解析電磁気学演習

電子情報システムコース
平成 29 年度版

情報・ 通信工学科
担当: 安藤 芳晃

第1章　電磁気学に必要な計算

1.1　ベクトルの基本

✶の印がある問題は、ベクトルに慣れるための、ベクトルを利用した演習問題です。直接電磁気学に関わる内容ではありません。

問 1. ✶ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ は、原点 O からそれぞれ点 A, B, C, D へのベクトルである。もし $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = 2(\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c})$ が成立するとき、線分 AD と線分 BC が交わる P 点は、線分 AD と線分 BC をそれぞれ 3 等分する点の一つとなることを示せ。

問 2. ✶ 任意の三角形の辺の長さを a, b, c とし、a と b の辺がなす各を θ とする。$c^2 = a^2 + b^2 - 2ac\cos\theta$ が成立することを示せ。

問 3. ✶ 三角形のある頂点と、向かい合う辺の中点を結ぶ線を中線と呼ぶ。三角形には三つの中線があるが、これが一点で交わることを示せ。

問 4. ✶ 中心を O とする半径 1 の球に、正四面体が内接しており、頂点を A, B, C, D とする。中心 O から頂点を A, B, C, D へ向うベクトルを $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ とする。

(1) 辺 AB と辺 BC の長さが等しいことから、$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{C}$ であることを示せ。

(2) 辺 AB の長さが 0 でないことから、$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} \neq 1$ を示せ。

(3) スカラー a, b, c, d に対して、$a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B} + c\boldsymbol{C} + d\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$ が成立しているとき、$a = b = c = d$ であることを示せ。

(4) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす各を θ とするとき、$\cos\theta$ の値を求めよ。

問 5. ✶ ベクトルを用いてメネラウスの定理を証明せよ。

三角形 ABC において、直線 l と BC, CA, AB の交点をそれぞれ D, E, F とする。次式が成立することを証明せよ。

$$\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA} = 1$$

問 6. ベクトル $\boldsymbol{S} = 3\hat{\boldsymbol{x}} + 4\hat{\boldsymbol{y}} + 5\hat{\boldsymbol{z}}$ と、単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{z}}$ がある。

(1) ベクトル $\boldsymbol{S}$ の $\hat{\boldsymbol{a}}$ 方向成分を求めよ。

(2) 単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{a}}$ に直交する単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{b}}$ を見つけよ。

(3) 単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{a}}$, $\hat{\boldsymbol{b}}$ の両方に直交する単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{c}}$ を見つけよ。

(4) ベクトル $\boldsymbol{S}$ を $\boldsymbol{S} = S_a\hat{\boldsymbol{a}} + S_b\hat{\boldsymbol{b}} + S_c\hat{\boldsymbol{c}}$ の形で表示せよ。

(5) ベクトル $\boldsymbol{S}$ の大きさを二つの座標系 (x, y, z と、a, b, c) で計算して比較せよ。

問 7. 二つのベクトル $\boldsymbol{a} = 2\hat{\boldsymbol{x}} - 3\hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{z}}$, $\boldsymbol{b} = 3\hat{\boldsymbol{y}} - 4\hat{\boldsymbol{z}}$ がある。

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$ を、ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対して平行なベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と垂直なベクトル $\boldsymbol{a}_2$ に分けよ (当然に、$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ となる)。

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直なベクトル $\boldsymbol{c}$ を見つけよ。

1.2　ベクトル関数

問 8. 図 1.1 に示されている経路 C を表すベクトル関数とそのパラメタの範囲を求めよ。経路 C は半径 $\frac{1}{2}$ の半円であり、始点、終点は図の点 P, S、矢印の方向が経路の方向である。

問 9. 図 1.2 に示されている経路 C を表すベクトル関数とそのパラメタの範囲を求めよ。経路 C は、半径 1 の四分円が四つからなっている。また、始点、終点は図の点 P であり、矢印の方向が経路の方向である。

(不連続な経路であるため、一つのベクトル関数で表すことはできない。複数のベクトル関数で表すこと。また、経路の方向に対してパラメタが増えるようになるよう、注意すること)

