

第8章 電磁誘導現象とインダクタンス

8.1 ファラデーの電磁誘導の法則

1. 電磁誘導現象 磁場が変化すると、電場が発生することがファラデーやヘンリーらによって発見されました。この電場の発生は“磁場が変化している間”のみ起こる現象で、電磁誘導と呼ばれています。

回路(単なるループになった導線と思って下さい)があり、そこに磁場があると想定して下さい(その磁束密度を $B(r)$ [T] とします)。このとき、回路を通り抜ける磁束というものが定義されます。回路を通り抜ける磁束 Φ [Wb] は、磁束密度を回路がつくる面 S で面積分 $\iint_S B(r, t) \cdot dS$ することで求められます。磁束の単位は [Wb](ウェーバー) です。

この磁束密度 Φ が変化したとき、電磁誘導による電場により、回路中に起電力 V [V] が発生して電流が流れます。電流の流れる方向は、その電流によって発生する磁場が、磁束の変化を妨げる方向になります(つまり、磁束の変化がある方向に増えるのであれば、その方向の磁束を減らす方向、という感じです)

例 1. 二つの閉回路があり、一つの回路(回路 A)には検流計(電流が流れたかどうかを検出する計器)を接続、もう一つの回路(回路 B)は電流を流します(図 8.1)。スイッチ SW を ON にして回路 B に電流を流し始めると磁場(磁束密度 B)が発生します。その磁場は回路 A に周辺にも存在して、回路 A と交わる(鎖交する)磁束 Φ が増えます。このとき、回路 A 中を電流が流れます(回路中に起電力が発生する)が、電流の流れる方向は、発生した磁場で鎖交した磁束を減らすような方向に流れます。従って、図の②の方向になります。

回路 B 中の電流が一定値のとき、鎖交する磁束は変化しないので、回路 A には電流は流れません。

回路 B のスイッチを切って電流が流れなくなったとき、回路 A と鎖交する磁束が減ることになりますので、回路 A 中に電流が流れます。電流の流れる方向は、その電流によって鎖交した磁束の減少を妨げる(=磁束を増やす)方向になります。従って、図の①の方向となります。

例 2. 閉回路に磁石(N 極側)を近付けたとき、図 8.2 中の回路を鎖交する(上向きの)磁束が増えます。従って回路中を電流が流れ、その流れる方向は、鎖交磁束を減らすような下向きの磁場を作る方向となります(即ち、②の方向)。一方で、S 極が近付くときは下向きの鎖交磁束が増えるので、それを打ち消す上向きの磁場を増やす方向である、①の方向に電流が流れます。

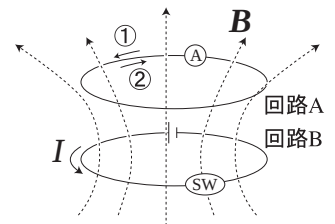


図 8.1: 2 つの閉回路

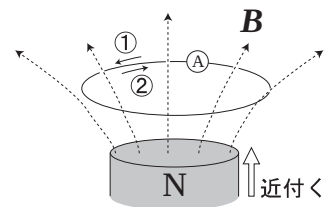


図 8.2: 閉回路に N 極が接近するケース

2. 電磁誘導の法則の定量的な取り扱い コイルを鎖交する磁束 $\Phi(t)$ [Wb] は、磁束密度 $B(r)$ [$T = \text{Wb}/\text{m}^2$] を面積分することによって得られるので、

$$\Phi(t) = \iint_S B(r, t) \cdot dS \quad (8.1)$$

で与えられます。ここで S はコイルを縁とする任意の開曲面です。コイルに誘導される起電力 V [V] は

$$V(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (8.2)$$

となります (レンツの法則)。

この起電力 V はコイル中に誘導される電界によるものであり、

$$V = \oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} \quad (8.3)$$

と書けます。従って、

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (8.4)$$

を得ます。これをファラデーの電磁誘導の法則と呼ばれます。周回積分の方向と磁束の正方向 (微小面素 dS の向き) は右ねじの関係にとります。

式 (8.4) は任意の領域について成立する法則であり、積分範囲を小さくすることで

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (8.5)$$

を得ます。これが微分形のファラデーの電磁誘導の法則の式です。

例 3. 無限長直線電流とそれに平行に長方形コイルが存在しています。 $I(t) = I_0 \sin \omega t$ の電流を流したとき、コイルに誘導される起電力を求めます。

電流によってできる磁場は

$$\mathbf{B}(x, y, t) = \frac{\mu_0 I(t)(-y\hat{x} + x\hat{y})}{2\pi(x^2 + y^2)} \quad (8.6)$$

