第3章　真空中の静電界の法則

電気現象の根源は電荷 (電気量) です。電荷には正負が存在します。正負のつけ方は、下の二種の物質を摩擦をして帯電させたとき、

毛皮, ガラス, 雲母, 絹, 綿布, 木材, 琥珀, 樹脂, 金属, 硫黄, セルロイド, $\cdots$

の左の方の物質に帯電した電荷を正、右の方を負としています。

電荷が存在すると周囲には**電場**と呼ばれる電気的な作用を及ぼす状態が空間におこります。この状態が時間的に変化しない状態を**静電場 (静電界)** と呼びます。また、電場中の電荷は力を受けることが知られています。

電荷の基本単位として C (クーロン) を用います。陽子一つは正電荷 (positive charge)、電子一つは負電荷 (negative charge) で、電荷量は 1.602×10^{-19} C です (非常に小さい量と感じるかも知れません、これは C の単位を大きく設定し過ぎたことも原因があるようです)。

なお本講義において、座標は全て [m] の単位を持つものとして話をします。

3.1　静電気現象を起こす源: 電荷

電荷: 電気を担うもので、電気現象の源となる要素です。電子や陽子が担っており、正負と量が存在します。

「電荷がある」という言葉は、何もない真空中に電荷がある状態だけでなく、正負の電荷が異なる量ある状態を言います。正負の電荷が異なる量ある場合、正負のキャンセル分は除き、正負どちらかに偏った分を「ある」と言います。逆に、「電荷がない」ということは、電荷も何もない状態でもありますが、正負の電荷が同位置に等量ある状態も「ない」と言います。

電荷の基本単位として C (クーロン; $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$) を用います。

電荷密度 (分布): 一般的には、「単位体積当たり」の電荷を電荷密度と呼びます。

広い意味では、各点での電荷密度が定義できます (つまり、電荷密度は広い意味でスカラー場です)。このときの電荷密度の定義は次のようになります。$\boldsymbol{r}$ の位置を含む微小体積 ΔV [m^3] を考え、この ΔV に含まれる電荷を ΔQ [C] とします。このとき電荷密度分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ [C/m^3] は以下となります。

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad [\mathrm{C/m^3}] \tag{3.1}$$

つまり、$\boldsymbol{r}$ を常に含むよう ΔV を限りなく小さくした極限における、「単位体積当たりの電荷」として定義します。

点電荷: ある電荷量を持つが、極めて体積が小さく点と見なせる電荷を**点電荷**と呼びます。人間の寸法で物事を扱う場合は、上記の電子や陽子は十分小さな大きさですので点電荷と見なせます。

線電荷: ある電荷量を持つが、極めて細く線と見なせる電荷の分布状態を**線電荷**と呼びます。

線電荷は「単位長さ当たりの電荷」として表現され、線電荷密度 λ [C/m] で表現されます。

面電荷: ある電荷量を持つが、極めて厚さが薄く面と見なせる電荷の分布状態を**面電荷**と呼びます。完全導体表面に現れる電荷は面電荷です。

面電荷は単位面積当たりの電荷として、面電荷密度 σ [C/m^2] で表現されます。

導体: 電子が自由に移動できる (自由電子がある) 物質です。物質である以上、多数の原子から構成され、従って電荷は多量に持っていますが、正負等量のため、電気的には中性です。まったく抵抗が存在しない理想的な導体を完全導体と呼びます。

誘電体: 電子が束縛されて移動できない (束縛電子がある) 物質です。電気的には中性です。

静電場 (静電界): 時間的に電気現象が変化しない状態のことを言います。ある量 (スカラー、ベクトル、スカラー場、ベクトル場の全てを含む) の時間微分は必ず 0 となります。これを $\partial/\partial t \to 0$ と書きます。

静電場は静止した電荷によって発生します。

3.2 クーロンの法則

3.2.1 点電荷間のクーロンの法則

クーロンの法則は電荷間に働く力についての法則です。

> 電荷間には力が働く。力の大きさは電荷間の距離の 2 乗に反比例し、それぞれの電荷量に比例する。力の方向は 2 つの電荷を結んだ方向であり、2 つの電荷が同符号であれば斥力、異符号であれば引力となる。この力を**クーロン力**と呼ぶ。

距離の 2 乗に反比例しますので、電荷間の距離が 2 倍になると力の大きさは 1/4 になります[1]。また、一方の電荷が 2 倍になると力の大きさは 2 倍になります。

位置 $\boldsymbol{r}_0$ に Q [C]、位置 $\boldsymbol{r}$ に q [C] の点電荷があるとすると、q に働く力は

$$\boldsymbol{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} \tag{3.2}$$

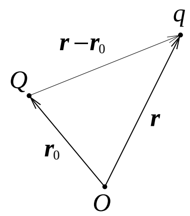


図 3.1: 2 つの点電荷と位置ベクトル

と書けます。ここで、$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ は SI 単位系を採用したときの比例係数です。ε_0 は**真空の誘電率**と呼ばれ、$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi \times 10^{-7} c_0^2} \approx 8.854 \times 10^{-12}$ [F/m] という値と単位を持っています。ここで、c_0 は真空中の光速であり、およそ $c_0 = 2.998 \times 10^8$ [m/s] です。だいたい、$c = 3 \times 10^8$ [m/s] です。これを使うと、$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$ です。

3.2.2 クーロン力の重ね合わせ (線形性)

> 3 つ以上の電荷があったとき ($q, Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$ [C] とする)、q が他の $Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$ から受けるクーロン力は、それぞれの電荷から受ける各クーロン力の (ベクトル) 和に等しい。

これを重ね合わせと呼びます。また、現象が線形であると言います。2 つ以上のことが、1 つ 1 つの単純な合計のとき、線形と呼びます[2]。

---

[1]余談: "力の大きさは電荷間の距離の 2 乗に反比例" と述べましたが、距離の 2 乗に反比例は実験的な観測結果であり、厳密に 2 乗とは言い切れません。ただし "(2+δ) 乗に反比例" としたとき、1772 年にキャベンディッシュは $|\delta| \leqq 0.02$ という上限を導き、その 100 年後にマクスウェルの実験で $|\delta| \leqq 5 \times 10^{-5}$ と示しました。100 年以上前にこのような実験が行われているのは驚くべきことだと思います (皆さんは実験をしようと思ってできますでしょうか?)。

また 1936 年に Plimpton と Lawton は $|\delta| < 10^{-9}$ ということを示す実験を行ったそうです。1971 年に行われた実験では $\delta = (2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}$ という結果が得られています。即ち、実験によれば "極めて 2 乗に反比例に近い" と言えます。(以上は Jackson, *Classical Electrodynamics* より引用)

[2]線形でないケースは非線形と言います。例えば、フックの法則 (フックのスペルは Hooke です。Newton と同時代の人物です) は、バネの伸びに対して力が比例する、ということですが、バネが伸びきってしまうと力は比例しません。ここでは線形が成立しません。

クーロン力の重ね合わせを式で書けば以下のようになります。q が $\boldsymbol{r}$ の位置にあり、$Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$ が $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N$ の位置にあるとき、

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots = \frac{qQ_1(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|^3} + \frac{qQ_2(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2)}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2|^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{N} \frac{qQ_n(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n)}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n|^3} \tag{3.3}$$

3.3 電界

3.3.1 電界の定義

クーロンの法則は「直接2つの電荷間に力が働く」という記述になっていますが (遠隔作用; action at distance)、現在の電磁気学では「片方の電荷により空間に**電界** (electric field) が発生し、その電界中にもう一方の電荷があることで力を受ける」という解釈を採用しています (近接作用; action through medium と言います)。また、この解釈でないと電磁波の伝搬の説明ができないことになります。

近接作用の解釈は式としては次のようになります。まず、式 (3.2) を次のように分けます。

$$\boldsymbol{F} = q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^3} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{3.4}$$

右辺の意味は「$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は、$\boldsymbol{r}_0$ にある点電荷 Q によって位置 $\boldsymbol{r}$ にできた電界であり、そこに点電荷 q があることで $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の力を受ける」となります。

遠隔作用の場合は、二つの電荷があって初めて「力」が発生します。一方で、近接作用の場合は、電荷 q があろうがなかろうが、電荷 Q があればその周囲の空間に「電界」が発生している、という解釈です (でも、電界ができていることを確認するには、そこに電荷を置いて力が働くかで判断する必要があります)。

$\boldsymbol{r}$ が任意の位置を表す位置ベクトルとすると、電界は位置ベクトルの関数となります (即ち、**電界はベクトル場**です)。$\boldsymbol{r}_0$ にある点電荷 Q によってできる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は以下で与えられます。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^3} \tag{3.5}$$

電界の単位は式 (3.4) から [N/C] となりますが、電磁気学では別の表記である [V/m] を通常用います。もちろんどちらも同じ次元の単位です。

3.3.2 電界の重ね合わせ

重ね合わせの理: 2つ以上の電荷によってできる電界は、それぞれの電荷によってできる電界のベクトル和で表される。

位置 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N$ にある電荷量 $Q_1, Q_2, \cdots Q_N$ の N 個の点電荷がつくる電界は、式 (3.3) からも分かるように以下となります。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{n=1}^{N} \frac{Q_n}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n|^3} \tag{3.6}$$

電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ による電界:　電荷が点電荷としてでなく、領域 V_0 内に連続な電荷として電荷密度分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ [C/m^3] で分布しているときを考えましょう。領域 V_0 は三つのパラメタをもつベクトル関数 $\boldsymbol{r}_0$ で表されるものとします。この分布した電荷がつくる電界は次のように与えられます。位置 $\boldsymbol{r}_0$ における微小体積 dV_0 中に含まれる電荷 dQ は

$$dQ = \rho(\boldsymbol{r}_0)\, dV_0$$

ですので、この電荷が位置 $\boldsymbol{r}$ につくる電界 $d\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は

$$d\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{dQ(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} = \frac{\rho(\boldsymbol{r}_0)dV_0\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}$$

となります。連続的に分布した電荷の場合、これを全て重ね合わせて (積分して) 以下となります。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \iiint_{V_0} \frac{\rho(\boldsymbol{r}_0)\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}dV_0 \tag{3.7}$$