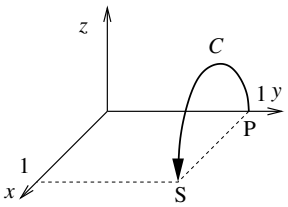


図 1.1: 半円の経路 C

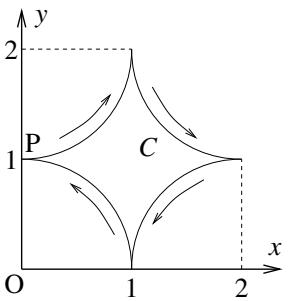


図 1.2: 四分円からなる経路 C

問 10. 図 1.3, 1.4 に示す開曲面を示すベクトル関数とそのパラメタの範囲を示せ。

問 11. 図 1.5 に示す開曲面を表すベクトル関数とそのパラメタの範囲を求めよ。

問 12. 図 1.6 の開曲面 S を示すベクトル関数とそのパラメタの範囲を求めよ。楕円の長径 (長軸の長さ) は 6、短径 (短軸の長さ) は 4 とする。

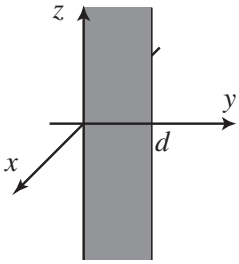


図 1.3: 無限平面

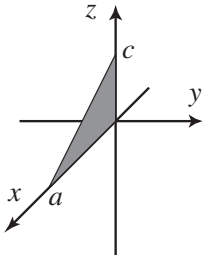


図 1.4: 三角形の平面

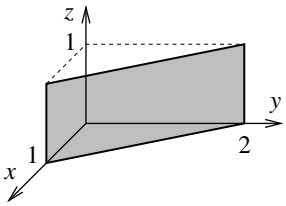


図 1.5: 開曲面 (平面)

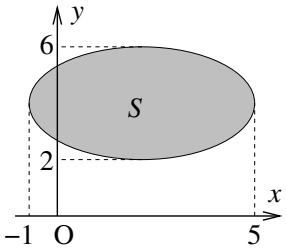


図 1.6: 楕円の開曲面 S

問 13. 図 1.7 に示す開曲面 (影の部分で平面) を表すベクトル関数とそのパラメタの範囲を求めよ。

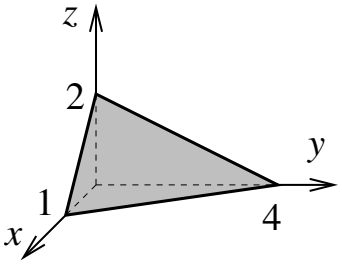


図 1.7: 開曲面 (平面)

問 14. 図 1.8 の逆さ円錐の領域 (体積)V を示すベクトル関数とそのパラメタの範囲を求めよ。

問 15. 図 1.9 の円柱の半分の領域 (体積)V を示すベクトル関数とそのパラメタの範囲を求めよ。

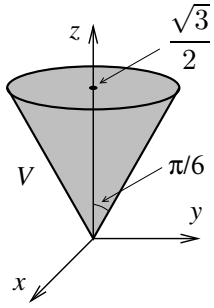


図 1.8: 逆さ円錐 V

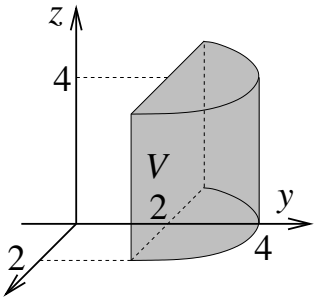


図 1.9: 半円柱の体積領域 V

問 16. $\phi = \dfrac{\pi}{6}$ の方向を基準とした円筒座標系の基本ベクトル $\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ を用いてデカルト座標系の基本ベクトル $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}$ を表せ。

問 17. 位置 $\boldsymbol{r}$、即ち x, y, z を独立変数とするベクトル関数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}(x, y, z) = y\hat{\boldsymbol{x}} + x\hat{\boldsymbol{y}} + xz^2\hat{\boldsymbol{z}}$ を考える。

$\boldsymbol{r}_0 = \hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} + \sqrt{6}\hat{\boldsymbol{z}}$ の点での $\boldsymbol{A}$、即ち $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_0)$ を評価する。

(1) デカルト座標系で $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_0)$ を書け。

(2) $\boldsymbol{r}_0$ の点の方向を基準とした円筒座標系の基本単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ を $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \rho_x\hat{\boldsymbol{x}} + \rho_y\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \phi_x\hat{\boldsymbol{x}} + \phi_y\hat{\boldsymbol{y}}$ の形で書け (即ち、$\rho_x, \rho_y, \phi_x\phi_y$ を求めよ)。

