第6章　真空中の静磁場の法則

電場とは別の種類の力を及ぼすものとして**磁場**が存在します。

磁場の研究は、天然に存在する磁石間に働く力の作用を調べることから始まりました。その長い研究を経て、磁力は “電流間に働く力” ということが分かりました。

さらに、これは直接電流間に働く力というよりも、“電流が周囲に**磁場**を起こし、その磁場中に置かれた別の電流が、磁場から力を受ける” と解釈した方が、より多くの現象を説明する際に好都合であることが明らかになりました。

そこで、ここではその結論を先取りして**電流によってできる磁場**を求めることから話を始めます。電流が時間的に変動しないとき (かつ、電場も時間的に変動しないとき)、できる磁場を**静磁場**と呼びます。

なお、ここで “磁場” というのは、“電流によってできた周囲に磁気的な変化が起きた状態” を示しており、磁界 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ [A/m] と磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ [T] を含む概念です。このうち、磁束密度から述べています。

6.1　磁場

6.1.1　電流間に働く力と磁場の考え方

2 つ以上の電流が置かれているとき、電流間に力が働き、互いに反対方向の力を受けます。これを、“直接電流間に力が働いている” と解釈するのでなく、“一方の電流が周囲に影響を与え、その影響下において別の電流があると力を受ける” と解釈するようにします。この電流周辺の、他の電流に力を及ぼす影響のことを**磁場**と呼びます。

基本的な磁場の量として、この講義では**磁束密度** $\boldsymbol{B}$ を用います。単位は [T] (Tesla; テスラ) です。なお、電流周辺のどこでも力を受けるので、磁束密度は “場” です。そこで、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ と書くこととします。

6.1.2　磁場の方向と強さの定義

磁束密度はベクトル量ですので、方向と大きさがあります。そこで、最初に磁束密度の強さと方向をどう定義するか、について述べます。

電場 (電界)$\boldsymbol{E}$ [V/m] の強さと方向は、試験電荷 q [C] を電場中において、その試験電荷に働く力 (クーロン力) の大きさ F [N] と方向から定義できました (電界の強さ $|\boldsymbol{E}|$ は $|\boldsymbol{E}| = F/q$ で与えられ、その方向は力の方向と同じになります)。

これと同様に、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ [T] の強さと方向を調べるには、“試験電流” を磁場中に置く必要があります。

試験電流は、一定の強さで流れる定常電流 I [A] であり、その一部の微小な Δr [m] の部分に働く力を調べます。

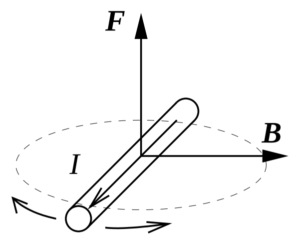


図 6.1: 試験電流を力と垂直な面内で回転し、力を最大にする

働く力に対し、この微小な電流の部分を垂直にします。この力に垂直な面内で電流を回転すると、どこかで力の大きさが最大になるところが見つかります。このときの力の大きさを F [N] とすると、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ [T] の強さ $|\boldsymbol{B}|$ は、

$$|\boldsymbol{B}| = \frac{F}{I\,\Delta r} \tag{6.1}$$

で与えられます。従って、単位 [T](テスラ) は [T] = [N/A·m] = [kg/A·s^2] です。

また、磁束密度の向きは電流が流れる向きと力の向きの両方に直角であり、“電流の方向から磁束密度の方向に右ねじを回したときに、ねじの進む方向が働く力の方向” となるような向きと定めます。

以上の事を、数式で表現すると、$\boldsymbol{F} = I\Delta r\hat{\boldsymbol{l}} \times \boldsymbol{B}$ となります (数式で述べるとたった一行の数式であり、いかに簡単に述べることができるかが分かると思います)。$\hat{\boldsymbol{l}}$ は電流の流れる方向を表す単位ベクトルです。

この磁場中に電流を置くと働く力は**アンペール力**と呼ばれます。

6.2　直流電流がつくる静磁場 — ビオ=サバールの法則

直流電流の周囲には静磁場ができます。静磁場の磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ [T] を求めるには、電流の微小部分 (電流素片) がつくる磁束密度を求め、それを全電流にわたって積分することで得られます。

電流がつくる磁束密度は、ビオ=サバールの法則で求められます。

6.2.1　線電流のときのビオ=サバールの法則

理想的に十分細い線状導体に電流 I [A] が流れているものとします。この電流の経路 C を、パラメタ s を持つベクトル関数 $\boldsymbol{r}_0(s)$ で表します (パラメタ s が増える方向を電流 I の正の方向とします)。このとき、線素ベクトル $d\boldsymbol{r}_0 = \dfrac{d\boldsymbol{r}_0}{ds}ds$ にその電流値 I を乗じた $I\,d\boldsymbol{r}_0$ [A·m] を**電流素片**と呼びます。

この電流素片が位置 $\boldsymbol{r}$ に作る磁束密度 $d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ [T] は

$$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\boldsymbol{r}_0 \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^3} \tag{6.2}$$

で与えられ、これをビオ=サバールの法則 (Biot=Savart’s law) と呼びます。μ_0 は真空の透磁率と呼ばれ、SI 単位系では $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m が用いられます。ここで、[H] はヘンリー (Henry) と呼ばれる単位で、コイルのインダクタンスの単位です。

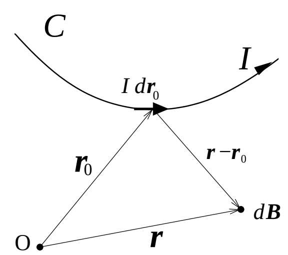


図 6.2: 電流素片 $I\,d\boldsymbol{r}$ が作る磁束密度 $d\boldsymbol{B}$

電流全体が作る磁束密度は、各電流素片の作る磁束密度の合計をとる (実際には無限小の磁束密度を、無限個の合計をとる=積分する) ことで得られます。

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \int_C d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \int_C \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\boldsymbol{r}_0 \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^3} \tag{6.3}$$

電流分布が与えられたときの磁束密度 $B(\boldsymbol{r})$ の求め方　上記のビオ=サバールの法則を用いることで、線電流がどのような形状をしていても、その線電流がつくる磁束密度を求めることができます。

(1) 与えられた電流の流れる経路を、範囲を持つ一つのパラメタ (ここでは s とします) のベクトル関数 $\boldsymbol{r}_0(s) = x_0(s)\hat{\boldsymbol{x}} + y_0(s)\hat{\boldsymbol{y}} + z_0(s)\hat{\boldsymbol{z}}$ で表現します。**電流 I の正方向にパラメタが増えるように取ることが重要です。**パラメタの範囲は無限遠 ($s \to \pm\infty$) となる場合があります。(※ ベクトル関数として $\boldsymbol{r}$ でなく、$\boldsymbol{r}_0$ を使っている理由は、$\boldsymbol{r}$ は求めたい磁束密度の位置を指すのに用いているためです)

