

第7章 磁性体

これまでは真空中の磁場について述べてきました。本章では、真空だけでなく「磁場と相互作用する(=磁場に影響を与える)物質」がある場合について述べます。

ある種類の物質は、磁場中に置かれると周囲の磁場を変化させることが知られています。そのような物質を磁性体と呼びます。ここでは、磁性体があるときの電磁気学の法則の取り扱いについて述べてゆきます。

7.1 磁化現象

磁場中に物質を置くと、その磁場の分布を乱すような物質が存在しています。そのような物質を磁性体と呼びます。磁性体は磁場中で磁化して、図 7.1 のような磁場をつくります。図 7.1(a) のような磁場をつくる物質を常磁性体、(b) を反磁性体と呼びます。

また、非常に強い常磁性を示すものを強磁性体と呼びます。常磁性や強磁性であれば磁石に引き寄せられることとなります。一方で、反磁性は磁石から離れてゆく挙動を示します(が、実際には、自分の重量を動かすほど強い反磁性の物質はないようです)。

なぜ磁化する物質とそうでない物質があるのかと言いますと、磁化を示す物質は、構成する原子や分子において、電子の軌道運動やスピンによる電流が流れているためです。その電流が周囲に磁場をつくるのですが、それぞれがランダムな向きときはキャンセルし合って磁場が現われません。外部磁場を印加することによって、電流の向きがそろうことで磁性を示す、とされています。

物質の温度が変われば性質が変化し、その物質が示す磁性も変化することが知られています。常温で強磁性の元素は、鉄(Fe)、ニッケル(Ni)、コバルト(Co)、ガドリニウム(Gd)のみです。また化合物では多数存在します(ネオジム磁石など)。

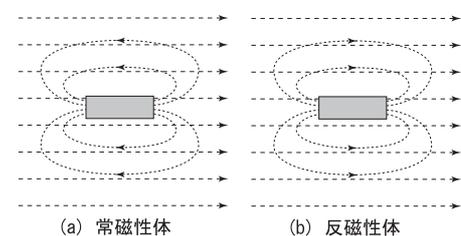


図 7.1: 磁性体と磁化

7.2 磁性体があるときの磁場の法則の修正

磁場の法則(微分形)は、真空中のときは磁束密度 $B(\boldsymbol{r})$ [T] を用いて

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad (7.1)$$

と表されました。この法則は磁性体があるときは磁界 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ [A/m] を導入して、次のような法則に修正されます。

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad (7.2)$$

磁束密度 \boldsymbol{B} と磁界 \boldsymbol{H} の関係は透磁率 μ [H/m] を用いて $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ と表されます。真空中においても真空の透磁率 μ_0 を用いれば \boldsymbol{H} も定義できますので、通常は式(7.2)を磁場の基本法則の式とします。

7.2.1 ベクトル・ポテンシャル

ベクトル解析の恒等式として、任意のベクトル場 $A(\mathbf{r})$ に対して $\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$ が成立します。

そこで磁場の法則 $\nabla \cdot B = 0$ から、 $B = \nabla \times A$ と表すこととします。この A [Wb/m = H·A/m] をベクトル・ポテンシャルと呼びます。

電流が存在したときに、磁束密度 B を求めることが困難だったり複雑だったりしたとき、その電流によるベクトル・ポテンシャル A を求め、その A の回転をとることで磁束密度 B を求める方が用意なケースがあります。

ベクトル・ポテンシャルは近年になり「観測できる物理量」として見直されていますが、本講義では「単なる磁束密度を求めるための補助関数」として扱います。

線電流があったときのベクトルポテンシャルは次式で与えられます。

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (7.3)$$

実際に、回転をとると

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \nabla \times \frac{I d\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \times I d\mathbf{r}_0 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C I d\mathbf{r}_0 \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = B(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (7.4)$$

となり、ビオ＝サバルの法則が得られます。

同様に体積状に分布する電流密度 $J(\mathbf{r})$ [A/m²] があったとは

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_0} \frac{J(\mathbf{r}_0) dV_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (7.5)$$

