解析電磁気学演習 (10) 磁場によって働く力 (June 19)	
学籍番号:	氏名:

☞「解の導出過程」もきちんと書いて下さい。
☞ベクトルは$\mathbb{C}$, $\mathbb{E}$のように、**1**本加えて太く書いて下さい。太くなっていない場合は×にします。

$\boxed{1}$ 図1に示すように、一様磁場 $\boldsymbol{B} = -B_0\hat{\boldsymbol{y}}$ [T]、及び一様電場 $\boldsymbol{E} = -E_0\hat{\boldsymbol{z}}$ [V/m] がある空間において、時刻 $t = 0$ s に荷電粒子 (電荷 q [C]、質量 m [kg]) が位置 $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{0}$ [m]、速度 $\boldsymbol{v}(0) = v_0\hat{\boldsymbol{x}}$ [m/s] で運動をしている。$t > 0$ におけるこの粒子の運動を表す $\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{r}(t)$ を求めよ。

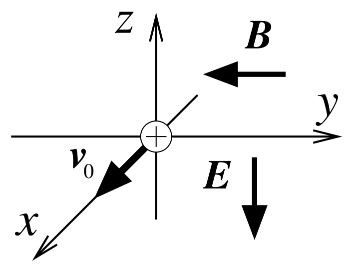

図 1: $t = 0$ における荷電粒子の位置と速度

荷電粒子に働く力は $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} + q\boldsymbol{E}$ なので、運動方程式は以下となる。

$$
\begin{aligned}
m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} + q\boldsymbol{E} = q(v_x\hat{\boldsymbol{x}} + v_y\hat{\boldsymbol{y}} + v_z\hat{\boldsymbol{z}}) \times (-B_0\hat{\boldsymbol{y}}) + q(-E_0\hat{\boldsymbol{z}}) \\
&= qB_0(-v_x\hat{\boldsymbol{z}} + v_z\hat{\boldsymbol{x}}) - qE_0\hat{\boldsymbol{z}}
\end{aligned}
$$

成分ごとに書けば

$$
\frac{dv_x}{dt} = \omega_c v_z, \qquad \frac{dv_z}{dt} = -\omega_c v_x - \frac{q}{m}E_0
$$

となる。ここで、$\omega = \dfrac{qB_0}{m}$ [rad/s] である。

この連立微分方程式を解く。$\dfrac{d^2v_z}{dt^2} = -\omega_c\dfrac{dv_x}{dt} = -\omega_c^2 v_z$ より、$v_z = A\cos\omega_c t + B\sin\omega_c t$ となる。初期条件 $v_z(0) = 0$ より、$A = 0$ となる。

また、運動方程式の第二式から $v_x = -\dfrac{1}{\omega_c}\dfrac{dv_z}{dt} - \dfrac{1}{\omega_c}\dfrac{q}{m}E_0 = -B\cos\omega_c t - \dfrac{E_0}{B_0}$ となる。初期条件 $v_x(0) = v_0$ より、$-B - \dfrac{E_0}{B_0} = v_0$、即ち $B_0 = -\left(v_0 + \dfrac{E_0}{B_0}\right)$ である。

y 成分については力はかからないので $v_y = C$、初期条件から $v_y = 0$ と決まる。

結局、

$$
v_x = \left(v_0 + \frac{E_0}{B_0}\right)\cos\omega_c t - \frac{E_0}{B_0}, \qquad v_y = 0, \qquad v_z = -\left(v_0 + \frac{E_0}{B_0}\right)\sin\omega_c t
$$

ちなみに、$\boldsymbol{r}(t)$ については、$\boldsymbol{r} = \displaystyle\int_0^t \boldsymbol{v}(t')dt' + \boldsymbol{r}(0)$ から、以下となる。

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\omega_c}\left(v_0 + \frac{E_0}{B_0}\right)\sin\omega_c t - \frac{E_0}{B_0}t, \\
y &= 0, \\
z &= \frac{1}{\omega_c}\left(v_0 + \frac{E_0}{B_0}\right)(\cos\omega_c t - 1)
\end{aligned}
$$