(2) 線素ベクトル $d\boldsymbol{r}_0 = \dfrac{d\boldsymbol{r}_0}{ds}ds$ を求めます。結局、**電流素片 $I\,d\boldsymbol{r}_0$ が得られます**。

(3) パラメタの範囲に渡って、ビオ=サバールの法則で計算します。

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\boldsymbol{r}_0 \times \{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(s)\}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(s)|^3}$$

例 1: 無限長直線電流がつくる磁束密度:　線電流の一例として、無限長に伸びた直線電流が作る磁束密度を求めます。

磁束密度を求めるための座標系として、デカルト座標系を考え、z 軸に沿って $+z$ 方向に電流 I [A] が流れているものとします。y 軸上の点 $\boldsymbol{r} = y\hat{\boldsymbol{y}}$ での磁束密度を求めます。

$\boldsymbol{r}_0(z_0) = z_0\hat{\boldsymbol{z}}$ における電流素片 $I\,d\boldsymbol{r}_0 = I\frac{d\boldsymbol{r}_0}{dz_0}dz_0 = I\,dz_0\hat{\boldsymbol{z}}$ が $\boldsymbol{r}$ につくる磁束密度 $d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を求めます。

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = y\hat{\boldsymbol{y}} - z_0\hat{\boldsymbol{z}}, \quad |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| = (y^2 + z_0^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$I\,d\boldsymbol{r}_0 \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = I\,dz_0\hat{\boldsymbol{z}} \times (y\hat{\boldsymbol{y}} - z_0\hat{\boldsymbol{z}}) = I\,dz_0 y(\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{y}}) = -I\,y\,dz_0\hat{\boldsymbol{x}}$$

より、

$$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\boldsymbol{r}_0 \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{-Iy\,dz_0}{(y^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{6.4}$$

となります。全電流素片からの寄与より、磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ が求められます。

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{-Iy\,dz_0}{(y^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\boldsymbol{x}} = -\frac{\mu_0 I\,y}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz_0}{(y^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{6.5}$$

この積分は、$z_0 = y\tan\theta$ と積分変数変換することで計算できます。

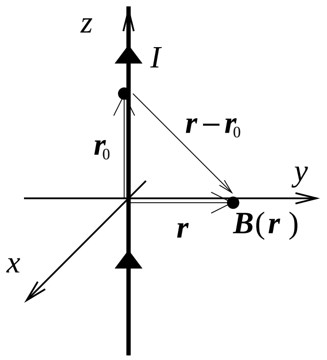


図 6.3: z 軸上に置かれた線電流のつくる磁束密度

6.2.2 面電流密度、体積電流密度として分布するときのビオ=サバールの法則

面電流密度として分布するときのビオ=サバールの法則は以下のようになります。位置 $\boldsymbol{r}_0$(二つのパラメタを持つベクトル関数) にある面電流密度 $\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}_0)$ [A/m] に関して、微小面素 dS_0 [m^2] を考えたとき、電流素片は $\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}_0)dS_0$ [A·m] となります。従って、ビオ=サバールの法則は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \iint_S \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}_0)dS_0 \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^3} \tag{6.6}$$

となります。MKSA 単位系において、面電流密度 $\boldsymbol{J}_S$ は [A/m] の単位を持ちます。

金属ストリップ中を流れる電流が作る磁束密度　幅 w [m]、厚さは極めて薄い金属 (金属ストリップと呼ぶ) に一様に電流 I [A] が流れているものとします。z 軸上の点における磁束密度 $\boldsymbol{B}(0,0,z)$ を求めます。

電流が分布している面は $\boldsymbol{r}_0 = x_0\hat{\boldsymbol{x}} + y_0\hat{\boldsymbol{y}}$ $(-\infty \leqq x_0 \leqq \infty,\ -w \leqq y_0 \leqq w)$ で与えられます。電流密度分布は、$z = 0$ の面で $-w \leqq y_0 \leqq w$ の範囲にのみ $\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}_0) = \frac{I}{w}\hat{\boldsymbol{x}}$ [A/m] の面電流密度であり、他の点では $\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}_0) = \boldsymbol{0}$ です。微小面素は $dS_0 = \left|\frac{\partial\boldsymbol{r}_0}{\partial x_0} \times \frac{\partial\boldsymbol{r}_0}{\partial y_0}\right| dx_0\,dy_0 = dx_0dy_0$ となり、この面素領域の電流素片は $\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}_0)dS_0 = \frac{I}{w}dx_0dy_0\hat{\boldsymbol{x}}$ となります。観測点 (求めたい磁束密度の点=観測点l) は $\boldsymbol{r} = z\hat{\boldsymbol{z}}$ より、$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = -x_0\hat{\boldsymbol{x}} - y_0\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$、$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| = (x_0^2 + y_0^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$、

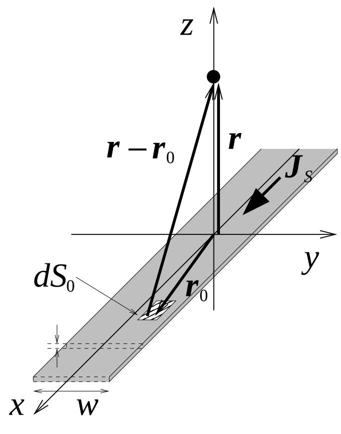


図 6.4: 金属ストリップ中の電流がつくる磁束密度

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(0,0,z) &= \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\frac{I}{w}\hat{\boldsymbol{x}}dx_0dy_0 \times (-x_0\hat{\boldsymbol{x}} - y_0\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}})}{(x_0^2 + y_0^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\mu_0\frac{I}{w}}{4\pi}\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}(-y_0\hat{\boldsymbol{z}} - z\hat{\boldsymbol{y}})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}dy_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi w}\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}(-y_0\hat{\boldsymbol{z}} - z\hat{\boldsymbol{y}})\frac{2}{y_0^2 + z^2}dy_0 \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi w}(-\hat{\boldsymbol{z}})\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}\frac{y_0}{y_0^2 + z^2}dy_0 - \frac{\mu_0 I}{2\pi w}z\hat{\boldsymbol{y}}\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}\frac{1}{y_0^2 + z^2}dy_0 = 0 - \frac{\mu_0 I}{\pi w}\tan^{-1}\frac{w}{2z}\hat{\boldsymbol{y}}
\end{aligned} \tag{6.7}$$