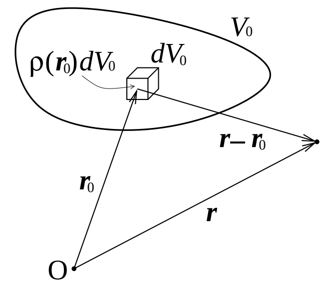


図 3.2: 体積状に分布する電荷のつくる電界

面電荷による電界　曲面 S_0 上に面電荷密度 $\sigma(\boldsymbol{r}_0)$ [C/m^2] で面電荷が分布しているとき、この面電荷がつくる電界を求めます。曲面 S_0 は二つのパラメタをもつベクトル関数 $\boldsymbol{r}_0$ で表されるものとします。

$\boldsymbol{r}_0$ における微小面積 $dS_0 = |d\boldsymbol{S}_0|$ に含まれる電荷 $dQ = \sigma(\boldsymbol{r}_0)dS_0$ が $\boldsymbol{r}$ につくる電界 $d\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は

$$d\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(\boldsymbol{r}_0)dS_0\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} \tag{3.8}$$

ですので、面全体の電荷がつくる電界は以下となります。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S_0} \frac{\sigma(\boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}dS_0 \tag{3.9}$$

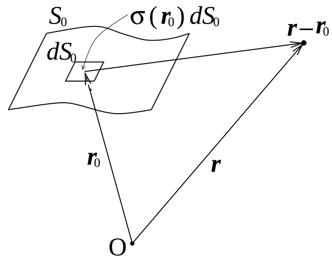


図 3.3: 面状に分布する電荷のつくる電界

線電荷による電界　線電荷が経路 C_0 上に存在しているものとします。経路 C_0 は一つのパラメタをもつ位置ベクトル $\boldsymbol{r}_0$ で表されるものとします。線電荷密度 $\lambda(\boldsymbol{r}_0)$ が与えられたとき、この線上に分布した電荷がつくる電界を求めます。

$\boldsymbol{r}_0$ における微小部分 $dr_0 = |d\boldsymbol{r}_0|$ が $\boldsymbol{r}$ につくる電界 $d\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は

$$d\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(\boldsymbol{r}_0)dr_0\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} \tag{3.10}$$

となりますので、C_0 に分布した線電荷全体がつくる電界はこれらを合わせ、以下となります。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{C_0} \frac{\lambda(\boldsymbol{r}_0)\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}dr_0 \tag{3.11}$$

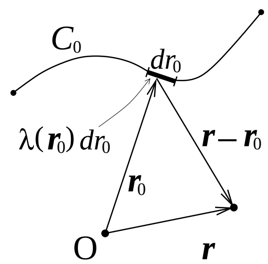


図 3.4: 線状に分布する電荷のつくる電界

問 3.3-1. $q = 20\mu$ C, $Q = -300\mu$ C で、q は $(x, y, z) = (0, 1, 2)$ m に、Q は $(x, y, z) = (2, 0, 0)$ m にあるとき、q に働く力 (ベクトル) と、力の大きさを求めよ。(μ は 10^{-6})

問 3.3-2. 図 3.5 のように、半径 a [m] の円形の細い線電荷 (全電荷が Q [C]) が一様に分布しているとき、その中心軸上において中心からの距離 x [m] における電界を求めよ。

問 3.3-3. 図 3.6 のように、半径 a [m] の円板上に一様な面密度 σ [C/m^2] の電荷が分布しているとき、その中心軸上において中心からの距離 x [m] における電界を求めよ。

問 3.3-4. 無限平板状に一様な面密度 σ [C/m^2] の電荷が分布しているとき、平板からの距離 x [m] における電

界を求めよ。

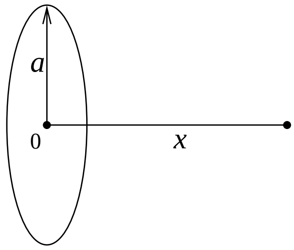


図 3.5: 円形の細い線電荷

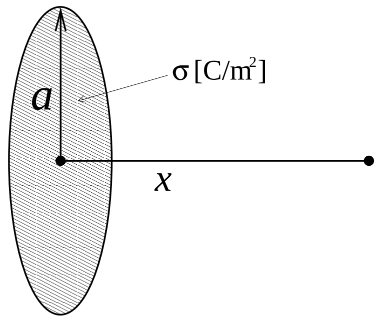


図 3.6: 円盤状の面電荷

3.3.3　電界の様子

電界は 3 次元ベクトル場であり、3 次元空間中の全ての各点にベクトル量が割り当たっている物理量です。これを平面に表現するのは極めて困難で、実際にはどこかの特徴的な一面のみを表現せざるを得ません。また、その一面においても、スカラー場ならよいのですが、ベクトル場の表示はたいへん困難です。ですから教科書に電界の様子を書くことは難しいものがあり、これが皆さんに電界などの「場」のイメージをつかみにくくしている理由の一つです。

よく用いられるベクトル場の表示方法は、“流線” によるものと、直接に離散的な位置での “ベクトル” をプロットする手法があります。以下に、次の 3 つのケースの場合の、流線とベクトルによる表示方法を示します。(1) ケース A: 正電荷が一つある場合、(2) ケース B: 正負等量の電荷が一つずつある場合、(3) ケース C: 等量の正電荷が二つある場合

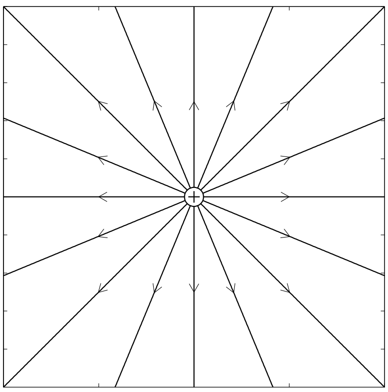


図 3.7: ケース A の流線表示

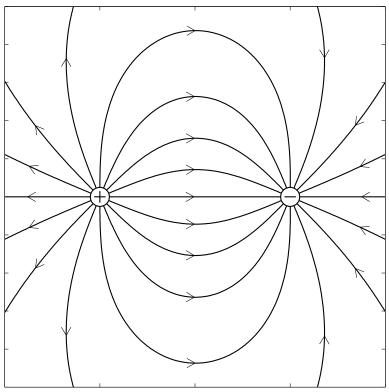


図 3.8: ケース B の流線表示

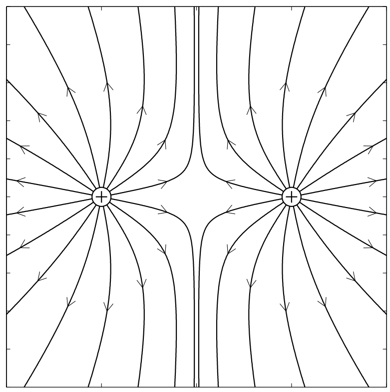


図 3.9: ケース C の流線表示

流線による表示は、各位置のベクトルの向いた方向をつなぎ合わせて一本の線とする手法です。各点のベクトルの向きは流線の接線方向から推測する必要があります。また、ベクトルの大きさ (電界なら強さ) は、線の密度から推測する必要があります (線が密集しているところは電界が強い)。向きはともかく、大きさは目分量の推測ではかなりアバウトになってしまいます。ただ、電界の向きについてはだいぶ分かり易いというのが利

点です。

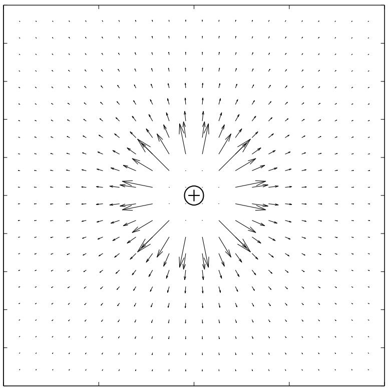


図 3.10: ケース A のベクトル表示

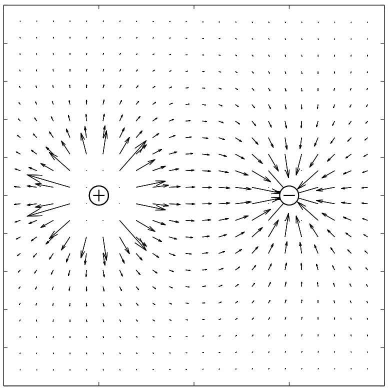


図 3.11: ケース B のベクトル表示

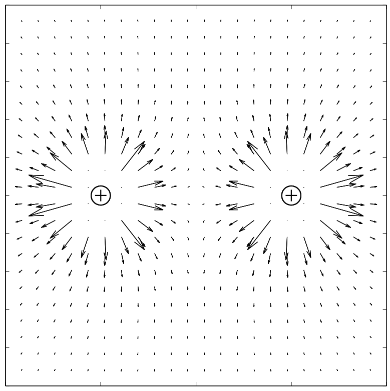


図 3.12: ケース C のベクトル表示

ベクトルで表示したとき、矢印がきちんと見えるところでは、各点のベクトル量は大きさ、方向ともに分かりやすいと思います [3]。しかし、電界の強さが距離の 2 乗に反比例するため、電荷周辺と少し離れたところで矢印の大きさが大きく異なっていて、離れた点では矢印が小さ過ぎて分かりにくいと思います (さらに、上の図では電荷の極近傍のベクトルは大き過ぎて、図をはみ出してしまうので、描いていません)。

図 3.7 から 3.12 は電荷を含む「平面」の場を表したものですが、実際にはこれが 3 次元空間に分布しています。これを紙面に書くことは困難なことが分かるかと思います。訓練によって頭の中で想像するしかありません。

3.4　静電界の法則

電荷分布を変えれば様々な (ベクトル場である) 電界が形成されます。しかし、どのようなベクトル場の電界を形成しても電界が必ず持っている性質が二つあって、それは「電界の性質」=「**法則**」としてまとめられています。

電界の法則の二つのうちの一つが、**ガウスの法則**です。もう一つの法則は名前がありませんが、“電界を任意の周回積分路で周回積分した結果は 0” という法則です。この講義では便宜上、“静電界渦なしの法則” と名付けることにします [4]。この名前の理由は次の通りです。流線が渦をまいて始点と終点を持たないとき、渦に沿う周回積分は 0 ではありません。ところが、静電界においては周回積分は常に 0 で、つまり「渦をまいていない」ことなります。このような理由で「渦なしの法則」としました [5]。

[3]ベクトル表示ではベクトルの大きさは電界の単位であるのに対し、描いているところは長さの単位を持つ空間です。従って、電界の大きさと同じ長さのベクトルを描く必要はありません (長さが絶対的な電界の大きさを表さない)。適当にスケール化して、見易い長さで描いてよいことになります。

