 0.1$ のときは $N = 5$ までの展開で、小数点以下 8 ケタまで正確な値が得られています。 $x = 0.3$ のときは、 $N = 5$ までの展開では小数点以下 7 ケタまで数字は同じですが、7 ケタで丸める (打ち切る) と四捨五入で 0.2955203 になってしまいますので、6 ケタまで正確と言ったところでしょうか。また、

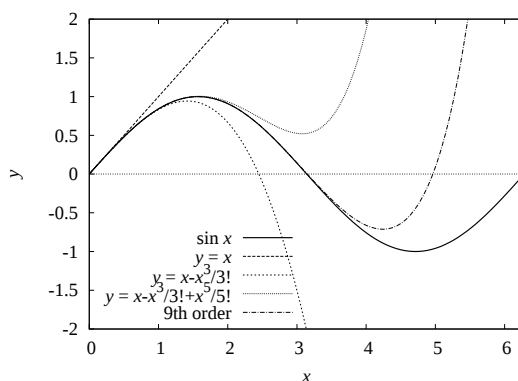


図 2.29: $\sin x$ のテイラー展開。1, 3, 5, 9 次までの展開

表 2.1: $\sin x$ のテイラー展開の値

	$x = 0.1$	$x = 0.3$	$x = 1$
$N = 1$	0.10000000	0.30000000	1.00000000
$N = 3$	0.09983333	0.29550000	0.83333333
$N = 5$	0.09983342	0.29552025	0.84166667
$N = 11$	0.09983342	0.29552021	0.84147098
$\sin x$	0.09983342	0.29552021	0.84147098

$x = 1$ だと $N = 5$ までの展開では小数点以下 2 ケタまでしか合わず、 $N = 11$ まで展開すると 8 ケタまで正確な値が出ました。

つまり、展開の項数が少ないとき (低次項までの展開、と言います) は、展開する点 (今回は $x = 0$) のごく近傍のみの近似ができます。また、項数を増やすことでその点から遠い点も近似できるようになります。

$x = 0$ でなく、他の点 (例えば $x = x_0$ とする) の周りでテイラー展開するときは、上記の式を平行移動すれば OK です。次式のように展開できます。

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dx^2}(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3 \cdot 2} \frac{d^3f}{dx^3}(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots \quad (2.59)$$

例 3. $\sin x$ を $x = \frac{\pi}{4}$ の周りで展開すると $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{3!\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})^3 + \cdots$

勉強のポイント: 色々な関数を、色々な点のまわりで展開してみましょう。

例えば、 $\sin x$ を $x = 0$ のまわりで展開したとき、 $x = 1$ のときの値をよく近似するには多くの項が必要でした。 $\sin x$ を $x = \frac{\pi}{3}$ のまわりで展開した式をつかうと、 $x = 1$ のときの値をよく近似するにはどのくらいの項数が必要でしょうか。

2.5.2 多変数関数のテイラー展開

今度はいよいよやこしくなりますので、結果だけを書きます。

関数 $f(x, y, z) = f(\mathbf{r})$ を、点 $\mathbf{r}_0 = x_0\hat{x} + y_0\hat{y} + z_0\hat{z}$ の周りでテイラー展開することを考えます。結果は

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}) &= f(\mathbf{r}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{r}_0)(z - z_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{r}_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{r}_0)(y - y_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\mathbf{r}_0)(z - z_0)^2 \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{r}_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\mathbf{r}_0)(y - y_0)(z - z_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(\mathbf{r}_0)(z - z_0)(x - x_0) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{D^n f\}(\mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (2.60)$$

となります。ここで、第一項目は 0 次の項、第二～四項目は 1 次の項、第五～十項目は 2 次の項と呼びます。いずれも「 x, y, z で合計何回微分したものか」で数えて下さい。

最右辺にある D ですが、以下の演算子を省略したものです。

$$D = (x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} + (z - z_0) \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.61)$$

これを普通の多項式と思って展開すると、ちょうどその上の式のように展開されます。

上の式の導出の仕方ですが、まず $f(x, y, z)$ を x のみの関数と思ってテイラー展開し、その結果の各項を y の関数と思ってテイラー展開し、最後にその結果の各項を z の関数と思ってテイラー展開することで得られます。

