

解析電磁気学演習 (7) 誘電体 (May 29)

学籍番号:

氏名:

☞「解の導出過程」もきちんと書いて下さい。

☞ベクトルは $\mathbf{C}$, $\mathbf{E}$ のように、1本加えて太く書いて下さい。太くなっていない場合は×にします。

図に示すように、原点を中心として半径 a [m] の部分に電荷 Q [C] が一様に分布している。原点からの距離を r [m] とすると、 $r \leq b$ は誘電率 ϵ_1 [F/m]、 $r > b$ は誘電率 ϵ_2 [F/m] の媒質で満たされている。電荷が分布している領域 $r \leq a$ も誘電率 ϵ_1 [F/m] である。

- (1) $r \leq a$, $a < r \leq b$, $r > b$ の領域において、それぞれ電界と電束密度を求めよ。

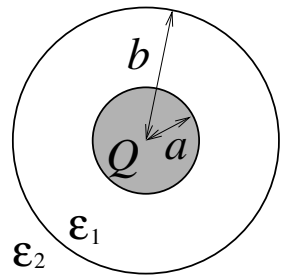
(解答例) 電界および電束密度は球の中心から放射状にできる。また、誘電体境界と電界および電束密度は直交していることから、誘電体境界において電束密度が連続となる。電束密度の r 方向成分を D_r [C/m²] とおくと、

$$r \leq a \text{ では } \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 D_r = \frac{Q}{\frac{4\pi a^3}{3}} \frac{4\pi r^3}{3} \text{ より、 } D_r = \frac{Qr}{4\pi a^3} \text{ となる。また、}$$

$$\text{電界は } E_r = \frac{D_r}{\epsilon_1} \text{ より } E_r = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_1 a^3} \text{ となる。}$$

$$\text{また } r > a \text{ では、 } \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 D_r = Q \text{ より、 } D_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \text{ となる。従って、 } \epsilon_2$$

$$a < r \leq b \text{ では電界は } E_r = \frac{D_r}{\epsilon_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2}, \quad r > b \text{ では } E_r = \frac{D_r}{\epsilon_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r^2} \text{ となる。}$$



- (2) この空間全体に蓄えられている静電場のエネルギーを求めよ。

(解答例) 各領域でのエネルギー密度を算出し、それをその空間で体積積分すればよい。

$$r \leq a \text{ では } w = \frac{1}{2} E_r D_r = \frac{1}{2} \frac{Qr}{4\pi a^3} \frac{Qr}{4\pi\epsilon_1 a^3} = \frac{Q^2 r^2}{32\pi^2 \epsilon_1 a^6} \text{ [J/m}^3\text{] となる。従って、この領域のエネルギーを } W_1 \text{ [J] とすると}$$

$$W_1 = \int dW = \int_0^a w 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_1 a^6} \int_0^a r^4 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_1 a^6} \frac{a^5}{5} = \frac{Q^2}{40\pi\epsilon_1 a}$$

$$a < r \leq b \text{ では } w = \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2} = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_1 r^4} \text{ より、この領域のエネルギーを } W_2 \text{ [J] とすると}$$

$$W_2 = \int dW = \int_a^b w 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_1} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$r > b \text{ では、 } w = \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r^2} = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_2 r^4} \text{ より、この領域のエネルギーを } W_3 \text{ [J] とすると}$$

$$W_3 = \int dW = \int_b^\infty w 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_2} \int_b^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_2 b}$$

結局、全エネルギーは $W = W_1 + W_2 + W_3$ より、以下となる。

$$W = \frac{Q^2}{40\pi\epsilon_1 a} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_2 b}$$

(3) 上で求めた静電場に蓄えられたエネルギーは、この媒質中で電荷を無限遠から運んできた仕事に等しい。そこで、この仕事を求める。

(a) 電荷がない状態から、徐々に電荷を運んで q [C] まで蓄えられたとする。このとき、分布する電荷は徐々に球が大きくなっている状態である。分布した電荷の半径 R を求めよ。

(解答例) 半径 a の球に一様に電荷 Q が分布しているので、電荷密度は $\frac{Q}{\frac{4\pi a^3}{3}}$ [C/m³] となる。この電荷密度が半径 R の球で分布して q となるので、

$$q = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{Q}{\frac{4\pi a^3}{3}} = \frac{R^3}{a^3} Q \quad \Leftrightarrow \quad R = \left(\frac{q}{Q} \right)^{\frac{1}{3}} a$$