[4]この法則が名前を持たない理由ですが、これはファラデーの電磁誘導の法則の、一つの特殊な形 (静止した場) に過ぎないからです。

[5]静電界とは逆に、後で勉強する磁場は、「全て渦」という場です

3.4.1 ガウスの法則

真空中の任意の領域 V に対し、その周囲の閉曲面 S を貫く電界の総量は、その領域 V に含まれる電荷を Q [C] とすると、$\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ に等しい。

$$\oiint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{3.12}$$

Q を電荷密度分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ [C/m^3] を用いて表すと以下となる。

$$\oiint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho(\boldsymbol{r}) dV \tag{3.13}$$

この法則は、どのような電界にも必ず共通する性質です。つまり、どの領域 V をとっても、どのような電荷分布であっても (結果として、どのような静電界の分布であっても)、常に成立している法則です (法則ですので、"証明" されているわけではありません。証明は不可能で、単に、これまでこの法則に反する事実が見つかっていない、ということです)。

領域 V の外側に電荷があった場合、できる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は異なりますが、不思議なことに、積分した結果は同じままで、領域 V 内の電荷だけで決まります。

ガウスの法則は、クーロンの法則から得られる静電界の式を使って導出することができます。クーロンの法則より導出する手法はいくつかの教科書に載っていますので、ここでは解説しません (面倒な割に、あまり意味がありません)。このガウスの法則は、クーロンの法則と同様に、電界を調べることで導き出された法則と思ってもらえれば OK です。

また式 (3.13) において、領域を微小にし、体積当たりの密度とするため、両辺をその微小な体積 ΔV で割って $\Delta V \to 0$ の極限をとります。

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{\Delta S} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} \rho(\boldsymbol{r}) dV \tag{3.14}$$

この極限を、以前に講義した「無限小領域の積分の密度」を使って計算することで、次式の**ガウスの法則の微分形**が得られます。

ガウスの法則の微分形

$$\boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0} \tag{3.15}$$

この式で分かりずらいことは、両辺とも「位置の関数」ということです。$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ はもちろん位置の関数 (つまり、場) ですが、その発散をとった $\boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ も位置の関数です。だから正確には、発散をとった $\boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{E}$ が $\boldsymbol{r}$ の関数という意味で、$\{\boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{E}\}(\boldsymbol{r})$ と書いてよいと思います (そういう書き方をする教科書もごく稀にあります)。

しかも、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ はベクトル場だったのに、発散をとった $\boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ はスカラー場です。発散をとった $\boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が、$\dfrac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}$ というスカラー場に等しい、ということを言っています。

それに対して、式 (3.13) は V で積分をしてしまった後ですので、積分した後の値になっています。「値=値」という式です。

微分形は、任意の位置の一点において常に両辺が等しい、ということでもありますし、それと同時に、全ての点で両辺が等しくなる、ということも言っています。

例題: 点電荷 Q [C] が原点に存在している。原点を中心とした半径 a [m] の球領域 V に関して、ガウスの法則が成立していることを確認せよ。

方針: (問題が与えられたとき、何を問われているのか、何を示せばよいのか、それへの手立ては何か、を考えましょう)

原点を中心とする半径 a [m] の球面 S に対して、電界を面積分した結果が、$\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ になることを確認すればよい。

電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は以下で与えられる。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.16}$$

計算:　球面 S は、パラメタ θ, ϕ を持つベクトル関数 $\boldsymbol{r}(\theta,\phi) = a(\cos\phi\sin\theta\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{z}}) = a\hat{\boldsymbol{r}}$ であり、パラメタの範囲は $0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \phi < 2\pi$ となる。

球面外向きの面素ベクトルは

$$d\boldsymbol{S} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\theta}d\theta \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\phi}d\phi = a^2(\cos\phi\sin\theta\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{z}})\sin\theta\, d\theta\, d\phi = a^2\hat{\boldsymbol{r}}\sin\theta\, d\theta\, d\phi \tag{3.17}$$

となります。$\boldsymbol{r}(\theta,\phi)$ における電界は

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a(\cos\phi\sin\theta\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{z}})}{(a^2\cos^2\phi\sin^2\theta + a^2\sin^2\phi\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{a^2} \tag{3.18}$$

となりますので、

$$\oiint_S \boldsymbol{E} \bullet d\boldsymbol{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{a^2} \bullet a^2\hat{\boldsymbol{r}}\sin\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{3.19}$$

を得ます。即ち、電界の S 上の閉曲面積分は、V 内の総電荷量の $\frac{1}{\varepsilon_0}$ 倍に等しいことが得られたことになります。

問 3.4-1.　点電荷 Q [C] が原点に存在している。z 軸を中心軸とする円筒 (中心が原点、高さ h [m]、半径 a [m]) の領域 V に関して、ガウスの法則が成立していることを確認せよ。

3.4.2　ガウスの法則の応用 (？)

電荷が “ある対称性” をもって存在し、それによって電界が空間中に対称性をもって生成されるとき、ガウスの法則を利用することで簡単に電界が求められる場合があります。ただ、注意してもらいたいのは、**一般には ガウスの法則は電荷と電界を積分した量の関係でしかなく、一点における電界を求められるものではない**、ということです [6]。

たいへん限定された、数少ない、実際には何の役にも立たないような電荷分布のときのみ、ガウスの法則を使って電界が求められると言ってよいでしょう。

ガウスの法則を適用するには、対称性を持った電荷がつくる電界の方向、および強度分布の対称性を (感覚的に) 知る必要があります。

例題 1.　図 3.13 のように半径 a [m] の球内に電荷 Q [C] が一様に分布している場合を考えます。

この場合、球内に電荷が一様に分布しているので、電界は**球の中心から放射状に分布**し、**大きさは中心からの距離 r のみに依存する**ように分布します。従って、図のように、半径 r における同心球面 S でガウスの法則を適用すると、

[6] 下線を引いた「一般には」は、初回の講義で述べた意味での「一般」で、「何にでも当てはまる」という意味です。

$r > a$ において、

$$\oiint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{S} = \oiint_S E_r(r)\hat{\boldsymbol{r}} \bullet \hat{\boldsymbol{r}} dS = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \boldsymbol{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} \tag{3.20}$$

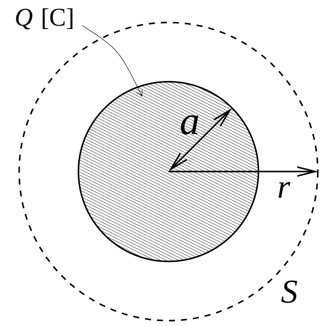


図 3.13: 半径 a の球状に分布する電荷

$r \leqq a$ において、$\rho(\boldsymbol{r}) = \dfrac{Q}{4\pi a^3/3}$, $(r \leqq a)$ より、

$$\oiint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{S} = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\boldsymbol{r})dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{4\pi a^3/3}\frac{4\pi r^3}{3}$$

$$E_r(r) = \frac{Q\,r}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \quad \boldsymbol{E}(r) = \frac{Q\,r}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\boldsymbol{r} \tag{3.21}$$

例題 2. 無限平板状に電荷が一様な面電荷密度 σ [C/m^2] で分布しているときの電界について考えます。対称性から、**電界は平板に垂直にでき、平板からの距離** d **が等しければ大きさは同じ**になるように分布します。また電界の様子は平板に対して面対称で、面の片側にできた電界分布の鏡写しのような分布が反対側にできます。

また、ここでは面電荷分布なので、V 内の総電荷量は面積分で得られることに注意して下さい。

上面と下面が無限平板と平行となる筒型の領域 (底面積 S, 高さ $2d$) でガウスの法則を適用すると、

$$\oiint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{S} = 2S \cdot E(d) = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\,dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\iint \sigma\,dS = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}, \qquad E(d) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{3.22}$$

となります。

この結果には興味深い点が一つあり、それは強度は d に依存していないことです。面に近かろうが遠かろうが、面が無限大だと電界強度は同じになる、ということです。

問 3.4-2. 図 3.14 のように半径 a の無限長円筒内に電荷が一様に分布している場合を考える。単位長さあたり λ [C/m] で分布としたとき、中心軸から距離 ρ [m] における電界を求めよ。

問 3.4-3. 図 3.15 のような半径 a_1 の導体球と、同心球である中空導体球 (内半径 a_2, 外半径 a_2') がある。以下の場合について、電界を求めよ。

(1) 内側の導体球にのみ、Q [C] の電荷を与えたとき。

(2) 外側の中空導体球にのみ、Q [C] の電荷を与えたとき。

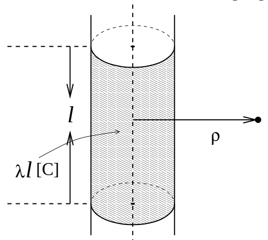


図 3.14: 無限長円筒電荷

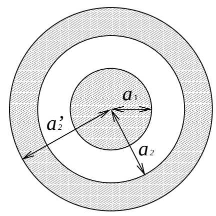


図 3.15: 同心 2 導体球

3.4.3 静電界渦なし (?) の法則

どのような周回積分路 C をとっても、静電界の周回積分は常に 0 となる。

$$\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r} = 0 \tag{3.23}$$

これをこの授業内では静電界渦なしの法則と名付けます[7]。これは、静電界のベクトル場を描くと、渦をまくような分布にはならず、それを式 (3.23) が示しているためです。

もし仮に渦を巻いたような分布の場合、式 (3.23) の左辺の値は、C を渦に沿った積分路を選んだときに、0 にはなりません。

式 (3.23) は、その積分路が作る面積で割った密度について、積分路 (がつくる面積) を無限に小さくした極限を考えると、2.7.4 節で説明したように、面の向いている方向によって次の 3 つの式が得られます。

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \tag{3.24}$$

従って、**微分形の渦なしの法則**は以下となります。

$$\textbf{微分形の渦なしの法則:} \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \tag{3.25}$$

さて、静電界渦なしの法則から、いくつかの性質が導けます。

静電界の線積分は経路によらず一定　静電界渦なしの法則から、閉じていない経路に沿って静電界を線積分したとき、**始点と終点が同じであればどのような経路でも積分値は一定である**ことが導き出せます。