(3) 円筒座標系で $\boldsymbol{r}_0$ を書け。即ち、$\boldsymbol{r}_0 = \rho_0\hat{\boldsymbol{\rho}} + \phi_0\hat{\boldsymbol{\phi}} + z_0\hat{\boldsymbol{z}}$ と書いたときの ρ_0, ϕ_0, z_0 を求めよ。基本単位ベクトルは、$\boldsymbol{r}_0$ の点の方向のものを用いよ。

(4) 円筒座標系で $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_0)$ を書け。即ち、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_0) = A_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}}$ と書いたときの A_ρ, A_ϕ, A_z を求めよ。基本単位ベクトルは、$\boldsymbol{r}_0$ の点の方向のものを用いよ。

(5) 球座標系で $\boldsymbol{r}_0$ を書け。基本単位ベクトルは、$\boldsymbol{r}_0$ の点の方向のものを用いよ。

(6) 球座標系で $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_0)$ を書け。基本単位ベクトルは、$\boldsymbol{r}_0$ の点の方向のものを用いよ。

1.3 ベクトルの微積分

問 18. 2 つのベクトル $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$, $\boldsymbol{r}_0 = x_0\hat{\boldsymbol{x}} + y_0\hat{\boldsymbol{y}} + z_0\hat{\boldsymbol{z}}$ を定義する。$R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|$ を求めよ。また、$\dfrac{\partial R}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{R}\right)$ を求めよ。

問 19. ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(s) = -2s\hat{\boldsymbol{x}} + \dfrac{2s}{s^2+1}\hat{\boldsymbol{y}} + \dfrac{2}{s^3}\hat{\boldsymbol{z}}$ に対し、$\displaystyle\int_1^2 \boldsymbol{A}(s)ds$ を計算せよ。

問 20. 図 1.10, 1.11 にある各経路を表すベクトル関数とそのパラメタの範囲を示せ。パラメタが増える方向が、図に示した矢印の方向とする。また、それぞれの線素ベクトル $d\boldsymbol{r}$ を求めよ。

問 21. 原点を中心とし、$z = 0$ の面上における半径 a の円の円周の一部を積分路 C とする (図 1.12)。ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = x\hat{\boldsymbol{x}}$ に対して、$\displaystyle\int_C \boldsymbol{A} \bullet d\boldsymbol{r}$ を計算せよ。周回積分路の方向は $+x$ 方向から $+y$ 方向 ($+z$ 方向に対して右ねじ) の向きとする。

問 22. 原点を中心として、$z = 0$ の面上における半径 a の円上を周回積分路 C とする (周回の方向は、$+z$ 方向に対して右ねじ)。ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = yx^2\hat{\boldsymbol{x}} + x^3\hat{\boldsymbol{y}} + x^2\hat{\boldsymbol{z}}$ に対して、$\displaystyle\oint_C \boldsymbol{A} \bullet d\boldsymbol{r}$ を計算せよ。

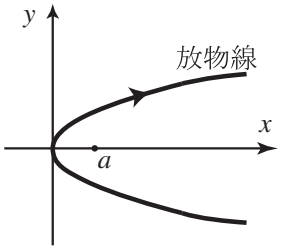


図 1.10: $z = 0$ 平面上での放物線 $x = y^2$

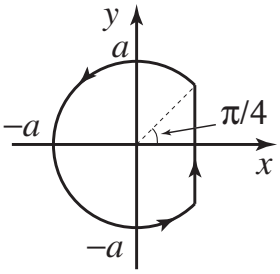


図 1.11: $z = 0$ 平面上での一部が直線の閉曲線

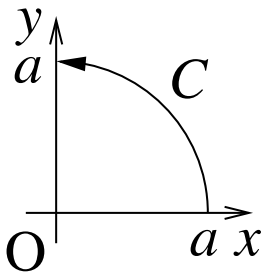


図 1.12: 積分路 C

問 23. 位置 $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$ を変数とするベクトル関数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$ を考える。$x = a(> 0)$ から、$+x$ 方向に x 軸に沿って無限大までの直線経路を C_1 とする。$\displaystyle\int_{C_1} \boldsymbol{A} \bullet d\boldsymbol{r}$ を求めよ。

問 24. 上の問題において積分路を変更する。$\boldsymbol{r}_1 = -\dfrac{a}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{x}} + \dfrac{a}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{y}}$ の点から、$\phi = 135°$ の方向に、無限大までの直線経路を C_2 とする。$\displaystyle\int_{C_2} \boldsymbol{A} \bullet d\boldsymbol{r}$ を求めよ。

