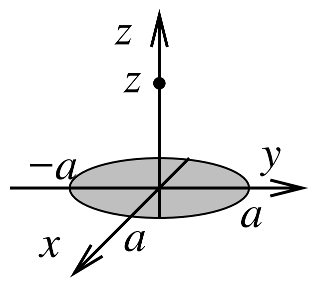
解析電磁気学演習 (5) 静電界の法則 (May 15)

学籍番号:	氏名:

☞「 解の導出過程」もきちんと書いて下さい。
☞ベクトルは$\mathbb{C}$, $\mathbb{E}$のように、**1** 本加えて 太く 書いて下さい。太くなっていない場合は×にします。

図に示すように、原点を中心として $z=0$ の面状に、半径 a [m] の円形に面電荷が一様な面電荷密度 σ [C/m^2] で分布している。



(1) [電界の導出] z 軸状の点 $z\hat{\boldsymbol{z}}$ における電界 $\boldsymbol{E}(z)$ [V/m] を求めよ。

(2) [電界中で電荷を移動させたときの仕事] z 軸上に沿って点電荷 q [C] を無限遠から $z\hat{\boldsymbol{z}}$ まで動かしたときの仕事 W [J] を求めよ。

(3) [電位 (静電ポテンシャル) の定義] 上から、z 軸状の点 $z\hat{\boldsymbol{z}}$ の電位 (静電ポテンシャル) $\varphi(z)$ [V] を求めよ。

(4) [電位 (静電ポテンシャル) の計算] 先の問題において、$\boldsymbol{r}_0$ の点にある点電荷 Q [C] が $\boldsymbol{r}$ の位置につくる電位 (静電ポテンシャル)$\varphi(\boldsymbol{r})$ [V] が $\varphi(\boldsymbol{r}) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$ となることを利用し、点 $z\hat{\boldsymbol{z}}$ における電位 (静電ポテンシャル) を求めよ。

(5) [$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$ の確認] 上で求めた $\varphi(z)$ [V] から、$-\boldsymbol{\nabla}\varphi \bullet \hat{\boldsymbol{z}}$ を計算して点 $z\hat{\boldsymbol{z}}$ における電界 $E_z(z)$ [V/m] を求めよ。

(前回の解答)

$\boxed{1}$ $r \leqq a$ と $r > a$ に分けて考える。

1) $r \leqq a$ のとき、

$$4\pi r^2 E_r = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \left(\frac{\Delta\rho}{a}r' + \rho_0\right) 4\pi r'^2 dr' = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\Delta\rho}{a}\frac{r^4}{4} + \rho_0\frac{r^3}{3}\right)$$

$$\therefore E_r = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\Delta\rho}{a}\frac{r^2}{4} + \rho_0\frac{r}{3}\right)$$

2) $r > a$ のとき

$$4\pi r^2 E_r = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^a \left(\frac{\Delta\rho}{a}r + \rho_0\right) 4\pi r^2\, dr = \frac{4\pi}{\varepsilon_0}\left(\frac{\Delta\rho a^3}{4} + \rho_0\frac{a^3}{3}\right)$$

$$\therefore E_r = \frac{a^3}{\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{\Delta\rho}{4} + \frac{\rho_0}{3}\right)$$

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{r} = a\{\sin\theta(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}) + \cos\theta\hat{\boldsymbol{z}}\} = a\hat{\boldsymbol{r}},\ 0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \phi < 2\pi,\ d\boldsymbol{S} = a^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{\boldsymbol{r}},$

$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = a\sin\theta(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}) + (a\cos\theta - z_0)\hat{\boldsymbol{z}},\ |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| = (a^2 - 2az_0\cos\theta + z_0^2)^{\frac{1}{2}}$

$\boldsymbol{E} = \dfrac{Q(\boldsymbol{r} - z_0\hat{\boldsymbol{z}})}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r} - z_0\hat{\boldsymbol{z}}|} = \dfrac{Q(a\hat{\boldsymbol{r}} - z_0\hat{\boldsymbol{z}})}{4\pi\varepsilon_0(a^2 - 2az_0\cos\theta + z_0^2)^{\frac{3}{2}}},$

$\boldsymbol{E}\bullet d\boldsymbol{S} = \dfrac{Qa^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{(a\hat{\boldsymbol{r}}\bullet\hat{\boldsymbol{r}} - z_0\hat{\boldsymbol{z}}\bullet\hat{\boldsymbol{r}})}{(a^2 - 2az_0\cos\theta + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta\, d\theta\, d\phi = \dfrac{Qa^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{(a - z_0\cos\theta)}{(a^2 - 2az_0\cos\theta + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta\, d\theta\, d\phi,$

$$\begin{aligned}
\oiint_S \boldsymbol{E}\bullet d\boldsymbol{S} &= \frac{Qa^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{(a - z_0\cos\theta)}{(a^2 - 2az_0\cos\theta + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta\, d\theta\, d\phi \\
&= \frac{Qa^2}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{(a - z_0\cos\theta)}{(a^2 - 2az_0\cos\theta + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{Qa^2}{2\varepsilon_0}\int_{(a-z_0)^2}^{(a+z_0)^2} t^{-\frac{3}{2}}\frac{a^2 - z_0^2 + t}{2a}\frac{dt}{2az_0} \qquad (a^2 - 2az_0\cos\theta + z_0^2 = t \text{ とおく。} \sin\theta\, d\theta = \tfrac{dt}{2az_0}) \\
&= \frac{Q}{4\varepsilon_0 z_0}\left(\frac{a^2 - z_0^2}{|a - z_0|} - \frac{a^2 - z_0^2}{a + z_0} + a + z_0 - |a - z_0|\right)
\end{aligned}$$

$a \geqq z_0$ のとき、

$$= \frac{Q}{4\varepsilon_0 z_0}\{a + z_0 - (a - z_0) + a + z_0 - (a - z_0)\} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$a < z_0$ のとき、

$$= \frac{Q}{4\varepsilon_0 z_0}\{-(a + z_0) - (a - z_0) + a + z_0 + (a - z_0)\} = 0$$