[**説明**]　図に示すように任意の周回積分路 C 上の 2 点 P, Q とその間にある A, B を考えます。周回積分路 C を 2 つの積分路 ($C_1 : P \to A \to Q$ と $C_2 : Q \to B \to P$) に分けます。このとき、渦なしの法則より

$$\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r} = 0 \tag{3.26}$$

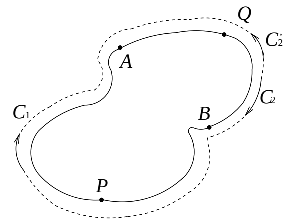
が言えます。

C_2 の積分路を逆にした積分路 $C_2' : P \to B \to Q$ を考えると、

$$\int_{C_2} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r} = -\int_{C_2'} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r} \tag{3.27}$$

$$\therefore \quad \int_{C_1} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r} - \int_{C_2'} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r} = 0$$

$$\leftrightarrows \quad \int_{C_1} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r} = \int_{C_2'} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r} \tag{3.28}$$



が言えます。周回積分路 C は任意ですので、この式は始点 P と終点 Q が同じであれば、**静電界の線積分**

$$\int_{P \to Q} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r}$$

は、経路によらず常に値が一定であることを示していることになります。

3.5　電位

3.5.1　静電場中で電荷を移動させたときになした仕事

電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 内で、位置 $\boldsymbol{r}_A$ から $\boldsymbol{r}_B$ まで、ある経路 C に沿って電荷 q [C] を移動させたときになした仕事を求めましょう。

---

[7] この法則の名前は、この講義で便宜上つけているだけということを気を付けて下さい。授業の外で「静電界渦なしの法則」とは言わないようにしましょう。

なんでそんな紛らわしいことをしているのかと言うと、この法則は静電界を説明する上で、ガウスの法則と並んで大事な二大法則の一つなのですが、名前がありませんので、皆さんが理解しやすいような名前であえて命名している、という意図があるためです。

まず、経路 C を一つのパラメタのベクトル関数 $\boldsymbol{r}$ で表現します。経路 C 中の一点 $\boldsymbol{r}$ において、経路に沿う微小線素ベクトル $d\boldsymbol{r}$ 分だけ電荷を移動させたときを考えます。

その点の電界は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ であり、電荷には $q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の力が働きます。そこで、その反対の力 $-q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ をかけないと電荷は移動してしまうことになります。その力をかけながら、ベクトル $d\boldsymbol{r}$ 分だけ移動するので、なした仕事 dW は $dW = -q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r}$ となります。

経路全体にわたって動かしたときの仕事 W [J] は、全ての経路にわたる寄与から以下で与えられます。

$$W = \int dW = -q \int_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r} \tag{3.29}$$

問 3.5-1.　電荷 Q [C] が原点におかれている。これによってできる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 中を、図 3.16 に示す 2 つの経路で電荷 q [C] を移動する。(2 つの経路は始点と終点は $\hat{\boldsymbol{y}}$, $3\hat{\boldsymbol{y}}$ である。C_2 は $2\hat{\boldsymbol{y}}$ を中心とする半円周。図は $z = 0$ の面内)
(a) 2 つの経路 C_1, C_2 を表すベクトル関数をそれぞれ求めよ。また、パラメタの範囲も示せ。
(b) 2 つの経路 C_1, C_2 で移動したときに要する仕事 W_1, W_2 を求め、$W_1 = W_2$ となることを示せ。

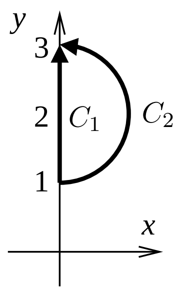


図 3.16: 経路

3.5.2　電位 (静電ポテンシャル) の定義

静電界中で電荷を移動したときの仕事は、電界の線積分で求められます。また、静電界の線積分が経路によらず一定ですので、始点と終点さえ決まれば仕事は決定できることになります。

そこで、適当に基準点 $\boldsymbol{r}_Z$ を定め、基準点 $\boldsymbol{r}_Z$ から任意の点 $\boldsymbol{r}$ までの単位電荷を移動させたときの仕事:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_Z}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r} \tag{3.30}$$

を定めておくと、仕事を求める際に都合がよいことになります。$\varphi(\boldsymbol{r})$ を**点 $\boldsymbol{r}_Z$ に対する点 $\boldsymbol{r}$ の電位**と呼ぶことにします。電位の単位は [J/C]=[V] です。

例えば、$\boldsymbol{r}_P \to \boldsymbol{r}_Q$ へ電荷 q [C] を移動したときは、どのような経路を選んでも良いので、一旦基準点 $\boldsymbol{r}_Z$ を通るような経路を選べば、

$$\begin{aligned} -q\int_{\boldsymbol{r}_P}^{\boldsymbol{r}_Q} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r} &= -q\int_{\boldsymbol{r}_P}^{\boldsymbol{r}_Z} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r} - q\int_{\boldsymbol{r}_Z}^{\boldsymbol{r}_Q} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r} \\ &= -q\int_{\boldsymbol{r}_Z}^{\boldsymbol{r}_Q} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r} - q\left(-\int_{\boldsymbol{r}_Z}^{\boldsymbol{r}_P} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r}\right) = q\{\varphi(\boldsymbol{r}_Q) - \varphi(\boldsymbol{r}_P)\} \end{aligned} \tag{3.31}$$

となり、P, Q 点の電位の差 (=**電位差**) を用いて表すことが出来ます。**通常は、基準点は無限遠にとることが多い**です。

> 静電界中で電荷を移動させたときの仕事は、移動する前後の電位の差に、電荷量をかけたものに等しい。

これまでの話の流れを、もう一度まとめます。

- 静電界渦なしの法則が成立しているので、電界の線積分は始点と終点が決まれば (経路によらず) 値が決まる、
- 電界中で電荷を移動させたときの仕事は、電界の線積分に関係しているので、始点と終点が決まれば仕事が決まる、

- 仕事は移動する電荷に比例するので、単位電荷あたりの仕事が分かればよく、それを電位と定義する、
- どこかに基準点を定めて、その基準点に対し、空間の全ての点の電位を定義する、
- 結局、電荷 q [C] をある点から別の点に移動したときの仕事は、二点間の電位差に q をかけたものに等しい、

となります。上の事項は論理的につながっていますので、別々に覚えるのでなく、上から下に順に (頭の中で) 導き出せるように理解して下さい。

あとは「通常、基準点は無限遠にとることが多い」ということだけ気を付ければ OK です。

「何で無限遠？」と思われるかと思います。これは次のような理由によります。電荷から離れれば電界は小さくなってゆき、無限遠では電界は 0 に十分近付きます。電界が強い点でなく、そのような電界がほぼ 0 となる点を基準にとる、というのが理由です。

3.5.3　点電荷がつくる電位分布

まず、原点におかれた電荷量 Q の点電荷が、位置 $\boldsymbol{r}' = x'\hat{\boldsymbol{x}} + y'\hat{\boldsymbol{y}} + z'\hat{\boldsymbol{z}}$ につくる電位について求めましょう (基準点は無限遠にします)。

まず、この電荷がつくる電界は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}'}{(r')^3} \tag{3.32}$$

となります。

途中の経路には依らないので、原点から $\boldsymbol{r}'$ への放射方向に、無限遠から直線上に沿って $\boldsymbol{r}'$ まで移動するものとします。このときの経路はパラメタ s を用いて、

$$\boldsymbol{r}(s) = -s(\sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{z}}) = -s\hat{\boldsymbol{r}}', \quad -\infty \leqq s \leqq -r' \tag{3.33}$$

と表せます。ここで、θ, ϕ は $\boldsymbol{r}'$ の方向で、$\boldsymbol{r}' = r'(\sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{z}})$ です。また、負符号はパラメタの範囲について、始点から終点までパラメタ s が増えるように設定するためです。このとき、$d\boldsymbol{r} = -\hat{\boldsymbol{r}}'ds$ となります。$\boldsymbol{r}(s)$ における電界は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}(s)) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-s\hat{\boldsymbol{r}}'}{|-s\hat{\boldsymbol{r}}'|^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-s\hat{\boldsymbol{r}}'}{-s^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}'}{s^2} \quad (\because s < 0) \tag{3.34}$$

となります。ここで、s は負の値を常にとりますので、$|-s^3| = -s^3$ であることに注意して下さい。

従って、電位は単位電荷を移動したときの仕事になりますので、

$$\varphi(\boldsymbol{r}') = -\int \boldsymbol{E}\bullet d\boldsymbol{r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{-r'}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}'}{s^2}\bullet(-\hat{\boldsymbol{r}}'ds) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{-r'}\frac{1}{s^2}ds = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}'|} \tag{3.35}$$

を得ます。一般に、原点にある点電荷 Q [C] が $\boldsymbol{r}$ につくる電位は

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}|} \tag{3.36}$$

で与えられることになります。原点でなく、位置 $\boldsymbol{r}_0$ に点電荷があるときは、平行移動により、電位は以下となります。

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}|} \tag{3.37}$$

3.5.4 各種電荷のつくる電位

線電荷 $\lambda(\boldsymbol{r})$ [C/m]、面電荷 $\sigma(\boldsymbol{r})$ [C/m^2]、体積電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ [C/m^3] がつくる電位は、重ね合わせの原理より、積分によって得られます。

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int_C \frac{\lambda(\boldsymbol{r}_0)dr_0}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} \tag{3.38}$$

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \iint_S \frac{\sigma(\boldsymbol{r}_0)dS_0}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} \tag{3.39}$$

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \iiint_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}_0)dV_0}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} \tag{3.40}$$

クーロンの法則から電界を求めるときと考え方は同じですので、ここでは詳しい説明は省略します。

問 3.5-2. 長さ $2l$ の直線線分状に電荷が線密度 λ [C/m] で分布しているとき、線分の中点から直角に距離 r 離れた点での電位を求めよ。
問 3.5-3. 図 3.17 のように、半径 a [m] の円形の線電荷 (全電荷 Q [C]) が一様に分布しているとき、その中心軸上において中心からの距離 x における電位を求めよ。

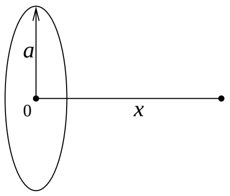


図 3.17: 円形の線電荷

3.5.5 電界と電位の関係

電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が与えられたとき、電位 $\varphi(\boldsymbol{r})$ は上述のように積分によって求められます。

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_Z}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') \bullet d\boldsymbol{r}' \tag{3.41}$$

逆に、電位 $\varphi(\boldsymbol{r})$ が与えられたときに電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は求めることができるでしょうか？