2.6 多変数関数の微分

一変数の関数 $f(x)$ の微分は、よく知られている通り

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \frac{\Delta x}{2}) - f(x - \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.62)$$

となる演算です。

変数が二つ以上の多変数関数の場合、例えば $f(x, y)$ であれば $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ などがありますが、選んだ座標以外の方向の微分 (傾き) は考えられないでしょうか。

例えば、 $\hat{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y}$ 方向の微分として、 r の点と、 $\hat{a}$ 方向に Δa だけ移動した点との傾きは、

$$\frac{f(r + \Delta a \hat{a}) - f(r)}{\Delta a} = \frac{f(x + \Delta a a_x, y + \Delta a a_y) - f(x, y)}{\Delta a} \quad (2.63)$$

で定義できます。そこで、 $\Delta a \rightarrow 0$ の極限をとったものを $\hat{a}$ 方向の微分 $\frac{\partial f}{\partial a}$ とします。

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{f(r + \Delta a \hat{a}) - f(r)}{\Delta a} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta a a_x, y + \Delta a a_y) - f(x, y)}{\Delta a} \quad (2.64)$$

ここで、

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta a a_x, y + \Delta a a_y) - f(x, y)}{\Delta a} \\ &= \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta a a_x, y + \Delta a a_y) - f(x + \Delta a a_x, y) + f(x + \Delta a a_x, y) - f(x, y)}{\Delta a} \\ &= \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta a a_x, y + \Delta a a_y) - f(x, y + \Delta a a_y)}{\Delta a a_x} a_x + \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta a a_y) - f(x, y)}{\Delta a a_y} a_y \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} a_x + \frac{\partial f}{\partial y} a_y \end{aligned} \quad (2.65)$$

より、

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial x} a_x + \frac{\partial f}{\partial y} a_y \quad (2.66)$$

と書けます。右辺は

$$\frac{\partial f}{\partial x} a_x + \frac{\partial f}{\partial y} a_y = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} \right) \cdot \hat{a} \quad (2.67)$$

と書けます。そこで、

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} \quad (2.68)$$

という記号を導入します。このとき、

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \nabla f \cdot \hat{a} \quad (2.69)$$

と表せます。 ∇f は「グラディエント f 」とか「 f の勾配」とか呼ばれるベクトルであり、任意方向の単位ベクトルとの内積が、その方向の傾きを表すようなベクトルです。¹

三次元の場合は、

$$\nabla f(r) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \quad (2.70)$$

となります。

¹ ∇f を、 $\text{grad} f$ と書く教科書もあります。

∇f の向き ∇f は、どの方向を向いているでしょうか。

単位ベクトル $\hat{a}$ の方向をさまざまに変えたとき、 $\nabla f \cdot \hat{a} = \frac{df}{da}$ が最大値を示すのは ∇f と $\hat{a}$ の方向が同じときです。

方向微分 $\frac{df}{da}$ が最大ということは、そのときの $\hat{a}$ が f が最も急に増える方向のときです。このことから、 ∇f は常に f が最大の勾配を示す方向を向いている、ということが言えます。

例題: r を原点との距離としたとき、 $f(r) = \frac{1}{r}$ となるスカラー場 $f(r)$ を考えます。このとき、 ∇f はいくらになるでしょうか。また、 $f(r)$ の最も急に大きくなる方向はどちらでしょうか、 ∇f の方向と同じとなるか、比べてみましょう。

2.7 無限小領域の積分の密度

この節は少し変な数学を勉強します。こういう導出の仕方はどこの本にも載っていないので、この授業・演習でよく勉強して下さい。

この節では、何を求めるのかと言うと、あるものの“密度”を求めることになります。これは、前節では微分を求めましたが、微分は「値の変化」に対する「距離」の割合(密度)です。この節では、距離の密度ではなく、面積の密度、体積の密度といった、二次元以上の量に対する密度になります。

2.7.1 無限小領域の体積積分の密度

小さな領域 ΔV において、あるスカラー場 $f(r)$ を体積積分し、その体積密度:

$$\frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} f(r) dV \quad (2.71)$$