問 25. 図 1.13 に示されている経路 C($z = 0$ 平面上において、$y = \log x$ の曲線の一部) において、ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = y\hat{\boldsymbol{x}}$ に対して、$\displaystyle\int_C \boldsymbol{A} \bullet d\boldsymbol{r}$ を計算せよ。周回積分路の方向は、$\hat{\boldsymbol{x}}$ が始点、$e\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}$ が終点とする。

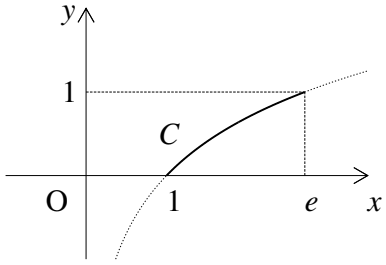


図 1.13: 経路 C

問 26. ある面 S が $\boldsymbol{r}(u, v) = u\hat{\boldsymbol{x}} + v\hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{z}}$, $(0 \leqq u \leqq 1, 1 \leqq v \leqq 2)$ と表されている。ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = z\hat{\boldsymbol{x}} + x\hat{\boldsymbol{y}} + y\hat{\boldsymbol{z}}$ に対して、$\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{S}$ を求めよ。$d\boldsymbol{S}$ の向きは $+z$ 方向とする。

問 27. 原点を中心として、半径 a の球面を閉曲面 S とする。ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = x\hat{\boldsymbol{x}}$ に対して、$\displaystyle\oiint_S \boldsymbol{A} \bullet d\boldsymbol{S}$ を計算せよ。$d\boldsymbol{S}$ の向きは球面の外向き (原点から放射方向) とする。

問 28. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$ とする。原点を中心とする半径 a の球面 S について、$\displaystyle\oiint_S \boldsymbol{A} \bullet d\boldsymbol{S}$ を求めよ。ただし、$d\boldsymbol{S}$ は球面外向きを向いているものとする。

問 29. 図 1.14 に示す開曲面 S(影の部分) にわたる、ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -x^2\hat{\boldsymbol{x}} + 2y^2\hat{\boldsymbol{y}} + z^2\hat{\boldsymbol{z}}$ の面積分 $\displaystyle\iint \boldsymbol{A} \bullet d\boldsymbol{S}$ を計算せよ。ただし、$d\boldsymbol{S}$ の方向は $+x, +y, +z$ 側を向いた方向とする (図の矢印の方向)。

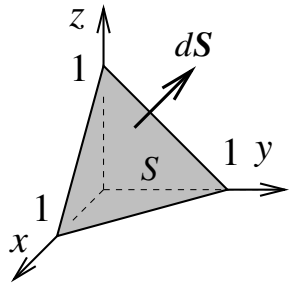


図 1.14: 平面と法線ベクトル

問 30. ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(\rho, \phi) = \rho\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \rho\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{z}}$ $(0 \leqq \rho \leqq 2, 0 \leqq \phi \leqq \frac{\pi}{2})$ であらわされる曲面 S と、ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = yz\hat{\boldsymbol{x}} + zx\hat{\boldsymbol{y}} + xy\hat{\boldsymbol{z}}$ に対して、① 曲面 S を図示し、② $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{S}$ を求めよ。ただし、$d\boldsymbol{S}$ の向きは $+z$ 方向とする。

問 31. 位置 $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$ の関数であるスカラー場 $\phi(\boldsymbol{r}) = 3|\boldsymbol{r}|$ に対して、原点を中

心とする半径 2 の球の領域 V における体積積分 $\iiint_V \phi(\boldsymbol{r})dV$ を求めよ。

問 32. 図 1.15 に示す円錐の領域 V(底面の中心が原点であり、底面は半径 1 の円、高さ 1) に対し、スカラー場 $\phi(\boldsymbol{r}) = x + y + z$ を体積積分 $\iiint_V \phi(\boldsymbol{r})\, dV$ を求めよ。

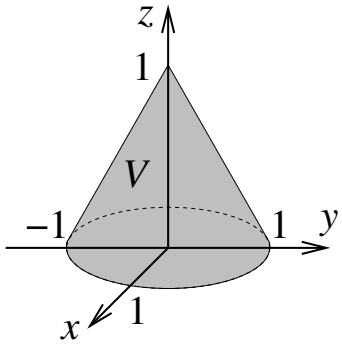


図 1.15: 円錐の体積領域 V

問 33. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$ とする。半径 a の球の領域 V について、$\iiint_V \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}dV$ を求めよ。