この答えは「イエス」で、電位 $\varphi(\boldsymbol{r})$ が分かれば、電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は分かります。

そのやり方は、上記の積分を移動距離当たりの密度にして、積分範囲を限りなく小さくしたときの極限として求めることができます。実際に計算してみましょう。

任意の点 $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$ を中心に $+x$ 方向に微小距離 Δx だけ移動することを考えます。つまり、$(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)$ から $(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z)$ まで移動することになります。

この経路を表すベクトルは $\boldsymbol{r}' = x'\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$ となり (この際 y, z は定数と思って下さい)、$d\boldsymbol{r}' = dx'\hat{\boldsymbol{x}}$ より、

$$-\int_{\boldsymbol{r}-\frac{\Delta x}{2}\hat{\boldsymbol{x}}}^{\boldsymbol{r}+\frac{\Delta x}{2}\hat{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') \bullet d\boldsymbol{r}' = -\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \boldsymbol{E}(x', y, z) \bullet \hat{\boldsymbol{x}}dx' = -\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} E_x(x', y, z)dx' \tag{3.42}$$

ここで、Δx の範囲は十分小さいものとしますと、関数 $E_x(x', y, z)$ の点 x における変化は一次関数で近似できます。即ち、

$$E_x(x', y, z) \approx E_x(x, y, z) + \frac{\partial E_x}{\partial x}(x, y, z)(x' - x) \tag{3.43}$$

となります[8] [9] 。従って、積分は

$$
\begin{aligned}
-\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} E_x(x',y,z)dx' &\approx -\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \left\{E_x(x,y,z)+\frac{\partial E_x}{\partial x}(x,y,z)(x'-x)\right\}dx' \\
&= -\left\{E_x(x,y,z)\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} dx' + \frac{\partial E_x}{\partial x}(x,y,z)\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}}(x'-x)dx'\right\} \\
&= -E_x(x,y,z)\Delta x = \varphi(x+\tfrac{\Delta x}{2},y,z)-\varphi(x-\tfrac{\Delta x}{2},y,z)
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

となります[10] 。式変形すると

$$
E_x(\boldsymbol{r}) \approx -\frac{\varphi(x+\frac{\Delta x}{2},y,z)-\varphi(x-\frac{\Delta x}{2},y,z)}{\Delta x} \tag{3.45}
$$

となります。$\Delta x \to 0$ の極限をとれば近似でなくなりますので、

$$
E_x(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{\boldsymbol{r}-\frac{\Delta x}{2}\hat{\boldsymbol{x}}}^{\boldsymbol{r}+\frac{\Delta x}{2}\hat{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\bullet d\boldsymbol{r}' = -\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial x} \tag{3.46}
$$

を得ます。

同様に、それぞれ y,z 方向に $\Delta y,\Delta z$ だけ移動したときを計算し、$\Delta y,\Delta z \to 0$ の極限をとることで

$$
E_y(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial y},\quad E_z(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial z} \tag{3.47}
$$

を得ます。即ち電位 $\varphi(\boldsymbol{r})$ を x,y,z で偏微分して負の符号をつけたものは、その点の電界の x,y,z 成分となります。$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ をベクトルで表現すると

$$
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_x(\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{x}}+E_y(\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{y}}+E_z(\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{z}} = -\left\{\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\right\} \tag{3.48}
$$

となります。上式右辺は 2.6 節で説明した勾配なので、

$$
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{3.49}
$$

と言えます。つまり、電位 $\varphi(\boldsymbol{r})$ が分かったときに、電界はこの式で計算ができることになります。

これは式 (3.41) の積分領域を極めて小さくして、$\boldsymbol{r}$ の一点に関する法則に直したものです。式 (3.41) と等価であり、空間の一点に関する表現と言えます。

問 3.5-4. 式 (3.37) の静電ポテンシャル $\varphi(\boldsymbol{r})$ に対して、$-\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r})$ を計算せよ。これが、$\boldsymbol{r}_0$ に点電荷 Q [C] があるときの $\boldsymbol{r}$ における電界となっているか確認せよ。

電位の存在意義: 一般に、ある電荷分布に対して電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めたいとき、直接クーロンの法則から求めるときは、3 成分 (x,y,z 成分) の積分をそれぞれ実行する必要があります。

一方で、電位 $\varphi(\boldsymbol{r})$ はスカラー場ですので、電位を求める作業は、積分は一回で済むことになります。

そこで電界を直接求める代わりに、一旦電位を求め、電位が得られたらその勾配から電界を求めることで比較的簡単に電界を導出することができます。この方法は二回の手続きが必要であるが、各手続きが簡単なため、結果として容易な方法と言えます。

工学では、問題を解く際にこのような「回り道」が多く存在します。つまり、直接解こうとするのでなく、一旦別の形にして、それについて解き、最後に元の形に戻して解を得るという方法です。この方法の例として、フーリエ変換やラプラス変換などの積分変換があります。

[8]正確には $\frac{\partial E_x}{\partial x}(x,y,z)$ でなく、$\frac{\partial E_x}{\partial x'}(x,y,z)$ であるが、「x' を変数とする関数を x' で微分して x 代入」は、同じ関数を x の変数として微分したものに等しいですね。

[9]二次以上の項を考慮してもよいが、最後の $\Delta x \to 0$ の極限操作時には 0 となります。ぜひ、一度は手を使って確認してみて下さい。

[10]結局、0 次関数で近似して、$E_x(x',y,z) \approx E_x(x,y,z)$ としたのと同じ結果となってしまいます。

電気双極子 (電気ダイポール) がつくる電位分布　電荷量が等しく、正負の符号が逆の 2 つの電荷が十分近い距離に存在するとき、その 2 つの電荷をひとまとめに見て、「双極子 (dipole; ダイポール)」と呼びます。

"十分近い" とは、ダイポールの作る電界に着目するとき、着目している電界の位置とダイポール間の距離が、2 つの電荷間の距離に比べて十分大きいという意味です (図 3.18 参照)。つまり、$|\boldsymbol{r}| \gg d$ と言えます。逆に言えば、ダイポールの電荷間の距離が十分に小さい、という意味です。

座標系を適当にとり、原点にダイポールの中心、正負の電荷 $\pm q$ [C] はそれぞれ $+\dfrac{d}{2}\hat{\boldsymbol{z}}, -\dfrac{d}{2}\hat{\boldsymbol{z}}$ [m] に位置するものとします。

$|\boldsymbol{r}| \gg d$ となるような位置 $\boldsymbol{r}$ の電位 $\varphi(\boldsymbol{r})$ [V] は次のようにして求めることができます。

こういう場合 (記号 $\gg$ や $\ll$ が現れる場合) は、「近似」をします。どういう近似をするかと言いますと、$|\boldsymbol{r}| \gg d \leftrightarrows \dfrac{d}{|\boldsymbol{r}|} \ll 1$ ですので、$\zeta = \dfrac{d}{|\boldsymbol{r}|} \ll 1$ という変数 ζ がほぼ 0 であり、ζ を変数とする関数を $\zeta = 0$ のまわりでテイラー展開して、適当な有限の項数で打ち切ることが可能、というわけです。

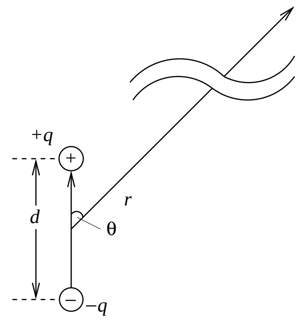


図 3.18: ダイポール

さて、実際に計算をしましょう。計算に先立ち、$\boldsymbol{r}$ と z 軸のなす角を θ とします。このとき、$+\dfrac{d}{2}\hat{\boldsymbol{z}}$ に位置する $+q$ [C] の電荷による $\boldsymbol{r}$ の電位を求めます。電荷から、求める電位の位置までの距離は

$$\begin{aligned}\left|\boldsymbol{r} - \frac{d}{2}\hat{\boldsymbol{z}}\right| &= \left\{\left(r\cos\theta - \frac{d}{2}\right)^2 + (r\sin\theta)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{r^2 - rd\cos\theta + \left(\frac{d}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= r\left\{1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{1}{4}\left(\frac{d}{r}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = r\left\{1 - \zeta\cos\theta + \frac{1}{4}\zeta^2\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (3.50)\end{aligned}$$

となります。ここまでは近似はなく、厳密に計算しています。

ここから近似をしましょう。電位は距離の反比例、即ち $\dfrac{1}{|\boldsymbol{r} - \frac{d}{2}\hat{\boldsymbol{z}}|}$ が関係しますので、関数 $\{1-\zeta\cos\theta+\frac{1}{4}\zeta^2\}^{-\frac{1}{2}}$ を $\zeta = 0$ のまわりでテイラー展開します。

$$\left(1 - \zeta\cos\theta + \frac{\zeta^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\zeta}{2}\cos\theta + \frac{\zeta^2}{8}(3\cos^2\theta - 1) + \cdots \qquad (3.51)$$

ここでは、ζ の 1 次の項までで打ち切りましょう。2 次以上は十分に小さいので無視できる、と考えます。

従って、$+\dfrac{d}{2}\hat{\boldsymbol{z}}$ に位置する $+q$ [C] の電荷による $\boldsymbol{r}$ の電位は

$$\varphi_1(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r} - \frac{d}{2}\hat{\boldsymbol{z}}|} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 + \frac{d}{2r}\cos\theta\right) \qquad (3.52)$$

と近似的に計算できるものとします。

また、同様にして $-\dfrac{d}{2}\hat{\boldsymbol{z}}$ に位置する $-q$ [C] の電荷による $\boldsymbol{r}$ の電位は

$$\varphi_2(\boldsymbol{r}) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r} + \frac{d}{2}\hat{\boldsymbol{z}}|} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta\right) \qquad (3.53)$$

と近似できます。

結局、$\boldsymbol{r}$ における電位 $\varphi(\boldsymbol{r})$ は、この二つの重ね合わせより、

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 + \frac{d}{2r}\cos\theta\right) - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta\right) = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (3.54)$$

となります。

少し表記を変えましょう。

ダイポールの負電荷の位置から正電荷の位置を表すベクトル $\boldsymbol{d}$ (この場合は $\boldsymbol{d} = d\hat{\boldsymbol{z}}$) を定義します。これを用いて、ダイポールモーメント $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$ [C·m] というものを定義します。ダイポールモーメント $\boldsymbol{p}$ を用いると電位 $\varphi(\boldsymbol{r})$ は以下と書けます。