(体積) 電流密度として分布するときは以下のようになります。位置 $\boldsymbol{r}_0$ にある電流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}_0)$ [A/m^2] に関して、微小体積 dV_0 [m^3] を考えたとき、電流素片は $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}_0)dV_0$ [A·m] となります。従って、ビオ=サバールの法則は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \iiint_V \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}_0)dV_0 \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} \tag{6.8}$$

となります。

6.3　真空中の磁場の法則

ここでは、定常電流 (時間的に一定の電流) によってできる磁場がどのような性質を持っているか、どのような磁場でも必ず持っている性質について説明します。これを定量的に表したものが法則です。自然に存在する磁場に共通の性質を述べただけなので、これらの法則は直接なにかの役に立つわけではありません (役に立たせるためにつくった公式などとは異なります)。しかし、この法則に合わないような (定常電流によってできる) 磁場は存在しない、ということは理解しておいて下さい。

6.3.1　真空中のアンペールの法則

法則と数式による記述

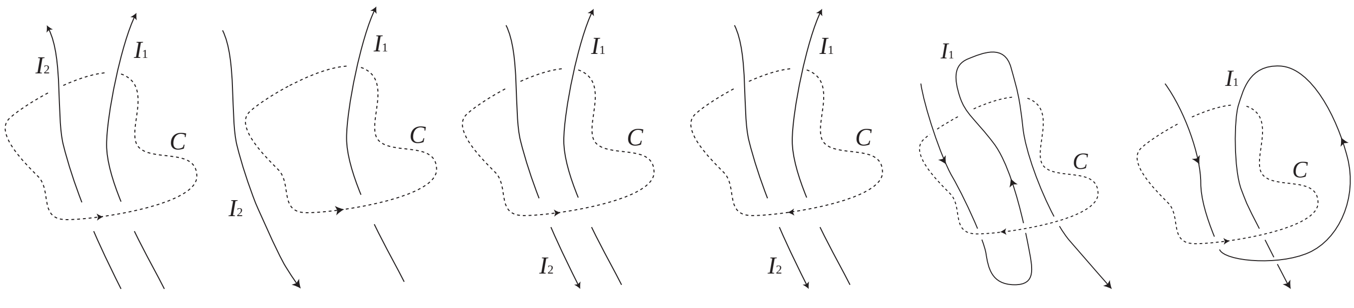
真空中のアンペールの法則

磁束密度 $\boldsymbol{B}$ [T] の任意の周回路 C での周回積分は、その周 C の中を貫く電流 I [A] の μ_0 倍に等しい。ただし、周回積分の向きと電流の正の向きは右ねじの法則に従う。この法則を**真空中のアンペールの法則**という。数式で記述すると、

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_S \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{S} \tag{6.9}$$

となる。ただし、S は C を縁とする任意の開曲面である。周囲は真空とする。
アンペールの法則は微分形を用いると次のように書ける。

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \tag{6.10}$$



(a) $\mu_0(I_1+I_2)$　(b) $\mu_0 I_1$　(c) $\mu_0(I_1-I_2)$　(d) $\mu_0(-I_1+I_2)$　(e) $\mu_0 I_1$　(f) $-2\mu_0 I_1$

図 6.5: 周回積分路 C で $\oint_C \boldsymbol{B} \bullet d\boldsymbol{r}$ を計算した結果。(線が途切れているように見えるのは立体を表していると解釈する)

(a) 左辺 $\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \bullet dr$ の意味:

磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ [T] は空間のあらゆる点に存在する量であり、「場」です。その空間において、任意の (何でもよい) 一周するループ C を描くことを考えます。また、一周する方向を決めておきます。ループ C 上のある

点 $\boldsymbol{r}$ における接線方向を持ち、微小な長さを持つベクトル (向きは先に定義した一周する向き)、即ち線素ベクトルを $d\boldsymbol{r}$ とします。

その点における磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ と、そのベクトル $d\boldsymbol{r}$ の内積 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\bullet d\boldsymbol{r}$ が計算できます (C 上の各点で $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ も $d\boldsymbol{r}$ も変化します)。この内積をループ C の一周に渡って合計、即ち積分を行います。それが $\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\bullet d\boldsymbol{r}$ です。

※ ◯ のついた積分記号 $\oint$ は「一周する積分」を意味します (始点と終点はどこでも構いません)。

(b) 右辺 $\mu_0 \iint_S \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\bullet d\boldsymbol{S}$ の意味:

面積分 $\iint_S \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\bullet d\boldsymbol{S}$ は、開曲面 S を貫く電流を意味します。ここで S は先に決めたループ C を縁とする任意の開曲面 S です。面 S には「正の方向 ($d\boldsymbol{S}$ の向き)」が定義され、それは先のループ C の向きに右ねじを回したときにねじが進む方向となります [1]。

開曲面 S 上の点 $\boldsymbol{r}$ における微小な一部の微小面積 (面素)dS を考えます。dS はほぼ平らとしてよく、dS に垂直で正の方向を向いた単位ベクトルを $\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r})$ とします (単位法線ベクトル。場所によって異なるので $\boldsymbol{r}$ の関数としました)。ここで面素ベクトル $d\boldsymbol{S}=\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r})dS$ が定義できます。面素ベクトルと $\boldsymbol{r}$ における電流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ [A/m^2] の内積 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\bullet d\boldsymbol{S}$ が計算できますが、これは dS を通過する電流を表します。

全開曲面 S を通過する全電流 I [A] は $I=\iint_S \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\bullet d\boldsymbol{S}$ で計算できます。この μ_0 倍が真空中のアンペールの法則の右辺です。なお、ループ C を縁とする開曲面は無限に定義することができますが、そのどれをとっても構いません。ループを通過した電流は、開曲面をどこにとっても必ず通過し、その電流に変化は生じないからです。

例) 真空中のアンペールの法則が成立していることの確認　無限に長い直線状電流がある場合に、その電流によってできる磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ に対して、$\oint_C \boldsymbol{B}\bullet d\boldsymbol{r}$ を計算します。

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は $z=0$ の xy 平面において、$\boldsymbol{B}(x,y,0)=\dfrac{\mu_0 I(-y\hat{\boldsymbol{x}}+x\hat{\boldsymbol{y}})}{2\pi(x^2+y^2)}$ で与えられます。周回積分路 C として、原点を中心にした $z=0$ の xy 平面内での半径 a の円を考えます (向きとして、右ねじが $+z$ 方向に進む向きとします)。