を考えます。小さな領域 ΔV を r の点を含むように無限に小さくした極限がどうなるか、という話をします。

ΔV を小さくすると、積分する領域は小さくなりますので $\iiint_{\Delta V} f(r) dV$ は小さくなります。また、もちろん ΔV も小さくなりますので、 $\frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} f(r) dV$ はどういう値に収束するか、というのが問題になります。

答えから言いますと、この積分の密度は $f(r)$ に収束します。つまり式で書くと次のようになります。

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} f(r) dV = f(r) \quad (2.72)$$

さて、どうして上式のようになるのか、二つの方法で考えます。

一つ目は、だいた「ざっくばらん」で大雑把な方法です。点 $r = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = (x, y, z)$ を中心とした微小領域 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ について考えます。その領域で $f(r)$ は一定とみなせ、

$$\frac{1}{\Delta V} \iiint_V f(r) dV = \frac{1}{\Delta V} f(r) \Delta x \Delta y \Delta z = f(r) \quad (2.73)$$

とできます。これが一つの導出の仕方です。

次は、より詳細な解析のやり方として、テイラー展開を使って考えましょう。

$f(r)$ は r' を変数とする関数として ($f(r')$ として)、 r の点の周囲でテイラー展開をします。式 (2.60) を参考

にすると、

$$\begin{aligned}
 f(x', y', z') &= f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)(x' - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)(y' - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)(z' - z) \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z)(x' - x)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z)(y' - y)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z)(z' - z)^2 \\
 &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z)(x' - x)(y' - y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z)(y' - y)(z' - z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z)(z' - z)(x' - x) \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

と書けます²。

この式の両辺を、 $r = (x, y, z)$ を中心とする、 $\Delta V = \Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ の領域で体積積分します。

右辺第一項は次のようになります。

$$\begin{aligned}
 &\int_{z-\frac{1}{2}\Delta z}^{z+\frac{1}{2}\Delta z} \int_{y-\frac{1}{2}\Delta y}^{y+\frac{1}{2}\Delta y} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} f(x, y, z) dx' dy' dz' \\
 &= f(x, y, z) \int_{z-\frac{1}{2}\Delta z}^{z+\frac{1}{2}\Delta z} \int_{y-\frac{1}{2}\Delta y}^{y+\frac{1}{2}\Delta y} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} dx' dy' dz' = f(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

右辺第二項は、

$$\begin{aligned}
 &\int_{z-\frac{1}{2}\Delta z}^{z+\frac{1}{2}\Delta z} \int_{y-\frac{1}{2}\Delta y}^{y+\frac{1}{2}\Delta y} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)(x' - x) dx' dy' dz' \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \int_{z-\frac{1}{2}\Delta z}^{z+\frac{1}{2}\Delta z} \int_{y-\frac{1}{2}\Delta y}^{y+\frac{1}{2}\Delta y} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} (x' - x) dx' dy' dz' = 0
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

となります (x' に関する積分で 0 になります)。同様に、第三項目と四項目も 0 となります。

右辺第五項は、

$$\begin{aligned}
 &\int_{z-\frac{1}{2}\Delta z}^{z+\frac{1}{2}\Delta z} \int_{y-\frac{1}{2}\Delta y}^{y+\frac{1}{2}\Delta y} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z)(x' - x)^2 dx' dy' dz' \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) \int_{z-\frac{1}{2}\Delta z}^{z+\frac{1}{2}\Delta z} \int_{y-\frac{1}{2}\Delta y}^{y+\frac{1}{2}\Delta y} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} (x' - x)^2 dx' dy' dz' = \frac{1}{24} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) \Delta x^3 \Delta y \Delta z
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

となります。同様に、第六項は $\frac{1}{24} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) \Delta y^3 \Delta z \Delta x$ 、第七項は $\frac{1}{24} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \Delta z^3 \Delta x \Delta y$ となります。

また、第八～十項目は 0 となります。

結局、積分結果は

$$\begin{aligned}
 &\int_{z-\frac{1}{2}\Delta z}^{z+\frac{1}{2}\Delta z} \int_{y-\frac{1}{2}\Delta y}^{y+\frac{1}{2}\Delta y} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} f(x', y', z') dx' dy' dz' = f(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z \\
 &+ \frac{1}{24} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) \Delta x^3 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) \Delta y^3 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \Delta z^3 \right\} \Delta x \Delta y \Delta z + \dots
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