(b) $r \leq R$, $R < r \leq b$, $r > b$ の領域においてそれぞれ電界と電束密度を求めよ。

$$\begin{aligned} D_r &= \frac{Qr}{4\pi a^3}, & E_r &= \frac{Qr}{4\pi\epsilon_1 a^3}, & (r \leq R) \\ D_r &= \frac{q}{4\pi r^2} = \frac{QR^3}{4\pi a^3 r^2}, & E_r &= \frac{q}{4\pi\epsilon_1 r^2} = \frac{QR^3}{4\pi\epsilon_1 a^3 r^2}, & (R < r \leq b) \\ D_r &= \frac{q}{4\pi r^2} = \frac{QR^3}{4\pi a^3 r^2}, & E_r &= \frac{q}{4\pi\epsilon_2 r^2} = \frac{QR^3}{4\pi\epsilon_2 a^3 r^2}, & (b < r) \end{aligned}$$

(c) 上の状態で、 dq [C] を無限遠から運んできて、電荷分布の半径が dR [m] だけ大きくなったとする。 dq と dR の関係を求めよ。

(解答例) R から dR 増えた部分の体積 dV は $dV = 4\pi R^2 dR$ より、

$$dq = \frac{Q}{\frac{4\pi a^3}{3}} dV = \frac{Q}{\frac{4\pi a^3}{3}} 4\pi R^2 dR = \frac{3Q}{a^3} R^2 dR$$

(d) dq [C] を無限遠から $r = R$ まで運んでくる仕事を求めよ。

(解答例) 仕事を dW とする。「 R から無限遠まで運ぶ仕事の逆 (即ち、負符号)」と考えれば、

$$\begin{aligned} dW &= - \left(-dq \int_R^b E_r dr - dq \int_b^\infty E_r dr \right) = dq \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_1} \int_R^b \frac{dr}{r^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_2} \int_b^\infty \frac{dr}{r^2} \right) \\ &= \frac{q dq}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \frac{1}{b} \right\} \end{aligned}$$

(e) 上のようにして電荷を Q [C] まで、電荷分布の半径を a [m] まで電荷を運んだときの仕事を求めよ。

(解答例) 求める仕事を W [J] とする。 q または R に直して計算する。 R に直す場合は

$$dW = \left(\frac{R^3}{a^3} Q \right) \left(\frac{3Q}{a^3} R^2 dR \right) \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \frac{1}{b} \right\}$$

となるので、

$$\begin{aligned} W &= \int dW = \int_0^a \left(\frac{R^3}{a^3} Q \right) \left(\frac{3Q}{a^3} R^2 dR \right) \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \frac{1}{b} \right\} \\ &= \frac{3Q^2}{4\pi a^6} \int_0^a \left\{ \frac{1}{\epsilon_1} \left(R^4 - \frac{1}{b} R^5 \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \frac{1}{b} R^5 \right\} dR = \frac{3Q^2}{4\pi a^6} \left\{ \frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{a^5}{5} - \frac{a^6}{6b} \right) + \frac{a^6}{6\epsilon_2 b} \right\} \\ &= \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_1 a} - \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_1 b} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_2 b} = \frac{Q^2}{40\pi\epsilon_1 a} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_1 a} - \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_1 b} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_2 b} \end{aligned}$$

q に直すには

$$dW = \frac{q \, dq}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{Q^{\frac{1}{3}}}{q^{\frac{1}{3}}a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{1}{b} \right\} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{Q^{\frac{1}{3}}}{a} q^{\frac{2}{3}} - \frac{q}{b} \right) + \frac{q}{\varepsilon_2 b} \right\} dq$$

より、

$$\begin{aligned} W &= \int dW = \frac{1}{4\pi} \int_0^Q \left(\frac{Q^{\frac{1}{3}}}{\varepsilon_1 a} q^{\frac{2}{3}} - \frac{q}{\varepsilon_1 b} + \frac{q}{\varepsilon_2 b} \right) dq \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{Q^{\frac{1}{3}}}{\varepsilon_1 a} \frac{3}{5} Q^{\frac{5}{3}} - \frac{Q^2}{2\varepsilon_1 b} + \frac{Q^2}{2\varepsilon_2 b} \right) = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_1 a} - \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_1 b} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_2 b} \end{aligned}$$