1.4 テイラー展開

問 34. テイラー展開について、下記の問に答えよ。

(1) 関数 e^x を、$x = 0$ の周りでテイラー展開せよ (5 次まで)。展開した近似式を $f_e(x)$ とする。

(2) 求めたテイラー展開で 3 次の項 (x^3) まで考えて、$e^{0.1}, e^{-0.1}$ の近似値を求めよ。(関数電卓等でその値を出して、どの程度の近似か確認せよ)

(3) 関数 $\sin x$ を、$x = 0$ の周りでテイラー展開せよ (5 次まで)。展開した近似式を $f_{\sin}(x)$ とする。

(4) 関数 $f(x) = \cos x$ を、$x = 0$ の周りでテイラー展開せよ (5 次まで)。展開した近似式を $f_{\cos}(x)$ とする。

(5) 上の展開から、オイラーの公式 $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ が 5 次まで成立している、即ち $f_e(j\theta) = f_{\cos}(\theta) + jf_{\sin}(\theta)$ となることを示せ。

問 35. テイラー展開について、下記の問に答えよ。

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}$ を、$x = 0$ の周りで 1 次の項までテイラー展開せよ。

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}$ を、$x = 8$ の周りで 1 次の項までテイラー展開せよ。

問 36. 関数 $\log_e x$ について、$x = 1$ におけるテイラー展開を 4 次の項まで求めよ。また、その式を用いて $\log_e 1.1$ の近似値を求めよ。

問 37. 関数 $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ について、$x = 0$ におけるテイラー展開を 3 次の項まで求めよ。

問 38. 関数 $f(x, y) = \sin(xy)$ について、$\boldsymbol{r} = \frac{\pi}{2}\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}$ の点においてテイラー展開を求めよ (2 次の項まで)。

1.5 ベクトル解析

問 39. 位置 $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$ を変数とするスカラー関数 $\varphi(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{|\boldsymbol{r}|}$ を考える。

(1) $\boldsymbol{\nabla}\varphi$ を計算せよ。

(2) $\boldsymbol{r}_0 = \hat{\boldsymbol{x}} + 2\hat{\boldsymbol{y}}$ の点において、$\varphi(\boldsymbol{r})$ の $+x$ 方向の方向微分を求めよ。

(3) $\boldsymbol{r}_0 = \hat{\boldsymbol{x}} + 2\hat{\boldsymbol{y}}$ の点において、$\varphi(\boldsymbol{r})$ の $+x$ 軸から $+y$ 軸へ 45° 回転した方向の方向微分を求めよ。

(4) $\boldsymbol{r}_0 = \hat{\boldsymbol{x}} + 2\hat{\boldsymbol{y}}$ の点において、$\varphi(\boldsymbol{r})$ の方向微分が最大となる方向と、そのときの方向微分を求めよ。

問 40. 任意の関数 $f(x, y)$ と、その勾配 $\boldsymbol{\nabla}f$、およびその勾配の経路方向線積分について、テイラー展開を用いて考える。

(1) $f(x, y)$ を原点のまわりで 2 次までテイラー展開せよ。(2 次までテイラー展開した関数を $F(x, y)$ とする)

(2) $\boldsymbol{\nabla}F(x, y)$ を求めよ。

(3) 経路 C_1: $\boldsymbol{r}(x) = x\hat{\boldsymbol{x}} + x^2\hat{\boldsymbol{y}}$, $(0 \leqq x \leqq x_0)$ を考える (始点を $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{0}$、終点を $\boldsymbol{r}_2 = x_0\hat{\boldsymbol{x}} + x_0^2\hat{\boldsymbol{y}}$ とする)。この経路に沿って、$\boldsymbol{\nabla}F(x, y)$ を経路方向線積分せよ。

(4) $F(\boldsymbol{r}_2) - F(\boldsymbol{r}_1)$ を計算せよ。(前問の結果と比較してみましょう)

問 41. 関数 $f(\boldsymbol{r}) = yz$ について、点 $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}}+z\hat{\boldsymbol{z}}$ を中心とした微小体積 $\Delta V = \Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ に関して、$\displaystyle\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iiint_{\Delta V} f(\boldsymbol{r})dV$ を計算せよ。

