

第9章 マクスウェルの方程式と電磁波

電磁場の原因となる電荷や電流 (合わせて「波源」と言います) があつたとき、マクスウェルの方程式と呼ばれる式を解くことで電磁場 (E, B, D, H) を決定することが可能です (方程式はたいへん難しいもので、実際に電磁場を数式で決定するのはほとんどの場合は不可能で、コンピュータを用いて解く必要があるのですが)。

これまで本授業の目的の一つは、このマクスウェルの方程式を出すためのものです。今回は、そのマクスウェルの方程式を説明します。

マクスウェルの方程式は、マクスウェル (英; James Clerk Maxwell; 1831-1879) がまとめたもので、これまでの電磁気学の研究を元に、自分で少し修正を加え (しかし、その修正は大きな影響を多方面に及ぼしました)、「これだけあれば電磁場を決定することができる」ということでまとめました。

また、これをまとめる過程で、電磁波の存在とその伝搬速度を理論的に示しました (実験的に示されたのはしばらくの後で、ヘルツらの実験によってです)。

9.1 マクスウェルの方程式

+

9.1.1 今までの法則のまとめ

今まで出てきた法則 (数式の部分) をまとめておきます。

ファラデーの電磁誘導の法則: 静電界では、渦なしの法則 $\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$ 、または $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ という法則でしたが、磁場が時間的に変動するときにはこの法則は「ファラデーの電磁誘導の法則」に修正されて、以下となります。

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (9.1)$$

ガウスの法則: 静電界におけるガウスの法則は、時間変動する場についても成立して、以下のように書けます。

$$\oiint_S \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (9.2)$$

アンペールの法則: アンペールの法則は

$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = I = \iint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (9.3)$$

で与えられ、ここで、 S は閉曲路 C を縁とする開曲面です。これは静磁場のみに成立する法則です。時間的に磁場が変動する場合には、少し修正が必要となりますが、後で説明します。

磁場のガウスの法則: 磁場 (磁束密度) $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ のガウスの法則は、時間変動する場でも成立していて、以下となります。

$$\oiint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (9.4)$$

構成方程式 (構成関係式): 物質 (誘電体、磁性体) があるとき、以下の関係が成立しますが、これは構成方程式と呼ばれます。

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \tag{9.5}$$

それ以外の式にローレンツ力などがありますが、ここでは省略します。

9.1.2 電荷保存則と連続の式

ある空間内において、空間外部との間に電荷の移動がなければ、空間内部の電荷の総和は変化しません。これを電荷保存則と言います。

従って、ある空間 V 内の電荷 $Q(t) = \iiint_V \rho(\mathbf{r}, t)dV$ が変化した (即ち、 $\frac{dQ}{dt} \neq 0$) ということは、電荷が空間の表面を通過して移動した、即ち電流として流れたことを意味します。 Δt [s] 間に変化した電荷を ΔQ [C] とすると、

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \oiint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot (-d\mathbf{S})\Delta t \\ \therefore \frac{\Delta Q}{\Delta t} &= -\oiint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \tag{9.6}$$

となります。ここで、 $d\mathbf{S}$ は面素ベクトルですが、閉曲面の外向きとしています。 ΔQ は V 内の電荷の増分なので流入した電流を計算するには 内向きの面素ベクトルとして $-d\mathbf{S}$ を使っています。 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\frac{dQ}{dt} = -\oiint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho(\mathbf{r}, t)dV = \iiint_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV \tag{9.7}$$

従って、

$$\iiint_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV = -\oiint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \tag{9.8}$$

が成立します。これを連続の式と呼びます。微分形は、両辺を面積で割って $V \rightarrow 0$ の極限をとることで以下を得ます。

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \tag{9.9}$$

9.1.3 マクスウェルによるアンペールの法則の修正

マクスウェルは時間的に変動する電磁場においてアンペールの法則に修正が必要であることを示し、“電束の時間変化” = 変位電流を導入して矛盾を解決しました。

アンペールの法則:

$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = I = \iint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \tag{9.10}$$

において、 C は任意の周回積分路であり、 S はその C を縁とする任意の開曲面です。そこで、周回積分路 C を小さくして、開曲面を閉曲面に近づけると、 C の長さは限りなく 0 に近くなり、

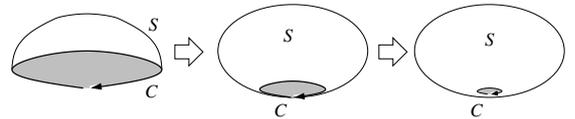


図 9.1: 周回積分路の変更とそのときの開曲面

$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \rightarrow 0 \quad (9.11)$$

となります (図 9.1)。従って、

$$\iint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \rightarrow \iint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0 \quad (9.12)$$

となる必要がありますが、これは連続の式 (9.8) とは矛盾することになります。上式は、閉曲面 S に流入した電流は必ず流出し、差し引き 0 となることを意味し、内部の電荷量の変化がないことになります。

また、コンデンサを考えたとき、コンデンサを充電している間はアンペールの法則は開曲面 S の選び方によっては成立しなくなるという点も矛盾です (図 9.2)。

微分形で述べれば以下ようになります。アンペールの法則は $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ となりますが、両辺の発散をとりますと

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (9.13)$$

となり、 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ が得られますが、これは連続の式 (9.9) と矛盾します。

この矛盾を解決したのがマクスウェルであり、以下のような修正を行いました。ガウスの法則:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (9.14)$$

を時間微分すると、

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{D})}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (9.15)$$

を得ます。これと連続の式より

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} \\ \therefore \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (9.16)$$

となり、「電流密度 \mathbf{J} と $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ の合計の発散は常に 0」となります。これより、時間変動するときのアンペールの法則は

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (9.17)$$

とすれば、先のように発散をとっても連続の式と矛盾が起きないことになります。マクスウェルが修正した上式を、アンペール=マクスウェルの法則と呼びます。また、 $\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ [A/m²] を変位電流密度と呼びます。

9.1.4 マクスウェルの方程式

以上によって得られた、時間変動を考慮した式をマクスウェルの方程式と呼びます。これは、(境界条件があれば) 電磁界を決定する方程式系です。微分形のみ示します。

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (9.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (9.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (9.20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (9.21)$$

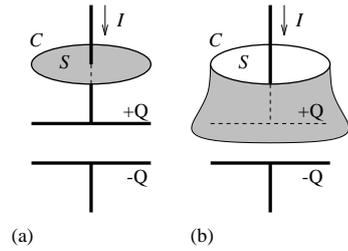


図 9.2: 同じ閉曲路に対して、導線中の電流が存在する開曲面 (a) と存在しない開曲面 (b)

9.2 電磁波

マクスウェルによって変位電流が導入され、波源 (電流と電荷) が与えられたときに電磁界を決定する方程式系=マクスウェルの方程式が完成しました。マクスウェルの方程式の微分形は以下で与えられます。

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (9.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (9.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (9.24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (9.25)$$

波源 (\mathbf{J}, ρ) が与えられたとき、このマクスウェルの方程式と適当な条件 (周囲形状を与える境界条件と、初期条件) があれば電磁界を決定できます。

また、このマクスウェルの方程式から、電磁波の存在とその諸性質が導き出されます。実際にマクスウェルは、方程式を調べることで、それまで知られていなかった電磁波の存在を予言し、その速度が光の速度と等しいことを予言しました (当時は、光と電磁気現象は別のもので思われていた)。ここでは簡単な電磁波を考え、その性質について概観します。