となります。ここから、コイルと鎖交する磁束 $\Phi(t) = \iint \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}$ を求めます。

ループの面は、2 パラメタのベクトル関数を用いて、 $\mathbf{r} = y\hat{y} + z\hat{z}$, $s \leq y \leq s+w$, $-\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}$ と表されます。

パラメタをそれぞれ微小に増やすことで位置 $\mathbf{r} = y\hat{y} + z\hat{z}$ にできる微小面素ベクトル $d\mathbf{S} = dy dz \hat{x}$ に鎖交する磁束 $d\Phi(t)$ は

$$d\Phi(t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I(t)(-y\hat{x})}{2\pi y^2} \cdot dy dz \hat{x} = -\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi y} dy dz \quad (8.7)$$

従って、

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int d\Phi(t) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_s^{s+w} -\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi y} dy dz = -\frac{\mu_0 I(t)a}{2\pi} \int_s^{s+w} \frac{dy}{y} \\ &= -\frac{\mu_0 I(t)a}{2\pi} \log \frac{s+w}{s} \end{aligned} \quad (8.8)$$

誘導される起電力 V は

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \log \frac{s+w}{s} \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\mu_0 a I_0 \omega}{2\pi} \log \frac{s+w}{s} \cos \omega t \quad (8.9)$$

となります。この起電力は、ファラデーの電磁誘導の法則で示される誘導起電力です。

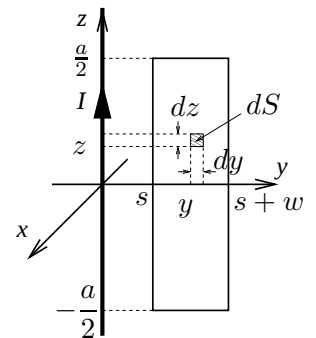


図 8.3: 直線電流とループコイル

例 4. レンツの法則 一様磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0 \hat{z}$ 中に図に示すような「コ」の字形の金属と、その金属上に金属棒を接触させたまま $\mathbf{v}(t) = v_0 \hat{y}$ の一定の速度で移動させます。このとき、金属で出来たループ中に誘導される起電力 V を求めます。棒は $t=0$ で $y=b$ の位置にあるものとします。

棒の位置は、 $v_y(t) = \frac{dy}{dt} = v_0$ から $y(t) = v_0 t + C$ と与えられ、初期条件 $y(0) = C = b$ より $y(t) = v_0 t + b$ となります。従って、ループの面積 $S(t)$ は $S(t) = a(v_0 t + b)$ 。ループを貫く磁束は $+z$ 方向を正として、 $\Phi(t) = B_0 S(t) = B_0 a(v_0 t + b)$ となります。従って、起電力は

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 a v_0 \quad (8.10)$$

となります。この起電力は移動している棒中の自由電子がローレンツ力を受けることによって起こるもので、ファラデーの電磁誘導の法則とは異なります(でも、なぜかレンツの法則でひとまとめにできます)。

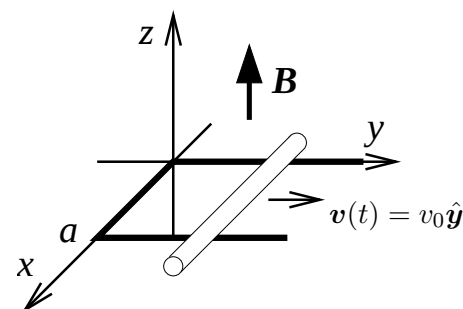


図 8.4: 移動する金属棒

8.2 インダクタンス

8.2.1 自己誘導と相互誘導

前節で述べたように、電流によって生じた磁束によって電磁誘導が起こります。導体中の電流による磁束は、他の導体だけでなく、磁束を生じさせた導体自身とも鎖交します。これによって、導体中に流した電流を妨げる起電力が生じます。これを自己誘導と呼びます。また、他の導体中に起電力を生じさせることを相互誘導と呼びます。

8.2.2 誘導係数 … インダクタンス

電磁誘導は鎖交磁束の時間変化によって起こります。また、電流とそれによってできる磁場は比例関係にあるので、自己・相互誘導を調べるには、磁場を起こす電流 I [A] と誘導の起こる回路との鎖交磁束 Φ [Wb] との比例係数があれば分かることになります。この比例係数をインダクタンスと呼び、磁束をつくる回路中の電流とのインダクタンスと自己インダクタンス、他の回路とのインダクタンスを相互インダクタンスと呼びます。インダクタンスの単位は [H](Henry) です。