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\boldsymbol{p} \bullet \hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{3.55}$$

上の式から分かることは、点電荷の作る電位分布は、点電荷からの距離 r に反比例しますが、ダイポールの作る電位分布は距離 r の 2 乗に反比例しますので、ダイポールから遠くなると急に電位は低くなる、ということです。

これは正負の電荷が近くに存在しているために、遠くから見るとほぼ電荷がないように見えるためです。また、ダイポールモーメント向きによって電位が異なることにも気を付けて下さい。

問 3.5-5.　ダイポールが作る電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を、式 (3.55) の静電ポテンシャルの勾配をとることで求めよ。

等電位面と電界の向き　電位が等しい点の集合は面になります。これを**等電位面**と呼びます。電位の等高線のようなものです。図 3.19 から 3.21 は、3.3 節のケース A, B, C のときの等電位面です。点線で電界の流線表示も示しています。

この図ではある一面しか示していませんので、等電位「線」となっていますが、3 次元的に見ると等電位面となります。

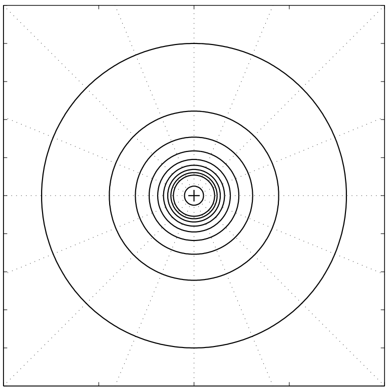


図 3.19: ケース A の等電位面

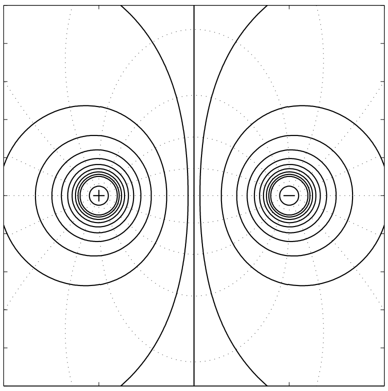


図 3.20: ケース B の等電位面

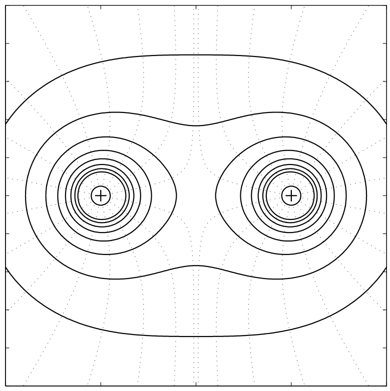


図 3.21: ケース C の等電位面

等電位面については次のことが言えます。

同じ等電位面上にある、ごく近傍の 2 点 A, B について、A 点から B 点を表すベクトルを $\Delta\boldsymbol{r}$ とします。ある点電荷 (Q [C]) を A から B まで移動させたとき、なした仕事 $W = -Q\boldsymbol{E} \bullet \Delta\boldsymbol{r}$ は A, B の 2 点の電位が等しいので $W = 0$ となります。従って、

$$\boldsymbol{E} \bullet \Delta\boldsymbol{r} = 0 \tag{3.56}$$

であることが分かります。この式は、**ある点での等電位面** ($\Delta\boldsymbol{r}$ の方向) **に対し、電界ベクトル** ($\boldsymbol{E}$ の方向) **は垂直の方向を向いている**ことを意味しています。図 3.19 から 3.21 の実線 (等電位面) と点線 (電界の向き) は常に垂直に交わっています。

3.6　ポアソンの方程式とラプラスの方程式

電荷が与えられたとき、電界を直接求めるのでなく、電位を求める方が簡単と述べました。

電荷が与えられたときに電位を求めるには、式 (3.37), (3.38), (3.39), (3.40) でも求められますが、微分形の式もあります。ここではそれを求めましょう。

これまで得られた微分形の式で、「電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ と電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$」を関係付ける式は

$$\boldsymbol{\nabla}\bullet\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0} \tag{3.57}$$

でした。また、「電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と電位 $\varphi(\boldsymbol{r})$」を関係付ける式は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{3.58}$$

です。

式 (3.58) を (3.57) に代入すると、

$$\boldsymbol{\nabla}\bullet\{-\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r})\}=\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}\quad\leftrightarrows\quad\boldsymbol{\nabla}\bullet\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r})=-\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0} \tag{3.59}$$

となります。

式 (3.59) の $\boldsymbol{\nabla}\bullet\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r})$ はどんな式なのか、検討しましょう。$\boldsymbol{\nabla}\varphi$ は

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{3.60}$$

の省略形でした。また、$\boldsymbol{\nabla}\bullet\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ であれば、

$$\boldsymbol{\nabla}\bullet\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{3.61}$$

の省略形です。ここでは $\boldsymbol{\nabla}\bullet\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r})$ ですので、上の $\boldsymbol{\nabla}\bullet\boldsymbol{A}$ の A_x が $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ に、A_y が $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ に、A_z が $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$ に相当することになります。従って、

$$\boldsymbol{\nabla}\bullet\boldsymbol{\nabla}\varphi=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \tag{3.62}$$

となります。

従って、微分形の電位と電荷の関係式は

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{3.63}$$

となります。

左辺の式は、物理でよく現れますので、また省略形を導入します。次の通りです。

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \tag{3.64}$$

この演算子をラプラシアン (Laplacian) と呼びます。

この省略形を使うと、微分形の電位と電荷の関係式は

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{3.65}$$

と書けます。これを**ポアソン (Poisson) の方程式**と呼びます。

電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ が 0 の場所では

$$\nabla^2\varphi=0 \tag{3.66}$$

となります。これを**ラプラス (Laplace) の方程式**と呼びます。

ポアソンの方程式、ラプラスの方程式は電位を求めるのによく用いられます。特に、電荷でなく電位が分かっているときに各点での電位や電界を求めたいときもあり、その場合はこれらの方程式を解くことで得られます (境界値問題と呼びます)。

問 3.6-1.　原点に点電荷 Q [C] があるときの電位は式 (3.36) で与えられる。これは原点以外では電荷がないので、原点以外でラプラスの方程式を満たす。このことを $\nabla^2\varphi(\boldsymbol{r})$ を計算して確認せよ。

3.7　ベクトル解析からのアプローチ

ベクトル解析から

$$\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} = -\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} \tag{3.67}$$

が言えます。このことを用いれば、静電界の式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \iiint_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}dV_0 \tag{3.68}$$

は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\iiint_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}dV_0 = -\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{3.69}$$

と言えます。ここで、

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \iiint_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}dV_0 \tag{3.70}$$

です。

また、任意のスカラー場 $f(\boldsymbol{r})$ に対して、$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}f(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$ が言えますので、

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla}\times\{-\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r})\} = \boldsymbol{0} \tag{3.71}$$

が導けます。つまり、静電界渦なしの法則は、静電界の式から数学的に導き出せることが分かります。

第4章　導体と静電容量

4.1　導体の性質

導体とは、それを構成している原子内の電子の一部が自由に移動できる物質です。一般には、金属をイメージすれば十分です。自由に電子が移動できますので、電界をかけると電子が移動して「電流が流れる」ことになります。

自由電子の存在から、導体について以下の電気的性質が言えます。

- 導体自体は正負の電荷が等量であり、周囲に電界がないとき正負の電荷は均一に存在します (これを「電荷がない」と言います)。
- 導体内では電界は常に $\mathbf{0}$ になります。なぜなら、電界があればそれによって電荷が移動しますので、移動し終わったときは電界が $\mathbf{0}$ になっています (逆に言えば、電界が $\mathbf{0}$ になるまで移動します)。

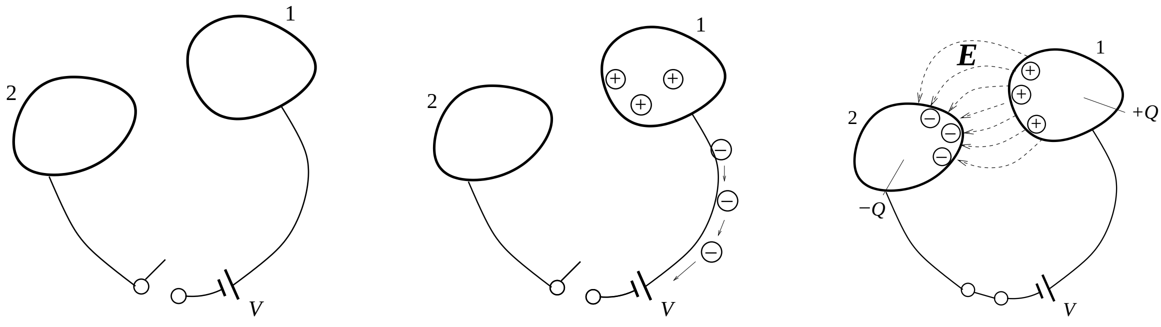
  また、内部で電界が $\mathbf{0}$ なので、電位差が存在せず、金属内は等電位です。
- 導体には正または負の電荷を外から与えることができます。このとき、導体全体での正負の電荷は偏った状態となります。
- 導体に電荷を与えたとき、偏った分の電荷 (与えた分の電荷) は、導体表面に存在します。なぜなら、仮に導体内部にあったとすると、その周囲に電界ができ、電荷が移動するからです。結局、偏った電荷が導体表面に行くまで移動することになります [1]。
- 導体表面の電界は $\mathbf{0}$ ではありませんが、その向きは常に導体表面に垂直 (法線方向) になります。なぜなら、表面に平行な成分 (接線成分) があると、表面の二点間で電位差が生じ、それに沿って電流が流れるからです。つまり、接線成分が 0 になるまで電流が流れます。
- 一つの導体の表面の電位はどこでも等しくなります。異なっていれば、等しくなるまで電荷が移動するからです (導体表面は等電位面である、と言えます)。

導体の周囲に電界があると、導体表面に電荷が発生し (それまで正負が同じ位置にあって中和していた電荷が、電界によって正負が異なる位置に現れる、という意味です)、導体内の電界が $\mathbf{0}$ となって、導体表面に電荷が現れます。この現象を**静電誘導**と呼びます。

導体を「絶対に電位 0」の場所に導線でつなぐことを**接地**と言います。「絶対に電位 0」というのは、例えば地球のように十分大きな物体のことで、電荷が多少増えたり減ったりしても電位は変わらず、影響ないほど大きい、ということを意味します。接地のことを「グランドにつなぐ、グランドをとる」とか「アースにつなぐ」と言います。