9.2.1 1次元波動方程式と電磁波

マクスウェルの方程式より、電磁波の式が導出できます。ここでは簡単のため、電磁場は x, y 方向に変化せず (即ち、 $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow 0, \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow 0$)、真空中で、電界は x 成分 (E_x) のみ0でないものと仮定します (1次元化)。このときマクスウェルの方程式は

$$\frac{\partial E_x(z, t)}{\partial z} = -\frac{\partial B_y(z, t)}{\partial t}, \quad -\frac{\partial H_y(z, t)}{\partial z} = \frac{\partial D_x(z, t)}{\partial t} \quad (9.26)$$

となります。 $B_y = \mu_0 H_y, D_x = \epsilon_0 E_x$ より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= -\frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial z} = -\mu_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z} = \mu_0 \frac{\partial^2 D_x}{\partial t^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \therefore \frac{\partial^2 E_x(z, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_x(z, t)}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (9.27)$$

を得ます。これは波動方程式と呼ばれ、この解は例えば

$$E_x(z, t) = f(z - c_0 t), \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (9.28)$$

となります (ダランベール解)。ここで $f(u)$ は任意の関数であり、 $\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12}$ F/m, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m より

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 2.998 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (9.29)$$

となります。

式 (9.28) の関数に挙動について調べます。今、関数 $f(u)$ が $u = a$ で頂点を持つ関数であるとします (図 9.3)。 $u = z - c_0 t$ として、 t が増えたときに (時刻が経過したときに) どのような関数が空間 (z) に描かれるかを考えます。

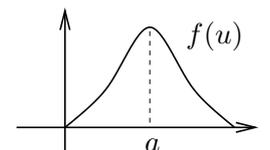


図 9.3: 任意の関数 $f(u)$

$t = 0$ において、 $u = z$ となり、 $f(z)$ は $z = a$ に頂点を持つ形となります。微小時間 Δt [s] 経ったとき、 $u = z - c_0 \Delta t$ であり、このときの $f(z - c_0 \Delta t)$ の頂点は $z - c_0 \Delta t = a$ より、 $z = a + c_0 \Delta t$ にある。つまり、関数 $f(z - c_0 t)$ は、 Δt 秒間において $c_0 \Delta t$ だけ右に移動したことになります (即ち、速さは c_0)。 c_0 はおよそ 3.0×10^8 m/s であり、光の進む速さに等しい (光も電磁波であるため、これは当然の結果なのですが)。

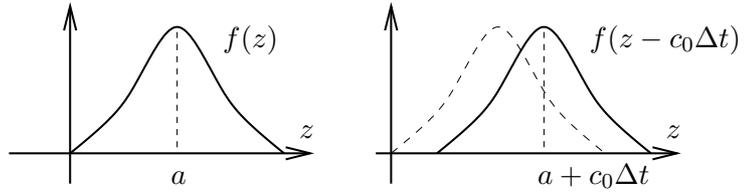


図 9.4: 電磁波の伝搬 (左: $t = 0$, 右: $t = \Delta t$)

電磁気的な影響は、今述べたように速度 c_0 で伝わってゆきます。従って、例えば電流を少し流して、ある二箇所に電荷をためたとき、クーロンの法則にあるように、力が即働くわけではなく、時間的な遅れをもって働くこととなります。これは、電磁気学がクーロンの法則のような遠隔にある地点に働く力という形では記述できず、その力を伝える役割である電界や磁界という考え方が必要であることを示しています。

また、波動方程式はマクスウェルの方程式の微分形で記述されるため、微分形のマクスウェルの方程式が重要な基本式となります。

9.2.2 平面波

今検討している電磁波は、磁界についても同様の波動方程式が導出され、

$$\therefore \frac{\partial^2 H_y(z, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 H_y(z, t)}{\partial z^2} = 0 \tag{9.30}$$

となります。従って、この解についても

$$H_y(z, t) = g(z - c_0 t) \tag{9.31}$$

と書くことができます。

つまり、電界 E_x も磁界 H_y も x, y には依存せず、 z が一定であれば全て同じ値となっています。これを同一の値の面 (同位相、同振幅の面) が平面となっていることから、平面波と呼びます。平面波は電磁波の特殊な形状の一つと言えます。