周上の点 $\boldsymbol{r}$ と x 軸との角度を ϕ とすると、周上の点 $\boldsymbol{r}$ は ϕ をパラメタとするベクトル関数 $\boldsymbol{r}(\phi)=a\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}+a\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}=x(\phi)\hat{\boldsymbol{x}}+y(\phi)\hat{\boldsymbol{y}}$ で表現でき、ϕ の範囲は $0\leqq\phi<2\pi$ です (周回積分なので始点はどこでもよく、例えば $\frac{\pi}{2}\leqq\phi<\frac{5\pi}{2}$ などでも構いません)。

$\boldsymbol{r}(\phi)$ における 線素ベクトルは $d\boldsymbol{r}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{d\phi}d\phi=a\,d\phi(-\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}+\cos\phi\hat{\boldsymbol{y}})$ となります。従って、

$$\boldsymbol{B}(\,\boldsymbol{r}(\phi)\,)\bullet d\boldsymbol{r}=\frac{\mu_0 I(-a\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}+a\cos\phi\hat{\boldsymbol{y}})}{2\pi a^2}\bullet a\,d\phi(-\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}+\cos\phi\hat{\boldsymbol{y}})=\frac{\mu_0 I}{2\pi}d\phi$$

より、

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\bullet d\boldsymbol{r}=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I}{2\pi}d\phi=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\phi=\mu_0 I \qquad (6.11)$$

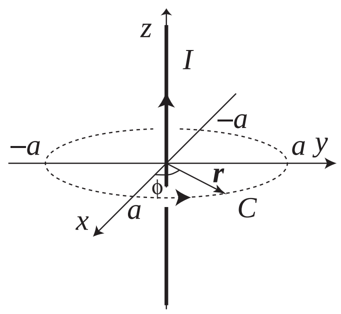


図 6.6: 無限長の電流と周回積分路

となり、C の中心を流れる電流 I の μ_0 倍となっています。従って、この場合において、アンペールの法則が成立していることが確認できたと言えます。

[1] C と S の関係のイメージ: C の形をした針金を想起して下さい。この針金をシャボン水に付けるとシャボンの膜が張られます。この膜が S です。弱く息を吹けば膜は変形してふくらむが縁の針金は変化しません。変形した膜を S としてもよく、いずれにせよ膜 S は針金 C を縁としています。これが「S はループ C を縁とする任意の開曲面」のイメージです。

6.3.2　アンペールの法則の応用により、磁束密度 $B(\boldsymbol{r})$ を求める

真空中のアンペールの法則は、磁束密度の周回積分と電流の関係を表すものであり、**空間の各点の磁束密度を求めるものではありません。** しかし、電流が特殊な形状のとき、周回積分路 C を適切に選ぶことでアンペールの法則を応用して磁束密度を求めることができます。ただ、「アンペールの法則の理解の確認のため」に、このような問題が試験に出されることが多いので、そのために説明しておきたいと思います。

アンペールの法則の応用として磁束密度を求めることができる電流の形状は、電流密度分布が対称性を持っていて、従って磁束密度も対称である場合の、ほんの一部です。また、周回積分路 C は、磁束密度に平行または垂直 (内積が 0) であり、平行な部分では磁束密度の強さが一定となるような経路をとる必要があります。つまり、アンペールの法則を応用して磁束密度を求めることができるのは、たいへん限られたケースです。以下はその主なものについて説明します。

無限長直線電流:　z 軸に沿って $+z$ 方向に流れる無限長直線電流 I [A] の場合、対称性より磁束密度は ϕ 成分のみを持ち ($\boldsymbol{B}(\rho,\phi) = B_\phi(\rho)\hat{\boldsymbol{\phi}}$)、その強度は電流からの距離のみに依存します。電流を中心とする半径 ρ の円を積分路 C にとると、

$$\oint_C \boldsymbol{B} \bullet d\boldsymbol{r} = B_\phi 2\pi\rho = \mu_0 I \quad \therefore B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}, \quad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{6.12}$$

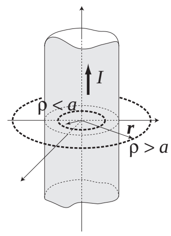


図 6.7: 円筒型電流

無限長円筒型電流:　半径 a [m] の円筒内に一様に電流 I [A] が流れているときを考えます。磁束密度は ϕ 成分のみ 0 でない値を持ちます ($\boldsymbol{B}(\rho,\phi) = B_\phi(\rho)\hat{\boldsymbol{\phi}}$) ので、半径 ρ [m] の円を積分路としますが、$\rho < a$ のときは積分路内を貫く電流が異なるので分けて考えます。円筒の軸に垂直な面において、単位面積当たり $\dfrac{I}{\pi a^2}$ [A/m^2] の密度で電流が流れていますので、

$$\oint \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r} = B_\phi 2\pi\rho = \begin{cases} \mu_0 \frac{I}{\pi a^2}\pi\rho^2, & \rho < a \\ \mu_0 I, & \rho \geqq a \end{cases} \quad \therefore B_\phi(\rho) = \begin{cases} \frac{\mu_0 \rho I}{2\pi a^2}, & \rho < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}, & \rho \geqq a \end{cases} \tag{6.13}$$

無限長ソレノイド　円筒状に導線を一様に密に巻いたコイルをソレノイドと呼びます。単位長さあたり N 回巻かれている無限長のソレノイドを考えます (電流は I [A])。ソレノイドが無限に長いので、磁束密度はソレノイドの軸方向成分のみ持ちます。

ソレノイド外部で A~D の積分路を考えます。AD、BC では磁束密度の寄与はありません。AB と CD にできる磁束密度で、電流はないので

$$B_{\mathrm{AB}} \cdot l - B_{\mathrm{DC}} \cdot l = 0 \quad \therefore B_{\mathrm{AB}} = B_{\mathrm{DC}} \tag{6.14}$$

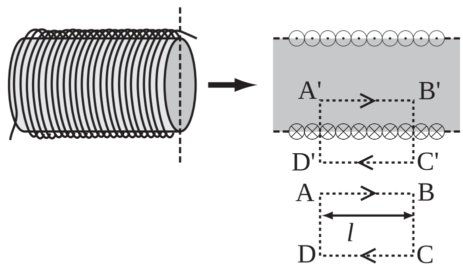


図 6.8: 無限長ソレノイドと断面図

CD を無限遠にとると $B_{\mathrm{DC}} = 0$、従って $B_{\mathrm{AB}} = 0$ となります。結局、ソレノイド外では $|\boldsymbol{B}| = 0$ となります。A'B'C'D' の積分路を考えると

$$B_{\mathrm{A'B'}} \cdot l - B_{\mathrm{D'C'}} \cdot l = \mu_0 l N I$$

$B_{\mathrm{D'C'}} = 0$ より、$B_{\mathrm{A'B'}} = \mu_0 N I$ を得ます。ソレノイド内はどこでも $|B| = \mu_0 N I$ となります。