となります。

²ここで、右辺第二項は $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$ となっていますが、「 $\frac{\partial f}{\partial x'}(x, y, z)$ と書くべきではないか」と思われるかも知れません。これはどちらも同じ結果です。例えば簡単に一変数で述べると、 $f(x) = x^2$ について、「 x で微分した結果に対して、変数 x を x' で置き換える」と、微分した結果は $\frac{df}{dx}(x) = 2x$ 、置き換えると $\frac{df}{dx}(x') = 2x'$ となります。また「変数 x を x' で置き換えて、 x' で微分する」と、置き換えて $f(x') = 2x'^2$ 、微分して $\frac{df}{dx'}(x') = 2x'$ となり、同じ結果 ($\frac{df}{dx}(x') = \frac{df}{dx'}(x')$) となります。

この両辺について、 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ で割ってから $\Delta V \rightarrow 0$ の極限をとると、

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} f(\mathbf{r}') dV' &= \lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \int_{z-\frac{1}{2}\Delta z}^{z+\frac{1}{2}\Delta z} \int_{y-\frac{1}{2}\Delta y}^{y+\frac{1}{2}\Delta y} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} f(x', y', z') dx' dy' dz' \\ &= \lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0} \left[f(x, y, z) + \frac{1}{24} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) \Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) \Delta y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \Delta z^2 \right\} + \dots \right] \\ &= f(x, y, z) \end{aligned} \quad (2.79)$$

となり、最初の項のみ残ります。

最後の $\dots$ の部分は、 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ のいずれかが残りますので、 $\Delta V \rightarrow 0$ の極限をとると 0 になってしまいます。

2.7.2 無限小の閉曲面における面積分

次は、小さな領域 ΔV の表面である閉曲面 ΔS において、あるベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ を、閉曲面の外向きを正として面積分をし、その体積密度：

$$\frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.80)$$

を考えます³。

小さな領域 ΔV を $\mathbf{r}$ の点を含むように無限に小さくした極限 (当然、 ΔS も無限に小さい閉曲面となる) において、この積分の密度は以下になります。

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.81)$$

微小体積を $\mathbf{r}$ を中心とする、 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ の領域を考えます。まず $x + \frac{\Delta x}{2}$ 、及び $x - \frac{\Delta x}{2}$ の 2 面について考えます。このとき、外向きの単位法線ベクトル $\hat{n}$ は、それぞれ $\hat{x}$ 、 $-\hat{x}$ となります。従って、この 2 面に関して以下となります。

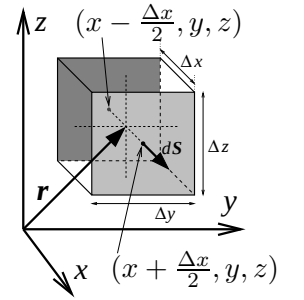


図 2.30: 微小な直方体

$$\iint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{A}(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) \cdot \hat{x} \Delta y \Delta z + \mathbf{A}(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z) \cdot (-\hat{x}) \Delta y \Delta z \quad (2.82)$$

同様に計算することで、6 面全部についての積分は以下になります。

$$\begin{aligned} &\oint_{\Delta S} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \mathbf{A}(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) \cdot \hat{x} \Delta y \Delta z + \mathbf{A}(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z) \cdot (-\hat{x}) \Delta y \Delta z \\ &\quad + \mathbf{A}(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) \cdot \hat{y} \Delta z \Delta x + \mathbf{A}(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z) \cdot (-\hat{y}) \Delta z \Delta x \\ &\quad + \mathbf{A}(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}) \cdot \hat{z} \Delta x \Delta y + \mathbf{A}(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}) \cdot (-\hat{z}) \Delta x \Delta y \\ &= \left\{ \frac{A_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) - A_x(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)}{\Delta x} + \frac{A_y(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) - A_y(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)}{\Delta y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_z(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}) - A_z(x, y, z - \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} \right\} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (2.83)$$

³ここでは「ざっくばらん」な手法で説明します。きちんとテイラー展開を使う手法は、自分でやってみて下さい。例えば式 (2.81) であれば、 x は $x \pm \frac{\Delta x}{2}$ で固定ですので、 y, z についてテイラー展開して積分します。