真空でない媒質中も電磁波が伝搬します。その際は誘電率を ϵ 、透磁率を μ とすると電磁波の伝搬速度 c は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \tag{9.32}$$

となります。一般的には $\mu > \mu_0, \epsilon > \epsilon_0$ より、媒質中では電磁波の伝搬速度は遅くなります (比誘電率 $\epsilon_r (> 1)$ 、比透磁率 $\mu_r (> 1)$ を用いて $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$ 倍になる)。また、一定の周波数で振動する電磁波の場合は $c = f \lambda$ で波長 λ が定義されますが、媒質中では c が小さくなるので、同じ周波数 f では波長 λ が小さくなります (波長短縮)。その波長短縮の割合は比誘電率 ϵ_r と比透磁率 μ_r の積の平方根に比例します。

式 (9.31) と先の電界の式 (9.28) を今検討しているマクスウェルの方程式 (9.26) に代入すると

$$f'(z - c_0 t) = c_0 \mu_0 g'(z - c_0 t) \tag{9.33}$$

を得ます。両者を積分すると (積分定数は時間の関数でなく、静電磁界に相当するので今の議論とは関係ありません)、

$$E_x(z, t) = c_0 \mu_0 H_y(z, t) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_y(z, t) \tag{9.34}$$

を得ます。即ち、平面波の電磁界の振幅の比は常に一定で

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (9.35)$$

となります。この Z_0 は波動インピーダンスと呼ばれ、値はおよそ $Z_0 \approx 120\pi \approx 377$ であり、その単位は $[\Omega]$ です。真空でない媒質中では、波動インピーダンスは $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ で与えられます。

9.2.3 電磁界のベクトルと伝搬方向

平面波の式 (9.28), (9.34) は $+z$ 方向に伝搬する場合でしたが、任意の方向 (単位ベクトル \hat{d} 方向) に伝搬する場合を考えると、位置 r における \hat{d} 方向の距離は $\hat{d} \cdot r$ となりますので、

$$\mathbf{E} = E_0 f(\hat{d} \cdot \mathbf{r} - c_0 t), \quad \mathbf{H} = H_0 f(\hat{d} \cdot \mathbf{r} - c_0 t) \quad (9.36)$$

という式を得ます。 E_0, H_0 は電界と磁界の平面波のベクトルの向きを表す定ベクトルです。ここでは、電磁波の伝搬方向 \hat{d} と、電磁界の方向 E_0, H_0 がどのような関係にあるかを調べます。

今考えている領域は真空中であり、電荷は存在していないこととなります ($\rho = 0$)。従って、マクスウェルの方程式より

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (9.37)$$

が成立しています。ここに式 (9.36) を代入すると

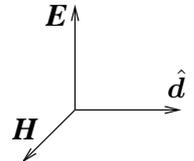
$$\hat{d} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad \hat{d} \cdot \mathbf{H}_0 = 0 \quad (9.38)$$

が導出できます。即ち、電界、磁界のベクトルの方向と電磁波の伝搬方向は直交していることが分かります。

また、同様にマクスウェルの方程式 $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ に代入すると $\hat{d} \times \mathbf{E}_0 = Z_0 \mathbf{H}_0$ を得ます。両辺について \mathbf{E}_0 との外積 $\mathbf{E}_0 \times$ をとると

$$\mathbf{E}_0 \times \hat{d} \times \mathbf{E}_0 = \hat{d} E_0^2 = Z_0 \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0, \quad \therefore \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 = \frac{E_0^2}{Z_0} \hat{d} \quad (9.39)$$

となります。つまり、電界ベクトル \mathbf{E}_0 から磁界ベクトル \mathbf{H}_0 に右ねじを回したとき、ねじの進む方向が伝搬方向ということが言えます (右図)。