がベクトル・ポテンシャルを求める式となります。

7.2.2 磁気モーメント

原子、分子中の電子によるループ電流が磁性体の磁場となります。そこで微小なループ電流によるベクトル・ポテンシャルを求めます。

原点にある半径 a [m] の微小なループ電流が $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ につくるベクトル・ポテンシャルを求めます。微小とは、 $|\mathbf{r}| \gg a$ ということの意味します。

$$\mathbf{r}_0 = a \cos \phi_0 \hat{x} + a \sin \phi_0 \hat{y}, \quad I d\mathbf{r}_0 = Ia(-\sin \phi_0 \hat{x} + \cos \phi_0 \hat{y}) d\phi_0 \quad (7.6)$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - a \cos \phi_0) \hat{x} + (y - a \sin \phi_0) \hat{y} + z \hat{z} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1} &= \{(x - a \cos \phi_0)^2 + (y - a \sin \phi_0)^2 + z^2\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \{x^2 + y^2 + z^2 - 2a(x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0) + a^2\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \{r^2 - 2a(x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0) + a^2\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= r^{-1} \left\{ 1 - 2\frac{a}{r} \left(\frac{x}{r} \cos \phi_0 + \frac{y}{r} \sin \phi_0 \right) + \frac{a^2}{r^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (7.8)$$

ここで a/r の2次以上(高次項)を無視して、テイラー展開で近似計算します。

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1} &\approx r^{-1} \left\{ 1 + \frac{a}{r} \left(\frac{x}{r} \cos \phi_0 + \frac{y}{r} \sin \phi_0 \right) \right\} = r^{-1} \left\{ 1 + \frac{a \sin \theta}{r} (\cos \phi \cos \phi_0 + \sin \phi \sin \phi_0) \right\} \\ &= r^{-1} \left\{ 1 + \frac{a \sin \theta}{r} \cos(\phi - \phi_0) \right\} = \frac{1}{r} + \frac{a \sin \theta}{r^2} \cos(\phi - \phi_0) \end{aligned} \quad (7.9)$$

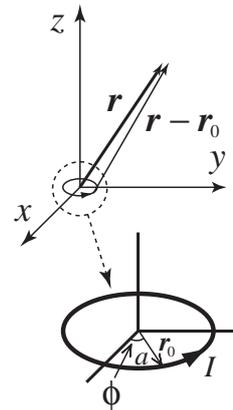


図 7.2: 電流ループ

従って、ベクトル・ポテンシャルの計算は次のようになります。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \left\{ -\sin \phi_0 \hat{x} + \cos \phi_0 \hat{y} + \frac{a \sin \theta}{r} (-\sin \phi_0 \hat{x} + \cos \phi_0) \cos(\phi - \phi_0) \right\} d\phi_0 \quad (7.10)$$

被積分関数の第 1, 2 項目は積分すると 0 となります。第 3 項目、第 4 項目はそれぞれ以下ようになります。

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi_0 \cos(\phi - \phi_0) d\phi_0 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{\sin \phi + \sin(2\phi_0 - \phi)\} d\phi_0 = \pi \sin \phi \quad (7.11)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi_0 \cos(\phi - \phi_0) d\phi_0 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{\cos \phi + \cos(2\phi_0 - \phi)\} d\phi_0 = \pi \cos \phi \quad (7.12)$$

従って、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin \theta}{4\pi r^2} (-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}) = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin \theta}{4\pi r^2} \hat{\phi} \quad (7.13)$$

となります。ここで、 $I \pi a^2 \hat{z} = \mathbf{m}$ とおくと、 $\hat{z} \times \hat{r} = (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \times \hat{r} = \sin \theta \hat{\phi}$ より、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times \hat{r}}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (7.14)$$

と書けます。この $\mathbf{m} = I S \hat{z}$ [$\text{A} \cdot \text{m}^2$] (S はループの面積) を磁気モーメントと呼びます¹。

7.2.3 磁化ベクトル

磁性体中では多くの磁気モーメントが様々な方向を向いて密に存在しています。周囲磁場があると、アンペール力によって磁場の方向を向くこととなります。

図 7.3、7.4 は、それを模式的に示した図です。

図 7.3 の左では、一様磁場中に置かれた微小電流ループの図です。このような配置だと、電流ループの上の方は、アンペール力で紙面手前に向いた力が働きます。また、下の方は、アンペール力で紙面奥向きの力が働きます。この力が働いて、図の右のような向きに回転します。この回転した向きになったとき、流れている電流によって、図の点線向きの磁場が加わるようになります。この磁場の方向は、背景磁場を強める方向です。

このように、微小電流ループが方向を変えますので、図 7.4 の左のようなバラバラの向きの電流ループの多くが、右のように同じ方向を向くことになり、全体として磁場が現れる、というのが磁化現象です。