問 42. 関数 $f(\boldsymbol{r}) = y\sin(kz)$ について、点 $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$ を中心とした体積 $\Delta V = \Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ に関して、

$$\iiint_{\Delta V} f(\boldsymbol{r}')\,dV'$$

を計算せよ。ただし、k は定数である。

また、その結果を用いて、$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ をそれぞれ 0 に近付けた極限:

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iiint_{\Delta V} f(\boldsymbol{r'})\,dV'$$

を計算せよ。

問 43. ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 2xy\hat{\boldsymbol{x}} + 2y^2z\hat{\boldsymbol{y}} + 3\sin(kz)x^2\hat{\boldsymbol{z}}$ について、発散の定義式を確認する。

任意の点 $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$ を中心とする $\Delta V = \Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ の領域と、その表面を形成する閉曲面 ΔS について、$\displaystyle\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oiint_{\Delta S}\boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{S}$ を計算せよ。$d\boldsymbol{S}$ は領域の外向きとする。

問 44. ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = xy\hat{\boldsymbol{x}} + y^2z\hat{\boldsymbol{y}} + \sin(kz)x\hat{\boldsymbol{z}}$ を考える (k は定数)。ある点 $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}}+z\hat{\boldsymbol{z}}$ を中心とした体積 $\Delta V = \Delta x\times\Delta y\times\Delta z$ の表面 ΔS について、

$$\oiint_{\Delta S}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\bullet d\boldsymbol{S}'$$

を計算せよ。ただし、$d\boldsymbol{S}'$ は、領域 ΔV の外向きとする。

また、その結果を用いて、$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ をそれぞれ 0 に近付けた極限:

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oiint_{\Delta S}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\bullet d\boldsymbol{S}'$$

を計算せよ。

問 45. ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = xy\hat{\boldsymbol{x}} + yz\hat{\boldsymbol{y}} + zx\hat{\boldsymbol{z}}$ について、回転の定義式を確認する。

任意の点 $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$ を中心とする $\Delta S = \Delta y \times \Delta z$ の開曲面 (x 方向に垂直) と、その周囲を形成する閉曲面 ΔC(向きは $+x$ に対して右ねじ) について、$\displaystyle\lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint_{\Delta C}\boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{r}$ を計算せよ。

問 46. ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$ を考える。原点を中心とした半径 a の領域を V、その表面の閉曲面を S とする。このベクトル場 $\boldsymbol{A}$ と領域 V でガウスの定理が成立することを確認する。

(1) $\displaystyle\iiint_V \boldsymbol{\nabla}\bullet\boldsymbol{A}dV$ を計算せよ。

(2) $\displaystyle\oiint_S \boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{S}$ を計算せよ。ただし、$d\boldsymbol{S}$ は、領域 V の外向きとする。

第2章　真空中の静電界の法則

2.1　クーロンの法則

問 1.　z 軸上に一様に線電荷密度 λ_0 [C/m] で電荷が分布しているとき、$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$ における電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ [V/m] を求めよ。

問 2.　図 2.1 に示すように、半径 a [m] の半円周上に、線電荷が一様に分布し、全体で Q [C] の電荷がある。このとき、中心から x [m] の距離における電界を求めよ。

問 3.　図 2.2 のように、半径 a [m] の円板上に一様な面密度 σ [C/m^2] の電荷が分布しているとき、その中心軸上において中心からの距離 z [m] における電界を求めよ。

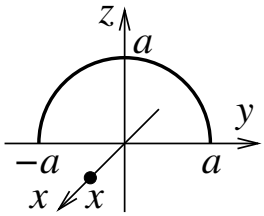


図 2.1: 半円周上の電荷

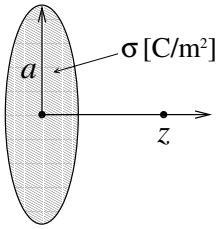


図 2.2: 円板状に分布した電荷

問 4.　図 2.3 に示すように、半径 a [m]、高さ h [m] の円筒の側面に、面電荷が一様に分布し、全体で Q [C] の電荷がある。このとき、円筒の軸上で、円筒の中心から z [m] の距離における電界を求めよ。

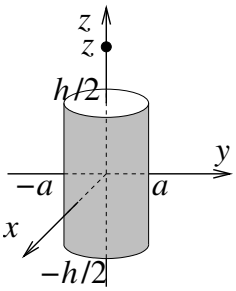


図 2.3: z 軸に沿う円筒側面上の電荷

問 5.　原点を中心とした半径 a [m] の球面上に、面電荷が一様に存在し、全体で Q [C] の電荷がある。このとき、$z\hat{\boldsymbol{z}}$ [m] の位置おける電界を求めよ。(ガウスの法則を用いず、積分で求めてみて下さい。かなり面倒です。)