9.2.4 ポインティング・ベクトル

電磁波が伝搬しているということは、電磁界の持つ電力 (単位時間当たりのエネルギー) を伝送していることとなります。

電磁波の電力はポインティング・ベクトル (Poynting's vector) で表すことができます。ポインティング・ベクトル S [W/m^2] は

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (9.40)$$

で与えられます。平面波の場合、電界と磁界は直交しており、かつその大きさの比は波動インピーダンス Z_0 で与えられているので、電界の大きさ $E(\mathbf{r}, t)$ を用いて、ポインティング・ベクトルの大きさは

$$S(\mathbf{r}, t) = \frac{E^2(\mathbf{r}, t)}{Z_0} \quad (9.41)$$

と表せます。ポインティング・ベクトルの向きは平面波の進行方向です。

(導出) $\nabla \cdot \{\mathbf{E} \times \mathbf{H}\}$ という量について考えてみます。ベクトル解析の公式より次のように変形できます。

$$\nabla \cdot \{\mathbf{E} \times \mathbf{H}\} = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (9.42)$$

この両辺を表面 S を持つ領域 V で体積積分すると、Gauss の定理を用いて

$$-\iiint_V \nabla \cdot \{\mathbf{E} \times \mathbf{H}\} dV = -\oiint_S \{\mathbf{E} \times \mathbf{H}\} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \left\{ \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\} dV + \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV \quad (9.43)$$

を得ます。 $d\mathbf{S}$ は領域 V の外側を向いた面素ベクトルです。

右辺第一項について考えましょう。 $D = \epsilon E, B = \mu H$ とおいて、 $\frac{\partial(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})}{\partial t} = 2\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ より、

$$\iiint_V \left\{ \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\} dV = \frac{d}{dt} \iiint_V \left\{ \frac{\mu}{2} |\mathbf{H}|^2 + \frac{\epsilon}{2} |\mathbf{E}|^2 \right\} dV \quad (9.44)$$

$w_m = \frac{\mu}{2} |\mathbf{H}|^2$ [J/m³] は磁場のエネルギー密度、 $w_e = \frac{\epsilon}{2} |\mathbf{E}|^2$ [J/m³] は電場のエネルギー密度ですので、これは「 V 内の電磁場のエネルギーの変化率 (単位時間当たりの変化量)」を表します。

次に右辺第二項を考えますが、簡単のため電磁場の量が変化しない程度の微小体積 ΔV について考えましょう。 ΔV を \mathbf{E} に垂直な面積 ΔS と平行な長さ Δl に分けると、 \mathbf{E} と \mathbf{J} は平行ですので次式となります。

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \Delta V = E \Delta l \cdot J \Delta S = VI \quad (9.45)$$

ここで、 V [V] は Δl での電位差、 I [A] は ΔS を通過する電流です。従って、これは ΔV 中でジュール熱で失われる電力を表します。この体積積分はこれを領域 V 内にわたってジュール熱の電力を加え合わせることを意味しますので、領域 V 内での全損失の電力を意味しています。

さて、消費電力がない場合を考えましょう。

$$\oiint_S \{\mathbf{E} \times \mathbf{H}\} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \iiint_V (w_e + w_m) dV = 0 \quad (9.46)$$

もし第二項の V 内のエネルギーが増加しているとき、第一項目は負となり、 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は S を通してトータルで「流入」していることとなります。

逆に、第二項の V 内のエネルギーが減少しているとき、第一項目は正となり、 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は S を通してトータルで「流出」していることとなります。

つまり、 $\oiint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$ は S を通して流入、流出する電磁波の「電力」を表していることとなります。また、 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ [W/m²] は単位面積当たりの電力となり、これを Poynting ベクトルと呼びます。

この式は「電磁場のエネルギー保存則」を表しており、Maxwell の方程式を満たす \mathbf{E}, \mathbf{H} は常にエネルギーが保存されることを保証しているものです。