では、これを数学的にどのように記述するかを考えていきましょう。数学的に記述できないと、定量的(どのくらいの量、磁化するのか)な評価ができません。

そこで、 r における単位体積あたりの磁気モーメントとして

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{m}_i}{\Delta V} \quad [\text{A/m}] \quad (7.15)$$

を定義します。級数は r の周囲の領域 ΔV [m^3] 内に含まれる磁気モーメントの合計をとるという意味です。この \mathbf{M} [A/m] を磁化ベクトルと呼びます。磁化ベクトルは、 r が磁性体の外では $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = 0$ とすればよいので、空間の全ての点で定義できるベクトル場です。

逆に言えば、微小体積 ΔV があったとき、その磁気モーメント \mathbf{m} は $\mathbf{m} = \mathbf{M} \Delta V$ で表されます。

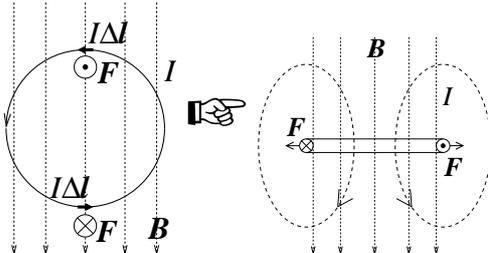


図 7.3: 磁場中の磁化電流が受ける力

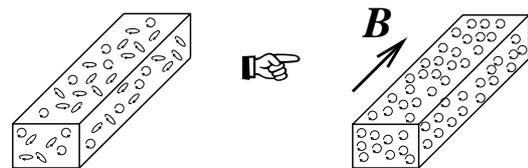


図 7.4: 磁化された磁性体

¹ $\mathbf{m} = \mu_0 I S$ [$\text{Wb} \cdot \text{m}$] と定義する教科書もあるので注意して下さい。

そこで、磁化ベクトル M が分布しているときのベクトル・ポテンシャルは次式で表されます。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_0} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) dV_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (7.16)$$

7.2.4 磁化電流と磁化ベクトルの関係

磁化する、即ち磁性体中の磁気モーメントが向きをそろえて周囲に磁場を作ると、電子による電流によって全体としての電流が現れることとなります。これを磁化電流と呼びます (図 7.5)。磁化電流は、とり出して電流として使えるわけではないのですが、それによって磁場が周囲に形成されることとなります。

一方で、最初に磁場を起こすために流す電流は、真電流と呼ばれます。

磁化電流を I_m [A]、磁化電流密度を J_m [A/m²] とすると、アンペールの法則は

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0(I + I_m), \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}_m) \quad (7.17)$$

と書けます。即ち、磁性体があることで電流が I [A] のみのときに比べ、磁場 B は強くなることとなります。

磁化電流密度 J_m と磁化ベクトル M の関係を導出しましょう。次の量を考えます。

$$\nabla_0 \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \quad (7.18)$$

$\nabla_0 \times$ は、 r_0 の座標に対する回転であることを意味します。ベクトル解析の公式 $\nabla \times (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \varphi \times \mathbf{A}$ より、 $\varphi = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$, $\mathbf{A} = \mathbf{M}$ として

$$\begin{aligned} \nabla_0 \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \nabla_0 \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0) + \nabla_0 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \\ &= \frac{\nabla_0 \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \end{aligned} \quad (7.19)$$

となります。従って、

$$\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = \frac{\nabla_0 \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \nabla_0 \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \quad (7.20)$$

という公式が導出できます。

導出した公式を、磁化ベクトルが分布しているときのベクトル・ポテンシャルの式 (7.16) に代入すると以下を得ます。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \iiint_{V_0} \frac{\nabla_0 \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dV_0 - \iiint_{V_0} \nabla_0 \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) dV_0 \\ &= \iiint_{V_0} \frac{\nabla_0 \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dV_0 - \iint_{S_0} \frac{d\mathbf{S}_0 \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \end{aligned} \quad (7.21)$$

この式変形で $\iiint_V \nabla \times \mathbf{A} dV = \iint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A}$ という公式を用いました。この公式の導出は本章末に掲載します。

上の式で、 V_0 の表面で $M = 0$ とすれば (そうなるように V_0 を大きくとれば) 第二項目はなくなります。従って、以下が導出できます。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \iiint_{V_0} \frac{\nabla_0 \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dV_0 \quad (7.22)$$