接地した導体に静電誘導を起こさせると、偏った電荷だけを導体に誘導させることができます。その状態でグランドから絶縁することで電荷を取り出すことができます。

[1]「偏った電荷と等しい電荷量が導体表面に現れる」というのが正しい表現です。例えば導体の中心の方に電荷を与えたとき、その電荷そのものが表面まで移動するわけではありません。偏った電荷は少し移動し、またその周囲の中和していた電荷も移動し、ということが各場所で起きて、最終的に表面に現れると思って下さい。



(a) 二つの導体　(b) 電源が片方の導体から、もう片方に電荷を移動させる　(c) $\pm Q$ の電荷がたまる

図 4.1: 二導体間に電位差を与えたとき。実際には導体 1 の電荷が導体 2 に移動するのでなく、導体 1 の電荷はちょっと移動し、導線内の電荷がまたちょっと移動し…、と玉突きで、導体 2 に電荷が蓄えられる。

4.2　静電容量

4.2.1　静電容量とコンデンサ

二つの導体に電源で電位差 V [V] を与えることを考えます (図 4.1)。片方の導体には正の電荷 $+Q$ [C] が、もう一方の導体には負の電荷 $-Q$ [C] が生じます (電源が、一方の導体から電荷を取り去って、もう一方の導体へと移すということをしていることになります。つまり電源は仕事をしています)。

与える電位差 V と生じる電荷 Q は比例します。その比例係数、即ち電位差 1 V 当たりに生じる電荷の量を**静電容量**と呼びます。

静電容量が大きいほど、同じ電位差で大きな量の電荷が生じます。二導体間の電位差を V [V]、それぞれの導体に $\pm Q$ [C] の電荷が現れたとき、静電容量 C との関係は

$$Q = CV \tag{4.1}$$

と表されます。静電容量 C の単位は [F](Farad; ファラッド) = [C/V] です。

効率よく電荷が蓄えられるよう二導体を構成した回路素子を**コンデンサ**と呼びます。コンデンサは様々な形状、材質で作られています。そして二導体間には様々な電界分布ができますが、電気回路的には静電容量というパラメタだけ分かれば、どう電界ができているかは関係ありません (電気回路の授業では「静電容量 C [F] のコンデンサがあり $\cdots$」とだけ書かれます)。しかし電磁気学ですと、二導体の構成に対して、その間にどのような電界ができるか、というのを取り扱うことが問題となってきます。

4.2.2　静電容量の求め方

静電容量を求めるには、二導体の一方に $+Q$ [C]、他方に $-Q$ [C] 与えたときの導体間の電位差 を、与えた電荷によって生じた電界から求め、Q/V から静電容量 C を計算します。

(1) **平行平板間の静電容量:**　二枚の十分に広く (面積 S [m^2])、間隔 d [m] が十分に狭い平行導体平板を考えます。それぞれに $\pm Q$ [C] 与えたとき、平板に電荷が $\pm Q/S$ の面電荷密度で分布し、平板間では均一な電界ができます。平板は無限に広いとみなすことにします。このとき出来る電界は平板間では一定で $\boldsymbol{E} = -\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}\hat{\boldsymbol{z}}$ となります。従って、電位差は平板間を積分して

$$V = -\int_C \boldsymbol{E} \bullet d\boldsymbol{r} = \int_0^d \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\hat{\boldsymbol{z}} \bullet \hat{\boldsymbol{z}} dz = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}, \qquad \therefore C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{4.2}$$

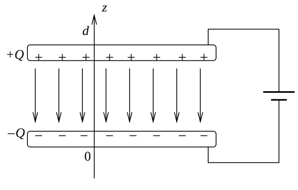


図 4.2: 平行平板

(2) **同心球導体間の静電容量:** 内導体半径を a_1 [m]、外導体の内半径を a_2 [m]、外半径を a_3 [m] とする、同心球の二導体間の静電容量は以下のようにして求められます。内導体に $+Q$ [C]、外導体に $-Q$ [C] を与えたとき、両導体間にできる電界は中心からの距離 r [m] のみに依存し、$\boldsymbol{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}$ となります (球の中心を原点にしています)。積分経路を $\boldsymbol{r}(s) = (a_2 - s)\hat{\boldsymbol{r}}, 0 \leqq s \leqq (a_2 - a_1)$ とすると、電位差は

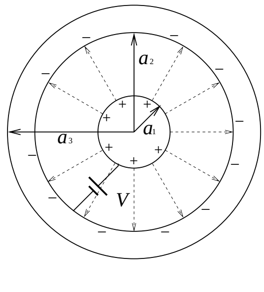


図 4.3: 同心球導体

$$V = -\int_0^{a_2 - a_1} \frac{Q(a_2 - s)\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi\varepsilon_0 (a_2 - s)^3} \bullet (-\hat{\boldsymbol{r}} ds) = -\int_{a_2}^{a_1} \frac{Qr\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \bullet \hat{\boldsymbol{r}} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{a_2}^{a_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)$$

$$\therefore C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}} \tag{4.3}$$

となります ($a_2 - s = r$ の積分変数の変換を途中で用いました)。

(3) **孤立導体球の静電容量:** 孤立導体球の静電容量というのがときどき問題に出てきます。これは、空中に導体球が一つだけあるときの静電容量になります (大きな静電容量は得られないので、コンデンサとしては役立ちませんが)。

これまでと同様、電荷 $+Q$ [C] を与えたときの電位 V [V] を計算して、その比から求めます。$-Q$ [C] はどこにあるのかというと、「無限の遠くにある」ことになります。電位 V が無限の遠くから電荷を持ってきたときを基準にしているからです。

半径 a_1 [m] の孤立導体球に電荷 $+Q$ [C] を与えたときの導体表面の電位は $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a_1}$ [V] となります。従って、静電容量は $C = 4\pi\varepsilon_0 a_1$ [F] になります。

これは、式 (4.3) において、$a_2 \to \infty$ としたときに (外部導体を無限の遠くに持っていったときに) 等しくなることが分かります。

(4) **同軸円筒導体間の静電容量:** 内導体半径を a_1 [m]、外導体の内半径を a_2 [m] とする、二つの同軸の円筒導体が平行に置かれているとき、二導体間の単位長さ当たりの静電容量は以下のようになります[2]。電荷密度として、内導体に $+\lambda$ [C/m]、外導体に $-\lambda$ [C/m] を与えたとき、両導体間にできる電界は中心からの距離 ρ [m] のみに依存し、$\boldsymbol{E}(\rho) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \rho^2}\boldsymbol{\rho}$ となります。積分経路を $\boldsymbol{\rho} = (a_2 - s)\hat{\boldsymbol{\rho}}, 0 \leqq s \leqq (a_2 - a_1)$ とすると、電位差は

$$V = -\int_0^{a_2 - a_1} \frac{\lambda(a_2 - s)\hat{\boldsymbol{\rho}}}{2\pi\varepsilon_0 (a_2 - s)^2} \bullet (-\hat{\boldsymbol{\rho}} ds) = -\int_{a_2}^{a_1} \frac{\lambda\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}}{2\pi\varepsilon_0 \rho^2} \bullet \hat{\boldsymbol{\rho}} d\rho = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\frac{a_2}{a_1} \tag{4.4}$$

となります。長さ l [m] あたりに $l\lambda$ [C] たまるので、長さ l における静電容量は

$$C = \frac{l\lambda}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\log\frac{a_2}{a_1}} \quad [\mathrm{F}] \tag{4.5}$$

となり、単位長さ当たりは以下となります。

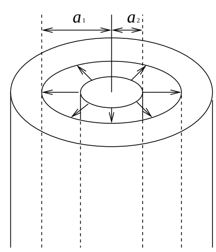


図 4.4: 同心円筒導体

$$C = \frac{\lambda}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\log\frac{a_2}{a_1}} \quad [\mathrm{F/m}] \tag{4.6}$$

[2] 長さが無限ですので、静電容量は無限になってしまいます。そこで、ここでは単位長さ当たりの静電容量について考えています。

4.3　静電エネルギー

4.3.1　コンデンサに蓄えられるエネルギー

コンデンサは電気的なエネルギーが蓄えられています。

電源が仕事をして、二導体の間で電荷を移動させましたので、その仕事の分だけのエネルギーが蓄えられます。

このエネルギーは、コンデンサを充電したのち (電荷 Q [C] を蓄えたのち)、電源から離して別の回路につなげば取り出すことができます。

コンデンサに蓄えられているエネルギーは以下のようにして求められます。静電容量 C [F] のコンデンサに、全く電荷がない状態 (電荷 0 [C], 電位差 0 [V]) から、一方の電極から徐々に電荷を他方の電極へと移します。途中の段階として、電荷 q [C] が現れ、電位差が v [V] になっているものとします ($q = Cv$)。ここから微小な電荷 dq [C] を移したときに要する仕事 dW [J] は $dW = vdq = \dfrac{q}{C}dq$ となります。q が 0 [C] のときから Q [C] になるまでこれを繰り返しますので、全体でなした仕事は

$$W = \int dW = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 \quad [\mathrm{J}] \tag{4.7}$$

となり、これだけのエネルギーがコンデンサに蓄えられていることになります。

4.3.2　電磁場に蓄えられるエネルギー

コンデンサに蓄えられているエネルギーは、コンデンサの電極間にできている電界に蓄えられているとも言えます。単位体積当たりに蓄えられる電界のエネルギー w [J/m^3] は次式で与えられます。

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2}|\boldsymbol{E}|^2 \quad [\mathrm{J/m^3}] \tag{4.8}$$

このことを、平行平板コンデンサの場合について考えましょう。面積 S [m^2]、電極間の距離 d [m] のコンデンサの静電容量は $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$、電界の大きさ E と電位差 V との関係は $V = Ed$ なので、コンデンサに蓄えられるエネルギー W は

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d}E^2 d^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2(Sd) \tag{4.9}$$

となります。ここで、Sd は電極間の空間の体積ですので、単位体積当たり $\dfrac{\varepsilon_0}{2}E^2$ のエネルギーがその体積にわたって蓄えられている、というふうに見ることができます。

☞ 他のコンデンサについても成立するか、確かめてみましょう。

4.4　三導体以上への拡張 (導体系の解析)