補足: 連立微分方程式を解く際に、別の式を時間微分した場合、

$$
\frac{d^2v_x}{dt^2} = \omega_c\left(-\omega_c v_x - \frac{q}{m}E_0\right) = -\omega_c^2 v_x - \omega_c^2\frac{E_0}{B_0}
$$

$v_x = -\dfrac{E_0}{B_0}$ は一つの特解である。これに同次方程式の解 $A\cos\omega_c t + B\sin\omega_c t$ を加えた

$$v_x = A\cos\omega_c t + B\sin\omega_c t - \frac{E_0}{B_0}$$

が一般解である。ここから初期条件を適用して求めることも可能である。

$\boxed{2}$ 図 2 に示すように一様磁場 $\boldsymbol{B} = B_0\hat{\boldsymbol{y}}$ [T] に直角三角形 (底辺 a [m]、高さ b [m]) の導線が置かれており、底辺の中心が原点となっている。この三角形は z 軸回りに回転できるよう固定されている。底辺と x 軸のなす角を ϕ [rad] とする。導線中を I [A] の電流が図の矢印の方向に流れているとき、この三角形電流ループが磁場から受ける力 $\boldsymbol{F}$ [N]、および力のモーメント $\boldsymbol{N}$ [N m] を求めよ。力のモーメントが $\boldsymbol{0}$ となる ϕ、および最大となる ϕ はいくらか。

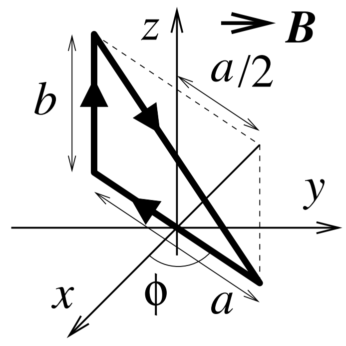

図 2: 一様磁場中の三角形電流ループ

(i) xy 平面内にある電流部分について、$\boldsymbol{r}_1 = -s(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}+\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}})$, $-\dfrac{a}{2} \leqq s \leqq \dfrac{a}{2}$ と書ける。線素ベクトルは $d\boldsymbol{r}_1 = -ds(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}})$ となる。

電流素片 $Id\boldsymbol{r}_1$ が受けるアンペール力 $d\boldsymbol{F}_1$ は

$$d\boldsymbol{F}_1 = -I\,ds(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}) \times B_0\hat{\boldsymbol{y}} = -IB_0\cos\phi\, ds\hat{\boldsymbol{z}}$$

となる。辺全体で受ける力は

$$\boldsymbol{F} = \int d\boldsymbol{F} = -IB_0\cos\phi\hat{\boldsymbol{z}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} ds = -IB_0 a\cos\phi\hat{\boldsymbol{z}}$$

また、電流素片 $Id\boldsymbol{r}_1$ にかかる力のモーメント $d\boldsymbol{N}_1$ は

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{N}_1 &= -s(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}) \times (-IB_0\cos\phi\, ds\hat{\boldsymbol{z}}) \\ &= IB_0\cos\phi\, s\, ds(-\cos\phi\hat{\boldsymbol{y}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}) \end{aligned}$$

従って、$\boldsymbol{N}_1 = \displaystyle\int d\boldsymbol{N}_1 = IB_0\cos\phi(-\cos\phi\hat{\boldsymbol{y}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{x}})\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} s\, ds = \boldsymbol{0}$

(ii) z 軸に平行な電流の経路は $\boldsymbol{r}_2 = -\dfrac{a}{2}(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}) + z\hat{\boldsymbol{z}}$, $0 \leqq z \leqq b$ と表せ、その線素ベクトルは $d\boldsymbol{r}_2 = dz\hat{\boldsymbol{z}}$ となる。