この式は、式 (7.5) と比較すると、 $\nabla_0 \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0)$ という電流密度によるベクトル・ポテンシャルと見ることができます。つまり、これが磁化電流密度 J_m となります。

$$\mathbf{J}_m(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (7.23)$$

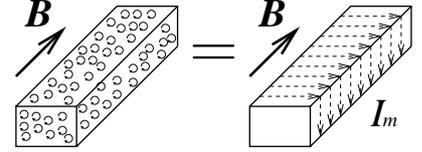


図 7.5: 全体の磁化電流

7.2.5 磁界 H の定義とアンペールの法則

ある周回路 C に対するアンペールの法則及び、磁化ベクトルと磁化電流密度の関係式:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}_m), \quad \mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (7.24)$$

より、

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_m = \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} \Leftrightarrow \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \nabla \times \mathbf{M} = \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J} \quad (7.25)$$

を得ます。ここで、 $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{r})$ を定義すると、

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J} \quad (7.26)$$

を得ます。今定義した $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ [A/m] を 磁界 と呼びます。磁界を導入することで、磁化電流密度 \mathbf{J}_m を考えずに、磁場を起こす真電流密度 \mathbf{J} のみでアンペールの法則が構成できることになります。そこで、今後は磁界に関する式 (7.26) を「アンペールの法則」としましょう。磁束密度は“真空中”のときのみ (磁性体が存在しないとき) のみの法則としておきます。

磁性体が存在するとき、磁化ベクトルを考えて磁場を扱うのは煩雑なので、磁界 \mathbf{H} を取り入れて \mathbf{M} は式に現れないようにします。またそのためには物質特有のパラメタを導入する必要があります。磁化 \mathbf{M} は磁界 \mathbf{H} と同じ向きなので

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \quad (7.27)$$

と書けます。ここで χ を磁化率と呼びます。代入すると、

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} \quad (7.28)$$

を得ます。 $\mu_0(1 + \chi) = \mu$ とおき、 μ [H/m] をその物質の 透磁率、 μ_0 との比 $\mu_r = \mu/\mu_0 = 1 + \chi$ を 比透磁率 と呼びます。 μ または μ_r を用いて

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (7.29)$$

として、磁性体があるときの磁場を扱います。鉄は $\mu_r = 5000$ (値に幅がある。印加磁場などで値が異なる)、化合物では 10^6 の値も可能 (強磁性体)、空気は 1.0000004 (常磁性体)、水は 0.999991 (反磁性体) です。

7.3 磁場 B, H の法則と境界条件

磁性体が存在するときの磁場の法則は

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (7.30)$$

となりました。または積分形で

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}, \quad \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (7.31)$$

となります。また $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ の関係があります (構成方程式、または構成関係式と呼ばれます)。 I は“真電流”です。

異なる透磁率を持つ 2 つの媒質の境界における磁場の法則 (境界条件) を導出します。図 7.6 に示すように、 $z = z_0$ で透磁率が異なるものとします。

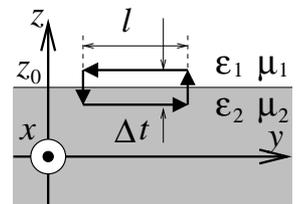


図 7.6: $z = z_0$ における媒質境界

磁界に関する境界条件: まずは、境界面に電流が流れていない場合を考えましょう。図に示した経路 C でアンペールの法則を適用します。

$$-H_y(x, y, z_0 + \frac{\Delta t}{2})l + H_y(x, y, z_0 - \frac{\Delta t}{2})l + H_z(x, y + \frac{l}{2}, z_0)\Delta t - H_z(x, y - \frac{l}{2}, z_0)\Delta t = 0 \quad (7.32)$$

となります。ここで、 $\Delta t \rightarrow 0$ とすると

$$H_y(x, y, z_0 - 0) = H_y(x, y, z_0 + 0) \quad (7.33)$$

となります。 y 成分はここでは一般には境界に対する接線成分なので

$$H_t(x, y, z_0 - 0) = H_t(x, y, z_0 + 0) \quad (7.34)$$

と書けます。即ち、境界面を電流が流れていないとき、磁界の(媒質境界に対する)接線成分は境界面において連続となります。

次に、境界面を面電流が流れている場合を考えます。面電流 J_x [A/m] を考えますと、

$$-H_y(x, y, z_0 + \frac{\Delta t}{2})l + H_y(x, y, z_0 - \frac{\Delta t}{2})l + H_z(x, y + \frac{l}{2}, z_0)\Delta t - H_z(x, y - \frac{l}{2}, z_0)\Delta t = J_x(x, y, z_0)l \quad (7.35)$$