無端ソレノイド　図 6.9 のように円形の断面を持つソレノイド (全 N 巻き) に電流 I を流したときを考えます。磁束密度は同心円方向にできます。中心からの半径 ρ の円を積分路とします。ρ がソレノイド内部のとき、

$$B_\phi 2\pi\rho = \mu_0 N I \quad \therefore B_\phi = \frac{\mu_0 N I}{2\pi\rho} \tag{6.15}$$

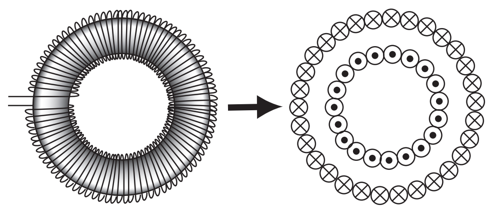


図 6.9: 無端ソレノイド

ソレノイド外部では電流は 0 なので $B_\phi = 0$ となります。

6.3.3 磁場のガウスの法則

磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を任意の閉曲面 S で面積分した結果は 0 となります。式で書くと

$$\oiint_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{S} = 0 \tag{6.16}$$

即ち、ある点から四方にベクトル場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ が放射状にできるような分布は存在しないということです。あるいは、ある閉曲面に出入りする磁力線について見たとき、閉曲面に入る磁力線の数と出てゆく磁力線の数は等しいということです。単磁荷が見つかっていないという事実もこの法則に反映しています。

磁場のガウスの法則は、微分形では次のように書けます。

$$\boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{6.17}$$

真空中の電場と磁場の法則の比較

	電場 (電界) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$	磁場 (磁束密度) $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$
周回積分	$\oint \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r} = 0$	$\oint \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r} = \mu_0 \iint \boldsymbol{J} \bullet d\boldsymbol{S} = \mu_0 I$
閉曲面積分	$\oiint \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho(\boldsymbol{r}) dV = \frac{Q}{\varepsilon_0}$	$\oiint \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{S} = 0$
源がつくる場	点電荷: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)}{\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i\rvert^3}$ 線状電荷: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\boldsymbol{r}_0) dr_0 (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0\rvert^3}$ 面状電荷: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\boldsymbol{r}_0) dS_0 (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0\rvert^3}$ 体積状電荷: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}_0) dV_0 (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0\rvert^3}$	点磁荷は存在しない 線状電流: $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\boldsymbol{r}_0 \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0\rvert^3}$ 面状電流: $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}_0) dS_0 \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0\rvert^3}$ 体積状電流: $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}_0) dV_0 \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0\rvert^3}$

演習問題

(1) 半径 a [m] の円の周上に電流 I [A] が流れている。この円の中心軸 (中心を通り、円の面に垂直な軸) 上の磁束密度を求めよ。

解) 円を xy 平面 (中心を原点) に置き、電流は $+x$ 方向から $+y$ 方向に測った角度 ϕ が増える方向に流れているものとする。中心軸上の点は $\boldsymbol{r} = z\hat{\boldsymbol{z}}$ で表される。この電流の経路は $\boldsymbol{r}_0(\phi_0) = a\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} + a\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{y}},\ 0 \leqq \phi_0 \leqq 2\pi$ とおける。

$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = -a\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} - a\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$ となり、$\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0\rvert = (a^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$ である。電流素片は $I\,d\boldsymbol{r}_0 = Ia(-\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi_0\hat{\boldsymbol{y}})d\phi_0$ より、Biot-Savart の法則を適用して、

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{B} =& \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a(-\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi_0\hat{\boldsymbol{y}})d\phi_0 \times (-a\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} - a\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}})}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ =& \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{z(\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi_0\hat{\boldsymbol{y}}) + a\hat{\boldsymbol{z}}}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} a\,d\phi_0 \end{aligned}$$

円の周上の電流全ての寄与を評価することで磁束密度 $\boldsymbol{B}(\,\boldsymbol{r}(z)\,) = \boldsymbol{B}(z)$ [T] が求められる。

$$\boldsymbol{B}(z) = \int d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}\{z(\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi_0\hat{\boldsymbol{y}}) + a\hat{\boldsymbol{z}}\}d\phi_0 = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\boldsymbol{z}}$$

※ 円筒座標系を用いると以下のようになる。$\boldsymbol{r} = z\hat{\boldsymbol{z}},\ \boldsymbol{r}_0(\phi_0) = a\hat{\boldsymbol{\rho}}(\phi_0),\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(\phi_0) = -a\hat{\boldsymbol{\rho}}+z\hat{\boldsymbol{z}},\ |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0| = (a^2+z^2)^{\frac{1}{2}},\ I\,d\boldsymbol{r}_0 = I\dfrac{d\boldsymbol{r}_0}{d\phi_0}d\phi_0 = Ia\hat{\boldsymbol{\phi}}(\phi_0)d\phi_0,$

$$\boldsymbol{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Ia\boldsymbol{\phi}(\hat{\phi}_0)d\phi_0 \times (-a\hat{\boldsymbol{\rho}}(\phi_0) + z\hat{\boldsymbol{z}})}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}(z\hat{\boldsymbol{\rho}} + a\hat{\boldsymbol{z}})d\phi_0 = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\boldsymbol{z}}$$

なお、ここで、$\displaystyle\int_0^{2\pi}\hat{\boldsymbol{\rho}}(\phi_0)d\phi_0 = 0$ を用いた。(電流は円筒座標系における対称性があるので、計算におけるベクトルの成分が少なくて済む)

(2) z 軸に沿って $+z$ 方向に、$-\dfrac{a}{2} \leqq x \leqq \dfrac{a}{2}, -\dfrac{b}{2} \leqq y \leqq \dfrac{b}{2}$ の範囲に一様に電流 I [A] が流れている。このとき、$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}}$ にできる磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

$$(\text{Ans.}):\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi ab}\left\{b\log\frac{\frac{b^2}{4}+(x+\frac{a}{2})^2}{\frac{b^2}{4}+(x-\frac{a}{2})^2} + 4(x+\tfrac{a}{2})\tan^{-1}\frac{\frac{b}{2}}{x+\frac{a}{2}} - 4(x-\tfrac{a}{2})\tan^{-1}\frac{\frac{b}{2}}{x-\frac{a}{2}}\right\}\hat{\boldsymbol{y}}$$