2.2　静電界の法則

問 6.　点電荷 Q [C] が原点に存在している。z 軸を中心軸とした、半径 a [m]、高さ h [m] の円筒を領域 V として、ガウスの法則が成立していることを確認せよ。円筒の半分の高さのところが原点になるものとする。

問 7.　$2a\hat{\boldsymbol{z}}$ の位置に点電荷 Q [C] が存在している (a は正の定数)。原点を中心とする半径 a [m] の球面を S とするとき、$\oiint_S \boldsymbol{E} \bullet d\boldsymbol{S}$ を計算して、ガウスの法則が成立していることを確認せよ。

問 8.　次のそれぞれの電荷分布がつくる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は、ある対称性を持っている。

① どのような座標系を考えたときに、

② $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ のどの成分 (大きさが 0 でない成分) が、どの座標に依存しないか(=独立か)。

③ また、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の成分で、大きさが常に 0 となるものはあるか。

④ さらに、ガウスの法則を用いて電界を求めることが可能か。可能であれば、どのような閉曲面をとればよいか。

について答えよ。

例) 1 つの点電荷のつくる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

① 点電荷の位置を原点にとったとき、

② $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の r 成分は θ, ϕ に依存しない。(さらに、ρ, z 成分も ϕ に依存しない)

③ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の θ, ϕ 成分は常に 0 となる。

④ ガウスの法則を用いて電界を求めることが可能であり、閉曲面として、原点を中心とする球面にとればよい。

(1) 半径 a [m] 内に均一に分布した電荷がつくる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

(2) 無限長直線状に均一に分布した線電荷がつくる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

(3) 有限長直線状に均一に分布した線電荷がつくる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

(4) 半径 a [m] の円周状に均一に分布した線電荷がつくる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

(5) 半径 a [m] の円盤状に均一に分布した面電荷がつくる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

(6) 無限平板状に均一に分布した面電荷がつくる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

(7) 一辺 a [m] の立方体内に均一に分布した電荷がつくる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

(8) 半径 a [m]、高さ h [m] の円柱内に均一に分布した電荷がつくる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

(9) 半径 a [m] の球状に分布した電荷で、その半球は正電荷が均一に分布しており、もう半球は負電荷が均一に分布しているときにできる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$
(正負の電荷の絶対値は同じものとする)

問 9. 真空中に電荷密度分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ [C/m^3] があり、それによって電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ [V/m] ができている。$|\boldsymbol{r}| = r$ としたとき、電界は $r \leqq a$ において $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{4\boldsymbol{r}}{\varepsilon_0}$ であり、$r > a$ において $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{4a^3\boldsymbol{r}}{\varepsilon_0 r^3}$ であった。このときの電荷密度分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

問 10. 線電荷密度 λ [C/m] の十分に長い直線状電荷があるものとする。このとき、線電荷から半径 ρ [m] 離れた位置での電界の強さ $E(\rho)$ [V/m] を求めよ。

問 11. 十分に長い円筒 (中心軸は z 軸に一致し、半径 a [m] の円筒) の表面に、電荷が σ [C/m^2] の表面電荷密度で一様に分布している。このとき、円筒の中心軸から距離 ρ [m] における電界の強さ $E(\rho)$ [V/m] を求めよ。

問 12. 図 2.4 のような半径 a_1 の導体球と、同心球である中空導体球 (内半径 a_2, 外半径 a_2') がある。以下の場合について、電界を求めよ。
(1) 内側の導体球にのみ、Q [C] の電荷を与えたとき。
(2) 外側の中空導体球にのみ、Q [C] の電荷を与えたとき。

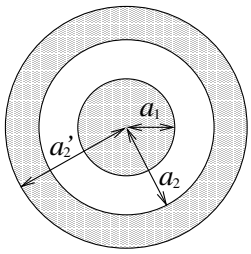


図 2.4: 同心 2 導体球

問 13. 図 2.5 に示すように、真空中に電荷が同心球殻状に分布している。中心からの距離 r [m] に対して、$r \leqq a$ のときは一様に Q [C] が分布し、$b < r \leqq c$ においては一様に $-Q$ [C] が分布している。また、$a < r \leqq b$ および $r > c$ においては電荷は存在しない。このときの電界の強さ $E(r)$ [V/m] を求めよ。

