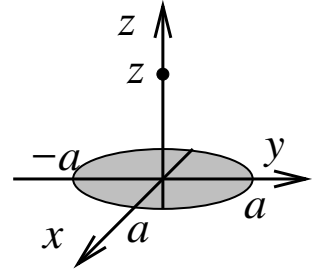


解析電磁気学演習 (5) の解答

図に示すように、原点を中心として $z = 0$ の面状に、半径 a [m] の円形に面電荷が一様な面電荷密度 σ [C/m²] で分布している。



- (1) [電界の導出] z 軸上の点 $z\hat{z}$ における電界 $\mathbf{E}(z)$ [V/m] を求めよ。

$$\mathbf{r}_0(\rho_0, \phi_0) = \rho_0(\cos \phi_0 \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi_0 \hat{\mathbf{y}}), \quad 0 \leq \rho_0 \leq a, \quad 0 \leq \phi_0 < 2\pi$$

$$\mathbf{r} = z\hat{z}, \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = z\hat{z} - \rho_0(\cos \phi_0 \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi_0 \hat{\mathbf{y}}), \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \{z^2 + \rho_0^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$dS_0 = \rho_0 d\rho_0 d\phi_0$$

$$d\mathbf{E} = \frac{\sigma dS_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = \frac{\sigma \rho_0 d\rho_0 d\phi_0 \{z\hat{z} - \rho_0(\cos \phi_0 \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi_0 \hat{\mathbf{y}})\}}{4\pi\epsilon_0\{z^2 + \rho_0^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int d\mathbf{E} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma \rho_0 d\rho_0 d\phi_0 \{z\hat{z} - \rho_0(\cos \phi_0 \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi_0 \hat{\mathbf{y}})\}}{4\pi\epsilon_0\{z^2 + \rho_0^2\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \hat{z} \int_0^a \frac{\rho_0}{\{z^2 + \rho_0^2\}^{\frac{3}{2}}} d\rho_0 \\ &= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \hat{z} \left[-\{z^2 + \rho_0^2\}^{-\frac{1}{2}} \right]_0^a = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \hat{z} \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{(z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} \left\{ 1 - \frac{z}{(z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} \end{aligned}$$

- (2) [電界中で電荷を移動させたときの仕事] z 軸上に沿って点電荷 q [C] を無限遠から $z\hat{z}$ まで動かしたときの仕事 W [J] を求めよ。

(z から無限遠まで動かしたときの仕事の反対、と考えると)

$$W = - \left(-q \int_z^\infty \mathbf{E}(z') \cdot \hat{z} dz' \right) = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \int_z^\infty \left\{ 1 - \frac{z'}{(z'^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} dz' = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \left[z' - (z'^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \right]_z^\infty$$

ここで、

$$\lim_{z' \rightarrow \infty} z' - (z'^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} = \lim_{z' \rightarrow \infty} \frac{z'^2 - (z'^2 + a^2)}{z' + (z'^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{z' \rightarrow \infty} \frac{-a^2}{z' + (z'^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

より、

$$W = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ (z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} - z \right\}$$

- (3) [電位 (静電ポテンシャル) の定義] 上から、 z 軸上の点 $z\hat{z}$ の電位 (静電ポテンシャル) $\varphi(z)$ [V] を求めよ。

$$\varphi = \frac{W}{q} \text{ より、 } \varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ (z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} - z \right\}$$

(4) [電位 (静電ポテンシャル) の計算] 先の問題において、 $\mathbf{r}_0$ の点にある点電荷

Q [C] が $\mathbf{r}$ の位置につくる電位 (静電ポテンシャル) $\varphi(\mathbf{r})$ [V] が $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$ となることを利用し、点 $z\hat{\mathbf{z}}$ における電位 (静電ポテンシャル) を求めよ。

$$\mathbf{r}_0(\rho_0, \phi_0) = \rho_0(\cos \phi_0 \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi_0 \hat{\mathbf{y}}), \quad 0 \leq \rho_0 \leq a, \quad 0 \leq \phi_0 < 2\pi$$

$$\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = z\hat{\mathbf{z}} - \rho_0(\cos \phi_0 \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi_0 \hat{\mathbf{y}}), \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \{z^2 + \rho_0^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$dS_0 = \rho_0 d\rho_0 d\phi_0$$

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\sigma dS_0}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{\sigma \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{4\pi\epsilon_0(z^2 + \rho_0^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \varphi &= \int d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma \rho_0 d\rho_0 d\phi_0}{4\pi\epsilon_0(z^2 + \rho_0^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{(z^2 + \rho_0^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[(z^2 + \rho_0^2)^{\frac{1}{2}} \right]_0^a \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ (z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} - z \right\} \end{aligned}$$

(5) [$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ の確認] 上で求めた $\varphi(z)$ [V] から、 $-\nabla\varphi \bullet \hat{\mathbf{z}}$ を計算して点 $z\hat{\mathbf{z}}$ における電界 $E_z(z)$ [V/m] を求めよ。

$$\begin{aligned} -\nabla\varphi \bullet \hat{\mathbf{z}} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ (z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} - z \right\} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ \frac{z}{(z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right\} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ 1 - \frac{z}{(z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} \\ &= E_z \end{aligned}$$