両辺を $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ で割って、 $\Delta V \rightarrow 0$ とすると、

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.84)$$

となります。これで計算ができました。

さて、ここで右辺のちょっと面倒な微分はよく出てくるので、簡単に記述するという目的で

$$\frac{\partial A_x(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\mathbf{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\mathbf{r})}{\partial z} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (2.85)$$

という記号を導入しましょう。 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ は「ダイバージェンス $\mathbf{A}$; $\mathbf{A}$ の発散 (をとる)」と読みます。 $\text{div} \mathbf{A}$ と書いてある本もあります。難しそうに見えますが、単に式 (2.84) の右辺の微分を意味する、省略のための記号です。

2.7.3 無限小面積の開曲面における面積分

$+x$ 軸に垂直な小さい開曲面 ΔS_x において、あるベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ を $+x$ 方向を正として面積分をし、その面積密度:

$$\frac{1}{\Delta S_x} \iint_{\Delta S_x} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.86)$$

を考えます。

面積 ΔS_x を $\mathbf{r}$ の点を中心に無限に小さくした極限において、この積分の密度は $A_x(\mathbf{r})$ となります。

$$\lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_x} \iint_{\Delta S_x} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = A_x(\mathbf{r}) \quad (2.87)$$

ΔS_x を、 $\hat{n} = \hat{x}$ とする、面積 $\Delta y \Delta z$ の微小面積で考えます (図 2.31 参照)。

$$\frac{1}{\Delta S_x} \iint_{\Delta S_x} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\Delta S_x} \mathbf{A} \cdot \hat{x} \Delta y \Delta z = A_x \quad (2.88)$$

$+y, +z$ 軸に垂直な面 $\Delta S_y, \Delta S_z$ における面積分の密度の極限も同様に得られます。

$$\lim_{\Delta S_y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_y} \iint_{\Delta S_y} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = A_y(\mathbf{r}) \quad (2.89)$$

$$\lim_{\Delta S_z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_z} \iint_{\Delta S_z} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = A_z(\mathbf{r}) \quad (2.90)$$

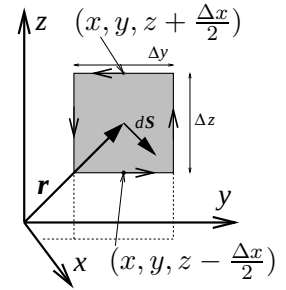


図 2.31: 微小面積

2.7.4 無限小の周回積分路における周回積分

$+x$ 軸に垂直な小さい開曲面 ΔS_x を考え、その曲面の周囲を周回積分路 ΔC_x とします。積分の周回方向は $+x$ 軸を右ねじの進む方向としたときのねじの回転方向と決めます。あるベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ をこの周回路で積分して、その面積密度:

$$\frac{1}{\Delta S_x} \oint_{\Delta C_x} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (2.91)$$

を考えます。

面積 ΔS_x を $\mathbf{r}$ の点を中心に無限に小さくした (即ち、周回積分の経路も無限に小さくなる) 極限において、この積分の密度は以下となる。

$$\lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_x} \oint_{\Delta C_x} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (2.92)$$

図 2.31 に示す面積 $\Delta y \Delta z$ の微小面積で考えます。このとき $\hat{n} = \hat{x}$ とする、 $\mathbf{A}$ の周回積分は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta S_x} \oint_{\Delta C_x} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \frac{1}{\Delta y \Delta z} \left\{ \mathbf{A}(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) \cdot \hat{z} \Delta z + \mathbf{A}(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z) \cdot (-\hat{z} \Delta z) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{A}(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}) \cdot (-\hat{y}) \Delta y + \mathbf{A}(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}) \cdot \hat{y} \Delta y \right\} \\ &= \frac{A_z(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) - A_z(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)}{\Delta y} - \frac{A_y(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}) - A_y(x, y, z - \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} \end{aligned} \quad (2.93)$$

$\Delta S_x \rightarrow 0$ の極限をとると以下を得ます。

$$\lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_x} \oint_{\Delta C_x} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (2.94)$$