6.4　磁場によって働く力

6.1 節で述べたように、磁場中におかれた電流、即ち運動する荷電粒子には力が働きます。その力を使って磁束密度を定義しました。

今回は、その静磁場によって働く力について、詳しく説明をします。

運動する荷電粒子に働く力と電流に働く力は同じですが、異なった形態をしていますので、話を整理して別々の形で述べます。

6.4.1　アンペール力

磁場中の電流には力が働きます。あるいはその磁場自体も別の電流が作るものですので、「二つの電流間には力が働く」と言うこともできます。

磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ があるとき、位置 $\boldsymbol{r}_0$ にある電流素片 $I\,d\boldsymbol{r}_0$ に働く力 $d\boldsymbol{F}$ は

$$d\boldsymbol{F} = I\,d\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_0)\ [\text{N}] \tag{6.18}$$

で与えられます。この力をアンペール力と呼びます。

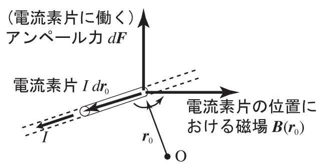


図 6.10: 電流素片 $I\,d\boldsymbol{r}_0$ に働くアンペール力

例 1．2 つの無限長直線電流間に働く力:

2 つの直線電流 I [A] が平行に $+z$ 方向に流れており、一つは原点、もう一つは $\boldsymbol{r} = a\hat{\boldsymbol{y}}$ の点を通過するものとします。まずは $y = a$ にある電流の $-\frac{l}{2} \leqq z \leqq \frac{l}{2}$ にかかる力を計算しましょう。

$y = a$ にある電流の $-\frac{l}{2} \leqq z \leqq \frac{l}{2}$ の部分を表す位置ベクトルは、パラメタ z_0 を用いて $\boldsymbol{r}_0 = a\hat{\boldsymbol{y}} + z_0\hat{\boldsymbol{z}}\left(-\frac{l}{2} \leqq z_0 \leqq \frac{l}{2}\right)$ で表現できます。

このときの電流素片は $I\,d\boldsymbol{r}_0 = I\,dz_0\hat{\boldsymbol{z}}$ となります。

原点を通る電流によって $\boldsymbol{r}$ にできる磁束密度は $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\mu_0 I(-y\hat{\boldsymbol{x}} + x\hat{\boldsymbol{y}})}{2\pi(x^2+y^2)}$ なので、$\boldsymbol{r}_0$ において $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_0) = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{\boldsymbol{x}}$ となります。

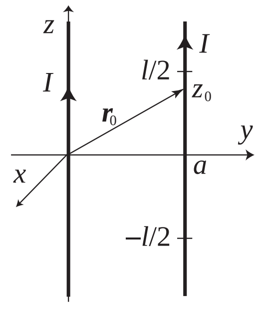


図 6.11: 2 本の無限長直線電流

この磁束密度が電流素片に及ぼす力 $d\boldsymbol{F}$ は

$$d\boldsymbol{F} = I\,d\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_0) = I\,dz_0\hat{\boldsymbol{z}} \times \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{\boldsymbol{x}}\right) = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi a}dz_0\hat{\boldsymbol{y}} \tag{6.19}$$

となります。従って、$-\frac{l}{2} \leqq z \leqq \frac{l}{2}$ の範囲では、それを積分して

$$\boldsymbol{F} = \int d\boldsymbol{F} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi a}dz_0\hat{\boldsymbol{y}} = -\frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi a}\hat{\boldsymbol{y}} \tag{6.20}$$

となります。$-y$ 方向ですので、「引き寄せられる」方向となります。無限長電流全体では力は無限大になってしまいますが、長さ l [m] の部分には、これだけの力が作用していることになります。

補足: A(アンペア) の定義: SI 単位系において、A(アンペア) は 7 つの基本単位の一つです。1 A は次のように定義されます。先の例において、$l = 1$ m、$I = 1$ A、$y_0 = 1$ m とすると、$|\boldsymbol{F}| = \dfrac{\mu_0}{2\pi} = 2\times10^{-7}$ N となりますが、これが 1 A の定義となります。つまり、「1 m 離した平行な無限長電流に等しい電流を流したとき、1 m 当たりに働く力が 2×10^{-7} N となる電流の大きさ」が 1 A です。

例 2. 一様磁場中のコイルに作用する力と力のモーメント:

図 6.12 に示すように、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = B_0\hat{\boldsymbol{y}}$ の一様磁場中に、一辺が a, b の長方形コイルがあり、矢印の向きに電流 I が流れていることを考えます。このコイルの中心が固定されており x 軸から ϕ 傾いているときに、コイルに働く力とそのモーメントを求めます。

①の辺では、電流の経路を表すベクトル関数: $\boldsymbol{r}_0(z_0) = \frac{b}{2}\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{b}{2}\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} + z_0\hat{\boldsymbol{z}} (-\frac{a}{2} \leqq z_0 \leqq \frac{a}{2})$ となります。従って、電流素片は $I\,d\boldsymbol{r}_0 = I\,dz_0\hat{\boldsymbol{z}}$ で与えられます。この電流素片に働くアンペール力は $d\boldsymbol{F}_1 = I\,dz_0\hat{\boldsymbol{z}} \times B_0\hat{\boldsymbol{y}} = -B_0 I dz_0\hat{\boldsymbol{x}}$ となりますので、全アンペール力はそれを積分して、以下で与えられます。

$$\boldsymbol{F}_1 = -B_0 I\hat{\boldsymbol{x}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz_0 = -B_0 I a\hat{\boldsymbol{x}} \tag{6.21}$$

次に電流素片に働く力のモーメント $d\boldsymbol{N}_1$ を求めます。

$$d\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{r}_0 \times d\boldsymbol{F}_1 = \left(\frac{b}{2}\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{b}{2}\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} + z_0\hat{\boldsymbol{z}}\right) \times (-B_0 I dz_0\hat{\boldsymbol{x}}) = \left(\frac{b}{2}\sin\phi\hat{\boldsymbol{z}} - z_0\hat{\boldsymbol{y}}\right) B_0 I dz_0 \tag{6.22}$$

従って、①の辺全体では、これを合計すれば良いことになります。

$$\boldsymbol{N}_1 = \int d\boldsymbol{N}_1 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} B_0 I \left(\frac{b}{2}\sin\phi\hat{\boldsymbol{z}} - z_0\hat{\boldsymbol{y}}\right) dz_0 = B_0 I\frac{ab}{2}\sin\phi\hat{\boldsymbol{z}} \tag{6.23}$$

