

解析電磁気学演習 (15) 境界値問題 (July 24)

(1)

電位分布: 鏡像法より

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - x_0\hat{\mathbf{x}}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + x_0\hat{\mathbf{x}}|} \right\} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\{(x - x_0)^2 + y^2 + z^2\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\{(x + x_0)^2 + y^2 + z^2\}^{\frac{1}{2}}} \right]$$

導体表面の面電荷密度分布: $x = 0$ における導体表面の電荷密度分布は、電束密度 $\mathbf{D}$ の x 成分 D_x の $x = 0$ の値に等しい。

$$D_x = -\epsilon_0 \nabla \varphi \cdot \hat{\mathbf{x}} = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{x - x_0}{\{(x - x_0)^2 + y^2 + z^2\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{x + x_0}{\{(x + x_0)^2 + y^2 + z^2\}^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$\sigma = D_x(0, y, z) = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{-x_0}{\{(-x_0)^2 + y^2 + z^2\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{x_0}{\{(x_0)^2 + y^2 + z^2\}^{\frac{3}{2}}} \right] = -\frac{qx_0}{2\pi(x_0^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

点電荷に働く力: 電界によって電荷に力が働くが、自分自身がつくる電界からは力を受けない。従って、鏡像電荷がつくる電界を求めれば力が計算できる。

ここでは別解として、導体表面に誘導された面電荷密度が点電荷に及ぼす力を求める。

導体表面の面電荷密度 $\sigma(y, z)$ が点電荷 q に及ぼす力を求めればよい。 $+y$ 方向から $+z$ 方向への $x = 0$ 面内の角度を ψ とおくと $x = 0$ の面 (yz 平面) の任意の点は $\gamma \cos \psi \hat{\mathbf{y}} + \gamma \sin \psi \hat{\mathbf{z}}$ と表せる。この点における微小面素 $\gamma d\gamma d\psi$ 中の電荷が q に及ぼす力 $d\mathbf{F}$ は

$$d\mathbf{F} = \frac{q \sigma \gamma d\gamma d\psi (x_0\hat{\mathbf{x}} - \gamma \cos \psi \hat{\mathbf{y}} - \gamma \sin \psi \hat{\mathbf{z}})}{4\pi\epsilon_0(x_0^2 + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{q^2 x_0 \gamma d\gamma d\psi (x_0\hat{\mathbf{x}} - \gamma \cos \psi \hat{\mathbf{y}} - \gamma \sin \psi \hat{\mathbf{z}})}{8\pi^2 \epsilon_0 (x_0^2 + \gamma^2)^3}$$

となるので、 $\mathbf{F}$ は

$$\mathbf{F} = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty -\frac{q^2 x_0 \gamma (x_0\hat{\mathbf{x}} - \gamma \cos \psi \hat{\mathbf{y}} - \gamma \sin \psi \hat{\mathbf{z}})}{8\pi^2 \epsilon_0 (x_0^2 + \gamma^2)^3} d\gamma d\psi = -\frac{q^2 x_0^2}{4\pi\epsilon_0} \hat{\mathbf{x}} \int_0^\infty \frac{\gamma}{(x_0^2 + \gamma^2)^3} d\gamma$$

$$= -\frac{q^2 x_0^2}{4\pi\epsilon_0} \hat{\mathbf{x}} \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{(x_0^2 + \gamma^2)^2} \right]_0^\infty = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 x_0^2} \hat{\mathbf{x}} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2x_0)^2} \hat{\mathbf{x}}$$

→ 鏡像電荷からの力と同じ。

(2) 鏡像電荷 $-q$ [C] を $(-x_0, y_0, 0)$ と $(x_0, -y_0, 0)$ におき、さらなる鏡像電荷 q [C] を $(-x_0, -y_0, 0)$ におくことで $x = 0$ の面および $y = 0$ の面の電位を 0 とすることができ、境界値が正しく設定される。

電位: 電位は鏡像電荷を考慮して

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{\{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\{(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2 + z^2\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2 + z^2\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\{(x+x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2\}^{\frac{1}{2}}} \right]$$

導体表面の全電荷: $y = 0$ の面 (xz 平面) に誘導される面電荷密度 σ_1 [C/m²] は導体表面の電束密度 D_y [C/m²] に等しい。

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= D_y(x, 0, z) = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0, z) \\ &= \frac{qy_0}{2\pi} \left[\frac{1}{\{(x+x_0)^2 + y_0^2 + z^2\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\{(x-x_0)^2 + y_0^2 + z^2\}^{\frac{1}{2}}} \right] \end{aligned}$$

これを $0 \leq x < \infty, -\infty < z < \infty$ で積分することで $y = 0$ の面に誘導されている電荷 Q_1 [C] を求めることができる。

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \sigma_1 dx dz = \frac{qy_0}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{(x+x_0)^2 + y_0^2} - \frac{1}{(x-x_0)^2 + y_0^2} \right] dx \\ &= -\frac{2q}{\pi} \tan^{-1} \frac{x_0}{y_0} \end{aligned}$$

同様に $x = 0$ の面に誘導される電荷 Q_2 [C] を求めるが、 x_0 と y_0 を入れ替えればよい。従って、 $Q_2 = -\frac{2q}{\pi} \tan^{-1} \frac{y_0}{x_0}$ である。

結局、全電荷 Q [C] は $Q = Q_1 + Q_2 = -\frac{2q}{\pi} \left(\tan^{-1} \frac{x_0}{y_0} + \tan^{-1} \frac{y_0}{x_0} \right)$ となるが、括弧内は直角三角形の、直角を除いた角の合計なので $\frac{\pi}{2}$ である。従って、 $-q$ [C] が誘導される全電荷となる。