導体に与えた電荷と、それによる導体の電位の関係は、三導体以上へと拡張できます。それには、電位係数や容量係数といったものを用いて表現をします。

4.4.1　電位係数

導体が N 個ある場合を考え、それぞれ導体 1 から導体 N までの番号がついているものとします。

1 番目の導体に電荷 Q_1 [C] を与えたときに、各導体の電位が $V_1, V_2, \cdots, V_N$ [V] になったとき、

$$V_1 = p_{11}Q_1, \quad V_2 = p_{21}Q_1, \quad \cdots, \quad V_N = p_{N1}Q_1 \tag{4.10}$$

のように表現します。

また、2 番目の導体に電荷 Q_2 [C] を与えたときに、各導体の電位が $V_1', V_2', \cdots, V_N'$ になったとき、同様に

$$V_1' = p_{12}Q_2, \quad V_2' = p_{22}Q_2, \quad \cdots, \quad V_N' = p_{N2}Q_2 \tag{4.11}$$

と表現できます。

それでは、「1 番目の導体に電荷 Q_1 [C] を与えて、2 番目の導体に Q_2 [C] 与えたとき」の各導体の電位 $V_1'', V_2'', \cdots, V_N''$ はいくらになるでしょうか。

この答えは、先の結果を合計したものになります。つまり、

$$V_1'' = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2, \quad V_2'' = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2, \quad \cdots, \quad V_N'' = p_{N1}Q_1 + p_{N2}Q_2 \tag{4.12}$$

となります。

これは (当たり前のようですが) 大事なことで、これを拡張すると、各導体に $Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$ を与えたときの、各導体の電位 $V_1, V_2, \cdots, V_N$ は

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

となります。この p_{ij} [F^{-1}] を電位係数と呼びます。

p_{ij} は、j 番目の導体だけに単位正電荷 (1 C) 与えたときの、i 番目の導体の電位と等しいことになります。

電位係数の性質: 電位係数にはいくつかの性質があります。

(1) j 番目の導体に正電荷を与えたとき、各導体の電位が上がりますが、j 番目の導体が一番電位が高くなることは予想できるかと思います。これは式で言うと

$$p_{jj} \geqq p_{ij} \tag{4.14}$$

となります。

(2) どこかの導体に正電荷を与えたとき、各導体の電位は負にならないことが予想できるかと思います。j 番目の導体に 1 C 与えたときの i 番目の導体の電位は電位係数 p_{ij} そのものです。従って、一般に

$$p_{ij} \geqq 0 \tag{4.15}$$

であることが言えます。

(3) これはなかなか説明が難しいですが、

$$p_{ij} = p_{ji} \tag{4.16}$$

という性質があります (j 番目の導体に、ある電荷を与えたときの i 番目の導体の電位と、i 番目の導体に同じ電荷を与えたときの j 番目の導体の電位は等しい)。これを説明するは Green の相反定理 [3] を用いるのが良いのですが、ちょっと長くなりますので、この講義からは省きます。知りたい人は文献 [4] を参照して下さい。

---

[3] G. Green はイギリスの物理学者

[4] 卯本, 電磁気学, 昭晃堂 (初版) の p. 68 など

例題.　図 4.3 の内部導体を導体 1、外部導体を導体 2 とする。このときの電位係数を導け。
(解) まず、外導体 2 のみに電荷 Q [C] を与えたとき、内導体の電荷は 0 C のままで、外導体の表面内は全て等電位で $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a_3}$ になります。従って、$Q_2 = Q, Q_1 = 0, V_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a_3} = V_1$ より、

$$\begin{bmatrix} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a_3} \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ Q \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

ここから、$p_{12} = p_{22} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 a_3}$ を得ます。

次に、内導体のみに電荷 Q [C] を与えたとき、外導体の内側表面に $-Q$ [C]、外側表面に $+Q$ [C] が現れます。外導体の電位は $V_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a_3}$ であり、内導体の電位はそれより $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2}\right)$ だけ高くなります。従って、

$$\begin{bmatrix} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} Q \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

より、$p_{11} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3}\right)$、$p_{21} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 a_3}$ となります。まとめると次式になります。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a_3} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a_3} & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a_3} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

例題[5]**.**　電位係数行列が既知の二つの導体系 (導体 1, 導体 2) がある。導体 1 だけ電荷 Q [C] を帯電させ、その後に細い導線で導体 1, 2 間をつないだとき[6]、導体 1, 2 に蓄えられる電荷 Q_1, Q_2 を、電位係数を用いて表しなさい。
(解) 電位係数 p_{ij} とします。導線で接続したとき、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

となります。

導線でつないでいるので、両導体は同電位となりますので $V_1 = V_2$ です。従って、

$$p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 \tag{4.21}$$

が言えます。また、電荷保存則より、$Q = Q_1 + Q_2$ ですので、この二式を連立して解けば

$$Q_1 = \frac{p_{22} - p_{12}}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}} Q \tag{4.22}$$

$$Q_2 = \frac{p_{11} - p_{21}}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}} Q \tag{4.23}$$

4.4.2　容量係数と誘導係数

前節とは逆に、各導体を基準電位から $V_1, V_2, \cdots, V_N$ [V] だけ上昇させたときに、各導体に蓄えられる電荷を $Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$ [C] とします。この関係は

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1N} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{N1} & q_{N2} & \cdots & q_{NN} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

[5] 東工大 OCW の小田先生・淺田先生「電磁気学 I」講義ノートの問題からの引用です。
[6]「細い導線」というのは、その導線を用いることで電位係数に影響を与えない、という意味です。

と表現できます。ここで、q_{ii} を容量係数、q_{ij} $(i \neq j)$ を誘導係数と呼びます。

q_{ij} の値を知るには、j 番目の導体の電位を 1 V とします (無限遠と細い導線でつないで、1 V の電源をつけます)。また、j 番目以外の導体は 0 V とするため、無限遠と細い導線でつないで接地します。このとき、i 番目の導体にある電荷を測ることで q_{ij} が得られます (図 4.5)。

容量係数、誘導係数の性質:　以下のような性質があります。

- 電位係数行列の逆行列が、容量係数・誘導係数の行列になります。
- j 番目の導体を 1 V にしたとき、正電荷が j 番目の導体に無限遠から運ばれますので、
$$q_{jj} > 0 \tag{4.25}$$
と言えます (容量係数は正)。
- j 番目の導体を 1 V にしたとき、接地している他の導体には静電誘導で負電荷が現れますので、
$$q_{ij} \leqq 0 \tag{4.26}$$
と言えます (誘導係数は負)。

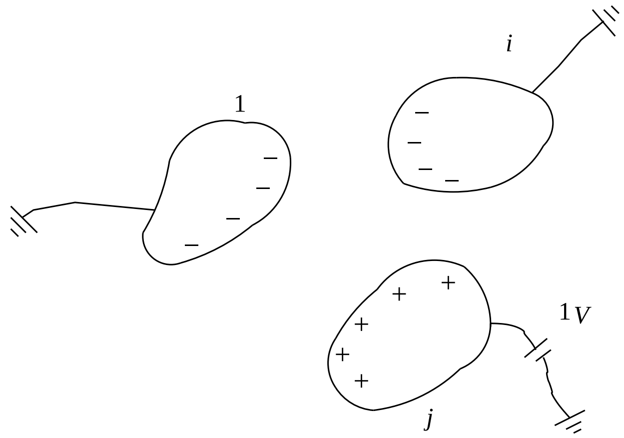


図 4.5: 導体系と容量係数・誘導係数の決定

- j 番目の導体を 1 V にしたとき、接地している他の導体には静電誘導で負電荷が現れますが、j 番目の導体にある正電荷以上には静電誘導されません。従って、
$$q_{jj} \geqq -\sum_{i=1(i\neq j)}^{N} q_{ij} \quad \rightleftarrows \quad \sum_{i=1}^{N} q_{ij} \geqq 0 \tag{4.27}$$
が言えます。
- 電位係数のときと同様、
$$q_{ij} = q_{ji} \tag{4.28}$$
が言えます。

例題[7]**.**　図 4.6 のように静電遮蔽をしたとき、導体 1 と導体 3 が互いに関係がなくなります。このときの容量係数・誘導係数行列を導出せよ。

(解) 三導体系ですので、一般的に以下のように書けます。

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

導体 1 のみ電位 V_1 としましょう。このとき導体 1 に Q [C] の電荷が生じたとします。

導体 2 は接地されているので 0 V、導体 2 の外側は 0 V の等電位面であり、その外側には電界はできませんので、導体 3 も 0 V となります。また、導体 2 の内側には静電誘導によって $-Q$ [C] の電荷が生じ、導体 3 は電界がなく電位も 0 であり電荷は生じません。従って、

[7]東工大 OCW の小田先生・淺田先生「電磁気学 I」講義ノートの問題からの引用です。

$$\begin{bmatrix} Q \\ -Q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}V_1 \\ C_{21}V_1 \\ C_{31}V_1 \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

となります。ここから、

$$C_{11} = -C_{21}, \quad C_{31} = 0 \tag{4.31}$$

が導けます。

逆に導体 3 に電位 1 V を与えたときを考えれば、同様の考察から

$$C_{33} = -C_{23} \tag{4.32}$$

が言えます。

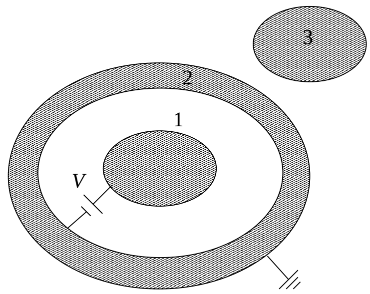


図 4.6: 静電遮蔽のときの導体系

結局、$C_{ij} = C_{ji}$ という性質も用いれば、

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & -C_{11} & 0 \\ -C_{11} & C_{22} & -C_{33} \\ 0 & -C_{33} & C_{33} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

と言えます。

この式は、$Q_1 = C_{11}V_1 - C_{11}V_2$ より、Q_1 は V_3 とは関係なく、また Q_3 も V_1 とは関係ないことを言っています。

例題.　二導体を考え、二導体間の静電容量 C [F] と容量係数・誘導係数との関係を導け。

(解) 二導体のときの式は

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

で与えられます。コンデンサを考えたとき、$Q_1 = Q, Q_2 = -Q, V_1 = V_2 + V$ となりますので、これを代入して V_2 を削除すると、

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{q_{11}q_{22} - q_{12}^2}{q_{11} + 2q_{12} + q_{22}} \tag{4.35}$$