次に②の辺について求めます。やり方はまったく同様です。経路は、$\boldsymbol{r}_0(s) = -\frac{b}{2}\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{b}{2}\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} - s\hat{\boldsymbol{z}}, (-\frac{a}{2} \leqq s \leqq \frac{a}{2})$ で与えられます。電流素片は $Id\boldsymbol{r}_0 = -I\,ds\hat{\boldsymbol{z}}$ となり、これにかかるアンペール力は $d\boldsymbol{F}_2 = -I\,ds\hat{\boldsymbol{z}} \times B_0\hat{\boldsymbol{y}} = B_0 I ds\hat{\boldsymbol{x}}$ となりますので、辺全体ではこれを積分して $\boldsymbol{F}_2 = B_0 I a\hat{\boldsymbol{x}}$ を得ます。

力のモーメントについては、電流素片に対するモーメントが $d\boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{r}_0 \times d\boldsymbol{F}_2 = \left(\frac{b}{2}\sin\phi\hat{\boldsymbol{z}} - s\hat{\boldsymbol{y}}\right) B_0 I ds$ となりますので、全体では $\boldsymbol{N}_2 = \int d\boldsymbol{N}_2 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} B_0 I \left(\frac{b}{2}\sin\phi\hat{\boldsymbol{z}} - s\hat{\boldsymbol{y}}\right) ds \quad = B_0 I\frac{ab}{2}\sin\phi\hat{\boldsymbol{z}}$ となります。

③の辺については、$\boldsymbol{r}_0(s) = \left(\frac{b}{2} - s\right)\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \left(\frac{b}{2} - s\right)\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{a}{2}\hat{\boldsymbol{z}}, (0 \leqq s \leqq b)$ で経路が与えられますので、電流素片は $I\,d\boldsymbol{r}_0 = -I\,ds(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}})$ となります。この電流素片に作用する力は $d\boldsymbol{F}_3 = -I\,ds(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}) \times B_0\hat{\boldsymbol{y}} = -B_0 I ds\cos\phi\hat{\boldsymbol{z}}$ となりますので、辺全体では $\boldsymbol{F}_3 = -B_0 Ib\cos\phi\hat{\boldsymbol{z}}$ となります。

力のモーメントについては、電流素片に対するモーメントが $d\boldsymbol{N}_3 = \boldsymbol{r}_0 \times d\boldsymbol{F}_3 = \left(\frac{b}{2} - s\right)\cos^2\phi B_0 Ids\hat{\boldsymbol{y}} - \left(\frac{b}{2} - s\right)\sin\phi\cos\phi B_0 Ids\hat{\boldsymbol{x}}$ ですので、全体では以下のようになります。

$$\boldsymbol{N}_3 = \int d\boldsymbol{N}_3 = \int_0^b B_0 I(\cos^2\phi\hat{\boldsymbol{y}} - \sin\phi\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}})\left(\frac{b}{2} - s\right)ds = \boldsymbol{0} \tag{6.24}$$

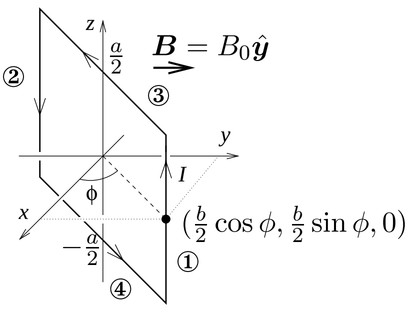


図 6.12: 磁場中のコイル

④の辺については、経路は $\boldsymbol{r}_0(s) = s\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + s\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} - \frac{a}{2}\hat{\boldsymbol{z}}, (-\frac{b}{2} \leqq s \leqq \frac{b}{2})$ となり、電流素片は $Id\boldsymbol{r}_0 = I(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}})ds$ で与えられます。電流素片に作用する力は $d\boldsymbol{F}_4 = Id\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{B} = I(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}})ds \times B_0\hat{\boldsymbol{y}} = B_0 I\cos\phi ds\hat{\boldsymbol{z}}$ となりますので、辺全体に作用する力は $\boldsymbol{F}_4 = B_0 Ib\cos\phi\hat{\boldsymbol{z}}$ となります。

力のモーメントについては、電流素片に対するモーメントは $d\boldsymbol{N}_4 = \boldsymbol{r}_0 \times d\boldsymbol{F}_4 = (s\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + s\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} - \frac{a}{2}\hat{\boldsymbol{z}}) \times B_0 I\cos\phi ds\hat{\boldsymbol{z}} = B_0 Is(-\cos^2\phi\hat{\boldsymbol{y}} + \sin\phi\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}})ds$ となりますので、辺全体は $\boldsymbol{N}_4 = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} B_0 Is(-\cos^2\phi\hat{\boldsymbol{y}} + \sin\phi\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}})ds = \boldsymbol{0}$ となります。

結局、ループ全体はこれらを加えれば良いので、$\boldsymbol{N} = \sum_{i=1}^4 \boldsymbol{N}_i = B_0 Iab\sin\phi\hat{\boldsymbol{z}}, \quad \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^4 \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$ となります。つまり、力は働かない (移動はしない) が $\phi = 0$ となるように向きをかえる、ということになります。

6.4.2　ローレンツ力

磁場中を運動する荷電粒子には力が働くことが知られています。磁束密度 $\boldsymbol{B}$ [T] 中を電荷 q [C] の荷電粒子が速度 $\boldsymbol{v}$ [m/s] で運動していたとき、この粒子に働く力 $\boldsymbol{F}$ [N] は

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \tag{6.25}$$

で与えられます。$\boldsymbol{r}$ は、この時刻における電荷 q の位置です。電荷が電荷密度分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ で体積的に分布していたとき、位置 $\boldsymbol{r}$ において単位体積当たり

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \tag{6.26}$$

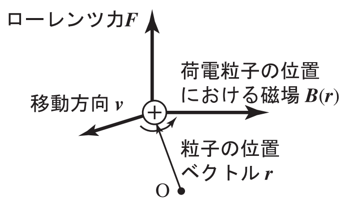


図 6.13: 荷電粒子に働くローレンツ力

の力を受けます。ここで $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ は、位置 $\boldsymbol{r}$ にある電荷が移動する速度ベクトルです。この電荷が領域 V 内においてのみ $\rho(\boldsymbol{r}) \neq 0$ とすると、全体で受ける力は

$$\boldsymbol{F} = \iiint_V \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})dV = \iiint_V \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})dV \tag{6.27}$$

