

解析電磁気学演習 (9) 真空中の静磁場の法則 (June 12)

学籍番号:

氏名:

☞「解の導出過程」もきちんと書いて下さい。

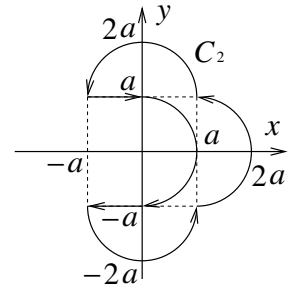
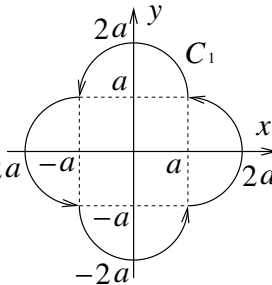
☞ベクトルは $\mathbf{C}$, $\mathbf{E}$ のように、1本加えて太く書いて下さい。太くなっていない場合は×にします。

1 無限長の直流電流 I [A] が z 軸に沿って流れており、 $+z$ 方向が電流の正の向きとする。このとき、周囲にできる磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ を、以下の $z = 0$ 面内の経路に沿った積分 $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$ を計算せよ。

(1) 図中の経路 C_1 (半径 a [m]) の4つの半円からなる。対称性を用いて積分値を計算してよい)

(2) 図中の経路 C_2 (半径 a [m]) の4つの半円と長さ a [m] の2つの線分からなる)

$$\begin{aligned} (1) \quad C_1 \text{ の経路の一部を積分する。} \quad \mathbf{r}_1 &= a\hat{x} + a\cos\phi\hat{x} + a\sin\phi\hat{y} = a(1+\cos\phi)\hat{x} + a\sin\phi\hat{y}, \\ -\frac{\pi}{2} &\leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ d\mathbf{r}_1 &= a d\phi(-\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}) \\ \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I \{-a\sin\phi\hat{x} + a(1+\cos\phi)\hat{y}\}}{2\pi\{a^2(1+\cos\phi)^2 + a^2\sin^2\phi\}} = -2a \\ &\frac{\mu_0 I \{-\sin\phi\hat{x} + (1+\cos\phi)\hat{y}\}}{4\pi a(1+\cos\phi)} \end{aligned}$$



$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mu_0 I \{-\sin\phi\hat{x} + (1+\cos\phi)\hat{y}\}}{4\pi a(1+\cos\phi)} \cdot a d\phi(-\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi = \frac{\mu_0 I}{4}$$

対称性より、 $\oint_{C_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$

(2) C_2 については、計算できていない残りの部分を計算すればよい。

$$\mathbf{r}_2 = x\hat{x} + a\hat{y}, \quad -a \leq x \leq 0 \quad d\mathbf{r}_2 = dx\hat{x}$$

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}_2 = \int_{-a}^0 \frac{\mu_0 I(-a\hat{x} + x\hat{y})}{2\pi(x^2 + a^2)} \cdot dx\hat{x} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_{-a}^0 \frac{dx}{x^2 + a^2} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{\pi}{4} = -\frac{\mu_0 I}{8}$$

$$\mathbf{r}_3 = -x\hat{x} - a\hat{y}, \quad 0 \leq x \leq a \quad d\mathbf{r}_3 = -dx\hat{x}$$

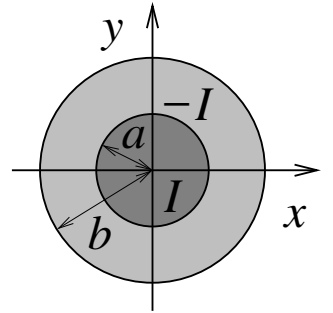
$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}_3 = \int_0^a \frac{\mu_0 I(a\hat{x} - x\hat{y})}{2\pi(x^2 + a^2)} \cdot (-dx\hat{x}) = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{\pi}{4} = -\frac{\mu_0 I}{8}$$

$$\mathbf{r}_4 = a\cos\phi\hat{x} - a\sin\phi\hat{y}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad d\mathbf{r}_4 = -a d\phi(\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}),$$

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}_4 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mu_0 I(a\sin\phi\hat{x} + a\cos\phi\hat{y})}{2\pi a^2} \cdot \{-a d\phi(\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y})\} = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\phi = -\frac{\mu_0 I}{2}$$

$$\therefore \oint_C \mathbf{B} \bullet d\mathbf{r} = \frac{3}{4}\mu_0 I - \frac{\mu_0 I}{8} - \frac{\mu_0 I}{8} - \frac{\mu_0 I}{2} = 0$$

- 2 図に示すように、 z 軸を円柱軸とする同軸の円柱導体中を、それぞれ $+I, -I$ [A] の電流が一様に流れている ($+z$ 方向を正とする)。なお、2つの導体の間は十分に薄い誘電体で絶縁されているものとする。このとき、 z 軸からの距離 ρ [m] における磁束密度は ϕ 成分のみもち、 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_\phi(\rho)\hat{\phi}$ [T] で表される。 $B_\phi(\rho)$ を求めよ。



$\rho < a$ において

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{B} \bullet d\mathbf{r} &= 2\pi\rho B_\phi = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \bullet d\mathbf{S} = \mu_0 \frac{I}{\pi a^2} \pi \rho^2 = \mu_0 \frac{\rho^2}{a^2} I \\ \therefore B_\phi &= \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \end{aligned}$$

$a < \rho < b$ において

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{B} \bullet d\mathbf{r} &= 2\pi\rho B_\phi = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \bullet d\mathbf{S} = \mu_0 \left\{ I - \frac{I}{\pi b^2 - \pi a^2} (\pi \rho^2 - \pi a^2) \right\} = \mu_0 \frac{b^2 - \rho^2}{b^2 - a^2} I \\ \therefore B_\phi &= \frac{\mu_0 (b^2 - \rho^2) I}{2\pi \rho (b^2 - a^2)} \end{aligned}$$

$\rho > b$ において $\iint_S \mathbf{J} \bullet d\mathbf{S} = 0$ より、 $B_\phi = 0$