自己インダクタンスは

$$\Phi = LI \quad (8.11)$$

と書けます。ここで、 L [H] は自己インダクタンス、 I [A] は回路に流れる電流、 Φ [Wb] は流れた電流による、その回路との鎖交磁束です。

相互インダクタンスについても同様に

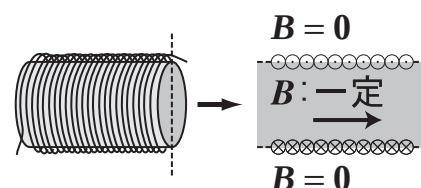
$$\Phi_2 = M_{21} I_1 \quad (8.12)$$

となります。ここで、 M_{21} [H] は相互インダクタンス、 I_1 [A] は回路 1 に流れる電流、 Φ_2 [Wb] は流れた電流による、他の回路 2 との鎖交磁束です。

L , M は回路の形状のみによって決まります。また、2 つの回路間の相互インダクタンスは相反であり、 $M_{12} = M_{21}$ という関係があります。

8.2.3 インダクタンスの算出例

例 1. 中空の無限ソレノイド (半径 a [m]、単位長さ当たり N 巻き) について考えましょう。このソレノイドに電流 I [A] が流れたとき、内部の磁場は $B = \mu_0 N I$ [T] になります。長さ l [m] のインダクタンスを考えると Nl 回の鎖交が起こるので、



$$\Phi = (Nl)(\pi a^2)(\mu_0 NI) = \mu_0 N^2 \pi a^2 l I, \quad \therefore L = \mu_0 N^2 \pi a^2 l \quad (8.13)$$

となります。

例 2. 2つの円形コイル (近似) 2つの円形コイルが中心を同じ軸上に平行に存在しているものとします。コイル 2 は小さく、コイル 1 の作る磁場はコイル 2 内で均一とします。

コイル 1 の作る磁場は $r = l\hat{y}$ において、

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I_1 a^2}{2(a^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{y} \quad (8.14)$$

となるので、コイル中の磁束密度はこれで一定と近似することで、

$$\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I_1 a^2 \pi b^2}{2(a^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} = M_{21} I_1, \quad \therefore M_{21} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2(a^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} = M_{12} \quad (8.15)$$

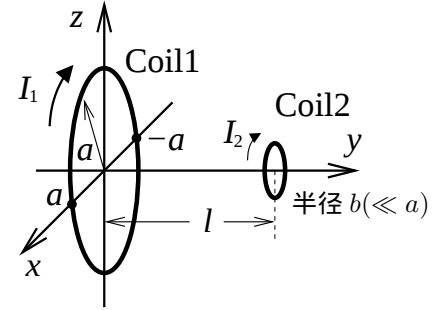


図 8.5: 2つの円形コイル

8.3 磁場のエネルギー

8.3.1 コイルに蓄えられるエネルギー

ある時刻 t [s] において、自己インダクタンス L [H] のコイルに電流 I [A] が流れているものとします。 Δt [s] 間に ΔI [A] だけ電流を増やしたとき、このコイルには逆起電力 $V = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$ が生じます。この起電力に逆らって $\Delta Q = I \Delta t$ [C] の電荷を運んだので、

$$\Delta W = L \frac{\Delta I}{\Delta t} I \Delta t = LI \Delta I \quad (8.16)$$

だけの仕事をしたこととなります。電流の変化を無限小とすることで ($\Delta I \rightarrow dI$)、 $I = 0$ A から I_0 [A] まで増やしたときの仕事は次式で与えられます。

$$W = \int dW = \int_0^{I_0} LI dI = \frac{1}{2} LI_0^2 \quad (8.17)$$

ここでなした仕事はコイル周辺の磁場として蓄えられていることとなります。実際に、電流を流すのを止めると、同様に逆起電力によって電流が流れます。即ち、磁場がエネルギーを持っており、自己インダクタンス L のコイルに I_0 を流したときのエネルギーは $\frac{1}{2} LI_0^2$ [J] です。

8.3.2 エネルギーの磁場による表現

無限長ソレノイドを用いて、磁場に蓄えられているエネルギーを、磁場を用いて表現します。無限長ソレノイド (半径 a [m]、単位長さ当たり N 巻き) の自己インダクタンスは、長さ l [m] で

$$L = \mu_0 N^2 \pi a^2 l \quad (8.18)$$

でした。また、ソレノイド中の磁束密度は

$$\mathbf{B} = \mu_0 NI \hat{y} \quad (8.19)$$

ですので、ここから、

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 N^2 \pi a^2 l I^2 = \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0 NI)^2 \pi a^2 l \quad (8.20)$$