となります。 $\Delta t \rightarrow 0$ としたとき、 H_z の項は 0 になりますが、面電流は無限に薄い面として存在していますので、0 になりません。従って、

$$H_y(x, y, z_0 - 0) = H_y(x, y, z_0 + 0) + J_x(x, y, z_0) \quad (7.36)$$

となり、磁界の接線成分は、面電流の分だけ不連続となります。

磁束密度に関する境界条件: $z = z_0$ を横切って、高さ Δh 、面積 ΔS の柱状の閉曲面でガウスの法則を考えると(図 7.7)

$$B_z(x, y, z_0 + \frac{\Delta h}{2})\Delta S - B_z(x, y, z_0 - \frac{\Delta h}{2})\Delta S + \iint_{\text{側面}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (7.37)$$

$\Delta h \rightarrow 0$ とすると

$$B_z(x, y, z_0 + 0) = B_z(x, y, z_0 - 0) \quad (7.38)$$

となります。 z 成分は一般には境界に対する法線成分なので

$$B_n(x, y, z_0 + 0) = B_n(x, y, z_0 - 0) \quad (7.39)$$

と書けます。即ち、磁束密度の(媒質境界に対する)法線成分は境界面において連続となります。

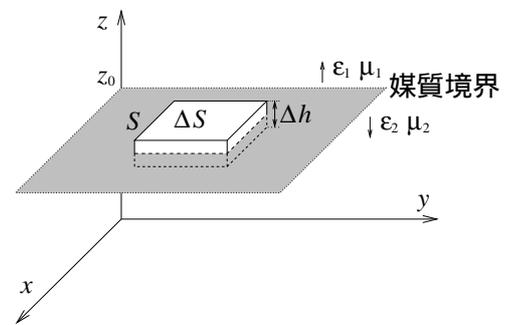


図 7.7: $z = z_0$ における媒質境界

透磁率の異なる媒質境界において、磁界 H は境界に対し接線成分が連続であり、磁束密度 B は法線成分が連続となる。

7.4 磁気回路

モーターや(電磁石とコーン紙を用いた)スピーカーは、磁性体中にできる磁場を利用して運動・振動などを得る機器です。これは、制御信号としての電気信号から磁場をつくり、その磁場を効率よく磁力として働かせる設計が必要です。

この磁性体を含む構造を、電気回路と見なして解析する方法があり、このときの構造を磁気回路と呼びます。効率のよい機器設計には磁気回路解析が重要となってきます。

ここでは、簡単な磁気回路について解説をします。磁気回路は、(1) 磁束の通り路となる磁性体、(2) 磁束を起す源となる磁性体に巻かれたコイル (と、そこに流れた電流)、(3) 急激な (電気回路における電位差に相当する) 磁位差を生じるもととなる磁性体の切れ目である「空隙」の要素からなります。

7.4.1 磁気回路と電気回路の比較

図 7.9 が磁気回路の一例です。図 7.8 はそれに対応させるように書いた (少し変な) 電気回路です。

電気回路ですが、起電力 V [V] が存在し、これによって回路長 l [m] にわたって電界 E が発生します。起電力と電界の関係は、以下で与えられます。

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = V \tag{7.40}$$

電界 E は回路の導線の長さ方向を向いていて、導線中で同じ大きさを持っているとすれば、 $V = E \cdot l$ となります。この電界と導体中を流れる電流密度 J [A/m²] は、オームの法則 $J = \sigma E$ で関連づけられます。ここで、 σ [S/m] は導電率であり、周囲媒質ではほぼ 0 ですが、導体中では極めて大きな値となります。この導電率が極端に大きな値であるため、電流は周囲媒質を流れずに導体内を流れることとなります。

導体を流れる総電流 I [A] は、電流密度から $I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ と求められます (ここで S は導線の断面を意味します)。電流密度 J が断面で一定と仮定すれば、その大きさ J を用いて、 $I = J \cdot S$ と書けます。これらより、

$$V = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = E \cdot l = \frac{J}{\sigma} l = \frac{I}{\sigma S} l = \left(\frac{l}{\sigma S} \right) I = RI \tag{7.41}$$