$+y, +z$ 軸に垂直な面 $\Delta S_y, \Delta S_z$ の周囲 $\Delta C_y, \Delta C_z$ における周回積分の面積密度の極限も同様に得られます。

$$\lim_{\Delta S_y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_y} \oint_{\Delta C_y} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (2.95)$$

$$\lim_{\Delta S_z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_z} \oint_{\Delta C_z} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (2.96)$$

式 (2.94), (2.95), (2.96) をそれぞれ x, y, z 成分としたベクトルを $\nabla \times \mathbf{A}$ をいう記号で定義します。

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.97)$$

これは物理学でよく出てくる演算ですので、このような記号で定義されています。 $\nabla \times \mathbf{A}$ を「ローテーション $\mathbf{A}$ 」とか「 $\mathbf{A}$ の回転」とか呼びます。

2.8 公式集: 各座標系における計算式

∇ の記号に関するものをまとめます。導出はデカルト座標系しか説明しませんでした、他の座標系でも同じです。

2.8.1 デカルト座標系

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{z} \quad (2.98)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.99)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z} \quad (2.100)$$

2.8.2 円筒座標系

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z} \quad (2.101)$$

$$\nabla\bullet\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.102)$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\hat{\phi} + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right)\hat{z} \quad (2.103)$$

2.8.3 球座標系

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\hat{\phi} \quad (2.104)$$

$$\nabla\bullet\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{A} = & \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r}\right)\hat{\theta} \\ & + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{\phi} \end{aligned} \quad (2.106)$$

2.9 公式集: 恒等式

任意のスカラー場 $\varphi(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r})$ 、および任意のベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r}), \mathbf{B}(\mathbf{r})$ に対して、以下が成立します。

$$\nabla\bullet(\nabla\times\mathbf{A}) = 0 \quad (2.107)$$

$$\nabla\times(\nabla\varphi) = \mathbf{0} \quad (2.108)$$

$$\nabla(\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi \quad (2.109)$$

$$\nabla\bullet(\varphi\mathbf{A}) = \mathbf{A}\bullet\nabla\varphi + \varphi\nabla\bullet\mathbf{A} \quad (2.110)$$

$$\nabla\bullet(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\nabla\times\mathbf{A})\bullet\mathbf{B} - (\nabla\times\mathbf{B})\bullet\mathbf{A} \quad (2.111)$$

$$\nabla\times(\varphi\mathbf{A}) = \nabla\varphi\times\mathbf{A} + \varphi\nabla\times\mathbf{A} \quad (2.112)$$

デカルト座標系などで、本当にそうなるか確認しておくといよいと思います。

2.10 公式集: 積分定理

1. ガウスの定理 (発散定理)

任意の領域 V と、その領域境界の閉曲面 S に対して、以下が成立します。

$$\iiint_V \nabla\bullet\mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A}\bullet d\mathbf{S} \quad (2.113)$$

ただし、 $d\mathbf{S}$ の向きは、 V の外向き (V 内から V 外へ向かう方向) です。

2. ストークスの定理

任意の開曲面 S と、その縁の周回路 C に対して、以下が成立します。

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.114)$$

ただし、 $d\mathbf{S}$ の向きと、周回路 C の方向は、右ねじの関係があります (周回路 C の方向にまわしたとき、右ねじが進む方向が $d\mathbf{S}$ の方向)。

3. グリーンの第一恒等式

任意の領域 V と、その領域境界の閉曲面 S に対して、以下が成立します。

$$\iiint_V (\nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \nabla^2 \psi) dV = \oint_S \varphi \nabla \psi \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \quad (2.115)$$

最後の $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ とは、 $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS$ の法線方向微分を意味します。一般に、 $\nabla \varphi \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ が言えます。

導出) $\nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) = \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \nabla^2 \psi$ より、両辺を領域 V で体積積分して、

$$\iiint_V \nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) dV = \oint_S \varphi \nabla \psi \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \nabla^2 \psi) dV$$

4. グリーンの第二恒等式

任意の領域 V と、その領域境界の閉曲面 S に対して、以下が成立します。

$$\iiint_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \oint_S (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS \quad (2.116)$$

導出) 第一恒等式と、 φ と ψ を入れ替えた式の差を取る。