となることが分かります。 $\pi a^2 l$ は今考えているソレノイドの体積 V に相当しますので、

$$W = \frac{1}{2\mu_0} B^2 V = \frac{1}{2\mu_0} \iiint B^2 dV \quad (8.21)$$

と書けます。 $B = \mu_0 H$ より

$$W = \frac{1}{2} \iiint B H dV \quad (8.22)$$

となります。

実際にはベクトル場 $B(\mathbf{r}), H(\mathbf{r})$ に対し、

$$w(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} B(\mathbf{r}) \bullet H(\mathbf{r}) \text{ [J/m}^3\text{]} \quad (8.23)$$

で表されるエネルギー体積密度が定義でき、これを体積積分することで全エネルギーとなります。

例 1. 円柱導体の内部インダクタンス 導体の空間的広がりを考えるとき、導体に流れる電流とその電流が作る磁場自体が鎖交することになります。これによるインダクタンスを内部インダクタンスと呼びます。半径 a [m] の円柱導体の長さ l [m] における内部インダクタンス L_i を求めます。これは、円柱導体内に蓄えられているエネルギーから求めることができます。円柱導体には電流 I [A] が一様に分布して流れているものとし、導体の比透磁率は 1 とします。円柱の中心軸から ρ [m] における磁場の強さはアンペールの法則より

$$2\pi\rho H = \frac{\pi\rho^2}{\pi a^2} I, \quad H = \frac{I\rho}{2\pi a^2} \quad (8.24)$$

従って、エネルギー W [J] は

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V H B dV = \frac{1}{2} \int_{z=0}^l \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a \mu_0 \left(\frac{I\rho}{2\pi a^2} \right)^2 \rho d\rho d\phi dz = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi a^4} \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi} = \frac{1}{2} L_i I^2 \quad (8.25)$$

となるので、内部インダクタンスは

$$L_i = \frac{\mu_0 l}{8\pi} \quad (8.26)$$

となります。

例 2. 同軸線路のインダクタンス 半径 a, b [m] の導体を持つ同軸線路のインダクタンスを考えます。電流は内導体の表面を I [A] 流れており、外導体には逆向きに同量の電流が流れます。このとき、 $a \leq \rho \leq b$ における磁場の強さは

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}, \quad H = \frac{I}{2\pi\rho} \quad (8.27)$$

となります。従って、長さ l [m] における内外導体間にできる磁場のエネルギーは

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V B H dV = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{\mu_0 I^2}{(2\pi\rho)^2} \rho d\rho d\phi dz = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \log \frac{b}{a} = \frac{1}{2} L I^2 \quad (8.28)$$

となりますので、自己インダクタンス L [H] は

$$L = l \frac{\mu_0}{2\pi} \log \frac{b}{a} \quad (8.29)$$

となります。

内導体の導体内部まで電流が流れる場合は、中心導体の内部インダクタンスが加わります。

もう一つのエネルギーの表現: 微小な断面積 dS 中の磁束 $d\Phi$ を考え、その磁束が通る閉じた管中のエネルギー dW [J] を考えます。 $W = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV$ ですが、 dV を管の長さ方向と断面積に分けて考えれば、

$$dW = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dS dr = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{H} \cdot (d\Phi dr) = \frac{1}{2} d\Phi \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} d\Phi I_C \quad (8.30)$$

ここで I_C は C (管の一周) の中を貫く電流です。全エネルギーはこの磁束を積分することで得られます。

例7. 円柱導体の内部インダクタンス (2) 式 (8.30) の表現を用いてエネルギー、内部インダクタンスを求めます。

半径 ρ [m] における、 $dS = d\rho \times dz$ のリング中に磁束 $d\Phi$ が存在し、

$$d\Phi = B d\Phi = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} d\rho dz \quad (8.31)$$

これと鎖交する電流は $I_C = \frac{\rho^2}{a^2} I$ より、

$$dW = \frac{1}{2} d\Phi I_C = \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{a^2} I \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} d\rho dz = \frac{\mu_0 I^2 \rho^3}{4\pi a^4} d\rho dz \quad (8.32)$$

長さ l について考えると、

$$W = \int_0^l dz \int_0^a \frac{\mu_0 I^2 \rho^3}{4\pi a^4} d\rho = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi} = \frac{1}{2} L_i I^2 \quad (8.33)$$

となり、内部インダクタンス $L_i = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$ も得られます。

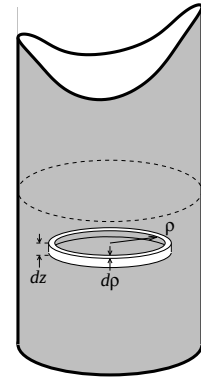


図 8.6: 円柱導体