となります。

一様磁場中における荷電粒子の運動:　一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = B_0\hat{\boldsymbol{z}}$ [T](B_0 [T] は定数) を考えます。この磁束密度中で $t = 0$ s において、正の電荷 q [C] の荷電粒子 (質量 m [kg]) が速度 $\boldsymbol{v} = v_0\hat{\boldsymbol{x}}$ [m/s] で、位置 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ にあるものとします。時刻 $t > 0$ における荷電粒子の位置 $\boldsymbol{r}(t)$ と速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を求めます。

運動方程式は

$$m\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = q\boldsymbol{v}(t) \times B_0\hat{\boldsymbol{z}} = qB_0\{v_x(t)(-\hat{\boldsymbol{y}}) + v_y(t)\hat{\boldsymbol{x}}\} \tag{6.28}$$

となりますので、成分ごとに表示すると次のようになります。

$$m\frac{dv_x}{dt} = qB_0 v_y(t), \quad m\frac{dv_y}{dt} = -qB_0 v_x(t) \tag{6.29}$$

初期条件 $v_x(0) = v_0, v_y(0) = 0$ を用いてこの連立微分方程式を解くと

$$v_x = v_0 \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right), \quad v_y = -v_0 \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) \tag{6.30}$$

となります。ベクトルで表記すると

$$\boldsymbol{v}(t) = v_0 \left\{ \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right)\hat{\boldsymbol{x}} - \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right)\hat{\boldsymbol{y}} \right\} \tag{6.31}$$

となります。また、時刻 t における荷電粒子の位置 $\boldsymbol{r}(t)$ は、初期条件 $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{0}$ を用いて、

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(0) + \int_0^t \boldsymbol{v}(t')dt' = \frac{mv_0}{qB_0}\left[\sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \left\{ \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right) - 1 \right\}\hat{\boldsymbol{y}} \right] \tag{6.32}$$

となります。

ホール効果　導体や半導体に電界を印加し電流が流れます。このとき、電界によって正の電荷または負の電荷 (キャリアと呼ぶ) が移動しています。

電界の向き (即ち、電流の流れている向き) に垂直に磁場を印加すると、キャリアはローレンツ力を受けます。このローレンツ力によって、キャリアは電界・磁場ともに垂直な方向のどちらかに多く存在することになり、この偏在による横方向 (電流とも磁場とも垂直な) 電界が生じることになります。

キャリアはローレンツ力とキャリア自身が生じさせた電界が釣り合ったところで平衡状態となります。このように、横方向電界 (あるいはそれによる電位差) が生じることをホール効果と呼びます。

力が、平衡した状態について考えましょう。キャリアが速度 $\boldsymbol{v}$ で移動しているものとします。磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が印加されているとすれば、ローレンツ力

$$\boldsymbol{F}_L = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{6.33}$$

が生じていることになります (正のキャリアなら $q > 0$、負のキャリアなら $q < 0$)。また、このキャリアの移動によって生じている、“ホール効果による電界 $\boldsymbol{E}_h$” による力 $\boldsymbol{F}_E = q\boldsymbol{E}_h$ とローレンツ力 $\boldsymbol{F}_L$ が釣り合っているので、次式が成立します。

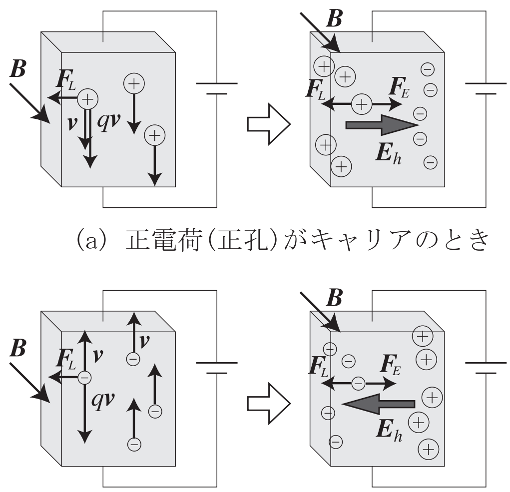
$$q\boldsymbol{E}_h + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \tag{6.34}$$

また、この材料中に N $[\mathrm{m}^{-3}]$ の密度でキャリアが存在しているとき、電流密度 $\boldsymbol{J}$ は $\boldsymbol{J} = qN\boldsymbol{v}$ となりますので、式 (6.34) 中に N をかけると $qN\boldsymbol{E}_h + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} = 0$ という式が得られます。ここから、ホール効果による電界は

$$\boldsymbol{E}_h = -\frac{1}{qN}\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} = -R\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \tag{6.35}$$

となります。ここで

$$R = \frac{1}{qN}\ [\mathrm{C}^{-1}\ \mathrm{m}^{-3}] \tag{6.36}$$



(a) 正電荷（正孔）がキャリアのとき

(b) 負電荷（電子）がキャリアのとき

図 6.14: ホール効果

はホール定数と呼ばれるものです。キャリアが正の場合、ホール定数は正、負のキャリアであればホール定数は負となります。

ホール効果は 19 世紀末に Hall によって発見されました。ホール効果の応用としては、半導体のキャリアの測定や、磁場のモニタ、電流のセンサ (クランプメータ) などに用いられています。

6.4.3　アンペール力とローレンツ力の関係

アンペール力とローレンツ力は磁場中で力を受ける電荷の形態が異なりますが、同じ力を表しています。ここでは同じ力であることを説明します。電流を移動する電荷群と表すことで両者を比較できます。

単位体積当たり N [m^{-3}] の q [C] の電荷が $\boldsymbol{v} = v_0\hat{\boldsymbol{l}}$ [m/s] で移動しているものとします。Δt [s] 間に、電荷の移動に垂直な、面積 ΔS [m^2] を通過した電荷 ΔQ [C] は

$$\Delta Q = qNv_0\Delta t\,\Delta S \tag{6.37}$$

となります。従って、電流 I [A] は以下で得られます。

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qNv_0\Delta S \tag{6.38}$$

この電流の微小部分 $\Delta\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{l}}\Delta r$ に働くアンペール力 $\boldsymbol{F}_A$ [N] は

$$\boldsymbol{F}_A = I\,d\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B} = I\hat{\boldsymbol{l}}\,\Delta r\times\boldsymbol{B} = qN\boldsymbol{v}\Delta S\,\Delta r\times\boldsymbol{B} = (N\Delta S\,\Delta r)q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{6.39}$$

となります。この右辺は $(N\Delta S\,\Delta r)$ 個の電荷が受けた全ローレンツ力の合計と等しいことが分かります。

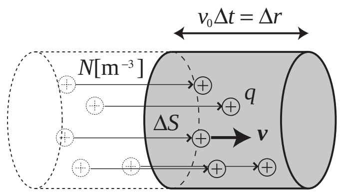


図 6.15: 移動する電荷群と電流