を得ます。 $R = \frac{l}{\sigma S}$ [Ω] は電気抵抗です。

次に磁気回路についてです。 N 巻きコイルに I [A] の電流が流れると、磁場 (磁束密度 B [T], H [A/m]) が発生します。アンペールの法則より、

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = N \cdot I \tag{7.42}$$

と書けます。磁界 H は磁性体の周回方向を向いていて、磁性体中で同じ大きさを持っているとすれば、 $NI = H \cdot l$ となります。

この磁界と磁性体中の磁束密度 B は構成方程式 $B = \mu H = \mu_r \mu_0 H$ で関連づけられます。ここで、 μ [H/m] は透磁率、 μ_r は比透磁率であり、周囲媒質では $\mu_r = 1$ ですが、磁性体中では数千程度の値を持ちます。

この透磁率が大きい値を持っているため、磁束は磁性体の周囲にはなく、磁性体内に殆どができます。磁性体内の磁束 Φ [Wb] は磁束密度から $\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ と求められます (ここで S は磁性体の断面です)。磁束密度 B が断面で一定と仮定すれば、その大きさ B を用いて、 $\Phi = B \cdot S$ と書けます。これらより、

$$N \cdot I = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = H \cdot l = \frac{B}{\mu} l = \frac{\Phi}{\mu S} l = \left(\frac{l}{\mu S} \right) \Phi = R_m \Phi \tag{7.43}$$

を得ます。 $R_m = \frac{l}{\mu S}$ [A/Wb = H⁻¹] は磁気抵抗と呼ばれます。

ここで、式 (7.41) と (7.43) を比べると、同じ格好をしていることが分かります。

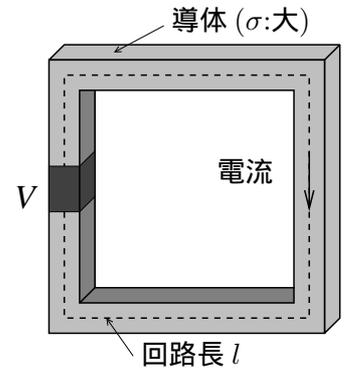


図 7.8: 電気回路

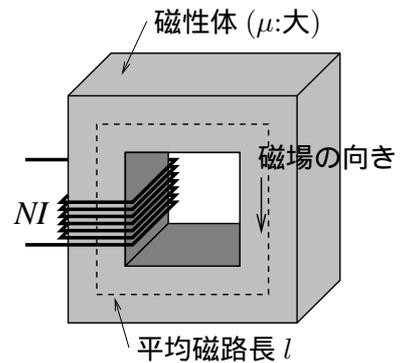


図 7.9: 磁気回路

図7.9のような構成において、 $N \cdot I$ を、起電力に相当するものとして「起磁力」と呼びます。また、磁束 Φ を電流に相当するものとします。これらと磁気抵抗 R_m を用いることで、電気回路と同じ取り扱いをすることができます。これを磁気回路と呼びます。

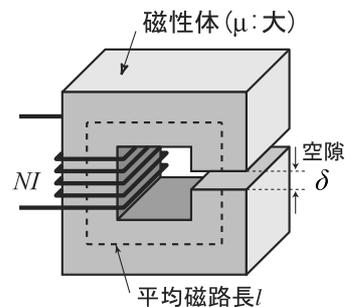
磁気回路で導入している簡略化： 簡単な磁気回路とは、以下を前提としています。

- (1) 磁性体の透磁率が磁界や磁束密度の強さに関わらず一定
- (2) 磁性体の比透磁率 μ_r は周囲に比べて十分大きい。従って、磁性体内で発生した磁束は空气中へと漏れない。
- (3) 磁性体は実際には比較的太い断面積を持っているが、その断面で磁束密度が一様分布している。
- (4) 磁性体中の磁束が通る路の長さは「平均的な長さ」が定義でき、その平均的な長さ(平均磁路長)で解析できる。

実際には、周囲媒質と磁性体の透磁率の差は電気回路の導電率ほどは大きくないので、漏れ磁束は無視できません。また、磁性体の性質として、透磁率は一定でない(B と H の比が変わる)ため、このときは $B-H$ 曲線から値を読み取って計算する必要もあります。