電流素片 $I\,d\boldsymbol{r}_2$ に働くアンペール力は $d\boldsymbol{F}_2 = I\,dz\hat{\boldsymbol{z}} \times B_0\hat{\boldsymbol{y}} = -IB_0\,dz\hat{\boldsymbol{x}}$、辺全体では $\boldsymbol{F}_2 = -IB_0 b\hat{\boldsymbol{x}}$ となる。

電流素片 $I\,d\boldsymbol{r}_2$ に働くアンペール力による力のモーメントは $\boldsymbol{N}_2 = -\dfrac{a}{2}(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}+\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}})\times(-IB_0\,dz\,\hat{\boldsymbol{x}}) = -\dfrac{a}{2}IB_0\,dz\,\sin\phi\hat{\boldsymbol{z}}$、辺全体では $\boldsymbol{N}_2 = -\dfrac{a}{2}IB_0 b\sin\phi\hat{\boldsymbol{z}}$ となる。

(iii) 斜辺に沿う電流の経路は、始点が $\boldsymbol{r}_P = -\dfrac{a}{2}(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}) + b\hat{\boldsymbol{z}}$、終点が $\boldsymbol{r}_Q = \dfrac{a}{2}(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}})$ となるので、$\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_P + s(\boldsymbol{r}_Q - \boldsymbol{r}_P) = -\dfrac{a}{2}(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}) + b\hat{\boldsymbol{z}} + s\,a(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}) - s\,b\hat{\boldsymbol{z}}$ と表せ、線素ベクトルは $d\boldsymbol{r}_3 = ds\{a(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}) - b\hat{\boldsymbol{z}}\}$ となる。

電流素片に働くアンペール力は $d\boldsymbol{F}_3 = I\,ds\{a(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}) - b\hat{\boldsymbol{z}}\} \times B_0\hat{\boldsymbol{y}} = IB_0 ds(a\cos\phi\hat{\boldsymbol{z}} + b\hat{\boldsymbol{x}})$、辺全体では $\boldsymbol{F}_3 = IB_0(a\cos\phi\hat{\boldsymbol{z}} + b\hat{\boldsymbol{x}})$ となる。

電流素片に働くアンペール力による力のモーメントは、z 軸から $\boldsymbol{r}_3$ へのベクトルは $\boldsymbol{r}_3-(\boldsymbol{r}_3\bullet\hat{\boldsymbol{z}})\hat{\boldsymbol{z}}$ と書けるので、$d\boldsymbol{N}_3 = \{\boldsymbol{r}_3-(\boldsymbol{r}_3\bullet\hat{\boldsymbol{z}})\}\times IB_0 ds(a\cos\phi\hat{\boldsymbol{z}}+b\hat{\boldsymbol{x}}) = IB_0 a(s-\frac{1}{2})ds(-a\cos^2\phi\hat{\boldsymbol{y}}+a\sin\phi\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}-b\sin\phi\hat{\boldsymbol{z}})$ となり、$\boldsymbol{N}_3 = \boldsymbol{0}$ となる。

結局、電流ループ全体に働く力と力のモーメントは以下となる。

$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{N} = \sum \boldsymbol{N}_i = -\frac{a}{2} I B_0 b \sin\phi \hat{\boldsymbol{z}}$$

力のモーメントは $\phi = 0, \pi$ で $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$ となり、$\phi = \pm\dfrac{\pi}{2}$ で最大となる。

力のモーメントは、$0 < \phi < \pi$ では $\boldsymbol{N}$ は $-z$ 方向、$-\pi < \phi < 0$ では $\boldsymbol{N}$ は $+z$ 方向となり、図 2 の直角三角形の直角の頂点が $x = -\frac{a}{2}$ に位置する (ϕ が 0 になる) 向きに回転する力のモーメントが働く。従って、$\phi = \pi$ でも回転はしないが、わずかに角度がずれただけで $\phi = 0$ とするようになる、不安定な状態である。