7.4.2 空隙がある場合の磁気回路の解析法

次に、磁性体の一部に隙間(空隙)がある場合の磁気回路について考えます。先の式(7.43)と同様の定式化を行ってゆけばOKです。磁性体中と空隙では磁束 Φ は同じ(つまり磁束密度 B も同じ)ですが、透磁率が異なるので、磁界は異なります。そこで、磁性体中の磁界の大きさを H_m 、空隙の磁界の大きさを H_a とすれば、



$$\begin{aligned}
 N \cdot I &= \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = H_m \cdot l + H_a \cdot \delta = \frac{B}{\mu} l + \frac{B}{\mu_0} \delta = \frac{\Phi}{\mu S} l + \frac{\Phi}{\mu_0 S} \delta \\
 &= \left(\frac{l}{\mu S} + \frac{\delta}{\mu_0 S} \right) \Phi = (R_m + R_a) \Phi
 \end{aligned}
 \tag{7.44}$$

図 7.10: 空隙がある磁気回路

となります。 R_m は磁性体中の磁気抵抗、 R_a は空隙の磁気抵抗です。通常は磁性体の透磁率は空气中より数千倍程度ありますので、 R_a は δ がある程度小さくても大きな値になります。即ち、起磁力 $N \cdot I$ による磁位差は、空隙部分で大きくとられることとなります。

空隙部分では、磁場の向きは磁性体と空気の境界に垂直です。従って、磁束密度は連続ですが、磁界が不連続となります。

電気回路と磁気回路の諸関係式

$$\begin{aligned}
 \text{電気回路} \quad J &= \sigma E \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad V = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad R = \frac{l}{\sigma S} \\
 \text{磁気回路} \quad B &= \mu H \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad N \cdot I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} \quad R_m = \frac{l}{\mu S}
 \end{aligned}$$

例題 1. 図 7.10 における空隙のある磁気回路において、コイルの巻回数は $N = 100$ 、磁性体の断面積 4 cm^2 、磁性体の平均磁路長を 20 cm 、空隙の間隔を 1 mm 、鉄心の比透磁率を 1000 とする。

- 1. $I = 0.1 \text{ A}$ としたとき、空隙にできる磁束密度は何 T となるか。
- 2. 空隙において磁束密度 0.2 T を得たい。コイルに流す電流値はいくらがよいか。

例題 2. 図 7.11 のように二つの磁性体(比透磁率 $\mu_{r1} = 2000$ 、 $\mu_{r2} = 250$)とその間に二箇所の空隙(間隔 $\delta = 1 \text{ mm}$)がある。各磁性体の平均磁路長は $l_1 = 28$ 、 $l_2 = 25 \text{ cm}$ で、断面積はいずれも 4 cm^2 である。起磁力 $N I = 400 \text{ A}$ を与えたとき、磁束密度はいくらとなるか。

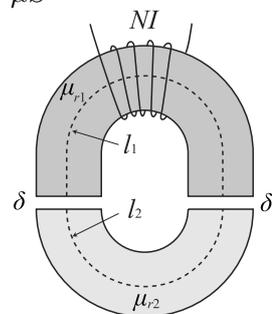


図 7.11: 二つの磁性体からなる磁気回路

本章に関わる公式の導出

$$(1) \iiint_V \nabla \times \mathbf{A} dV = \iint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A}$$

\mathbf{C} を定ベクトルとする。 $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot \nabla \times \mathbf{A}$ より、

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) dV &= \iiint_V (\mathbf{C} \cdot \nabla \times \mathbf{A}) dV = \mathbf{C} \cdot \iiint_V (\nabla \times \mathbf{A}) dV \\ &= \iint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (d\mathbf{S} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \iint_S (d\mathbf{S} \times \mathbf{A}) \\ \therefore \iiint_V (\nabla \times \mathbf{A}) dV &= \iint_S (d\mathbf{S} \times \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (7.45)$$

$$(2) \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}$$

デカルト座標系で考える。まず、次を計算する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{x - x_0}{\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{x - x_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \end{aligned} \quad (7.46)$$

従って、

$$\frac{\partial(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1})}{\partial x} = -|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-2} \frac{\partial(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)}{\partial x} = -|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-2} \frac{x - x_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = -\frac{x - x_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (7.47)$$

となり、 y, z に対する微分も同様である。結局、勾配は

$$\begin{aligned} \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} &= \frac{\partial(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1})}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1})}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1})}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \\ &= -\frac{(x - x_0)\hat{\mathbf{x}} + (y - y_0)\hat{\mathbf{y}} + (z - z_0)\hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \end{aligned} \quad (7.48)$$