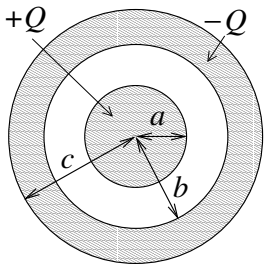


図 2.5: 同心球殻状に分布した電荷

問 14. 電荷密度分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ が次式で与えられている。

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \frac{3(a-r)}{\pi a^4}Q, & r \leqq a, \\ 0, & r > a, \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで、$r = |\boldsymbol{r}|$ である。

(1) この電荷によって、原点から r [m] の位置にできる電界の r 成分の強さ $E_r(r)$ を求めよ。
(2) この電荷によってできる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。
(3) 求めた電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ に対し、微分形のガウスの法則より、電荷密度は $\rho(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0 \boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と言えるが、これが満足されていることを確認せよ。
(4) 静電界渦なしの法則 (微分形) $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$ が成立していることを確認せよ。

問 15. 次の電荷分布が与えられているとき、電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ [V/m] を求めよ。
①z 軸に沿って無限長の直線状に均一な線電荷 λ_0 [C/m] があり、かつ $\boldsymbol{r}_1 = a\hat{\boldsymbol{y}}$ [m] の点に点電荷 Q [C] があるとき。

②z 軸に沿って無限長の円筒状 (半径 a [m]) に均一な体積電荷 ρ_0 [C/m^3] があり、その中で円筒状 (半径 b [m]) に電荷が存在しておらず、2 つの円筒の軸が d [m] だけ離れているとき ($d+b<a$)。断面図を図 2.6 に示す。

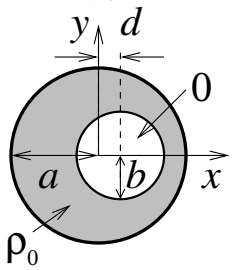


図 2.6: 円筒状の空洞を持つ、円筒型電荷分布 (断面)

2.3 電位

問 16. 点電荷 Q [C] が原点に存在している。このとき、無限遠から x 軸に沿って (図 2.7 の C_1 の経路で) $a\hat{\boldsymbol{x}}$ の点まで電荷 1 C を運んだときの仕事 W [J] を求めよ。

問 17. 上の問題において図 2.7 の C_2 の経路で無限遠から y 軸に平行に $a\hat{\boldsymbol{x}}$ の点まで電荷 1 C を運んだときの仕事 W [J] を求めよ。

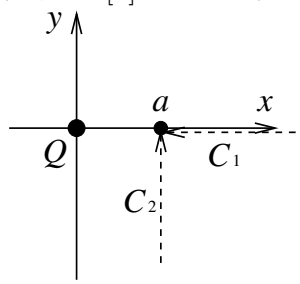


図 2.7: 積分路 C_1, C_2

問 18. $\boldsymbol{r}_0 = x_0\hat{\boldsymbol{x}} + y_0\hat{\boldsymbol{y}} + z_0\hat{\boldsymbol{z}}$ の点に点電荷 Q [C] が置かれたとき、$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$ の点における電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ [V] は

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$$

で与えられる。このとき、$-\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r})$ を計算せよ。

問 19. 真空中の位置 $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$ における電荷分布が、$r = |\boldsymbol{r}| \leqq a$ において $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho_0$ [C/m^3] であり、$r > a$ において $\rho(\boldsymbol{r}) = 0$ [C/m^3] で与えられる。(ρ_0 は定数)

(1) このときの電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ [V/m] を求めよ。

(ヒント: ガウスの法則を用いて大きさを求め、それに向きを表す単位ベクトルを付ければよい)

(2) 上で求めた電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が、渦なしの法則 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ を満たしているか、確認せよ。

(3) このときの電位 $\varphi(\boldsymbol{r})$ [V] を求めよ。(どの方向からでも良いので、この電界の中で、無限遠から単位電荷を運んだときの仕事を計算せよ。$r<a$ のとき、電界の式が電荷の分布する球の内外で異なるので、二つの領域に分けて電荷を運ぶ仕事を求める必要がある。)

(4) $-\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r})$ を計算して、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ となるか確認せよ。

(5) $\nabla^2\varphi$ を計算して、ポアソンの方程式が成立していることを確認せよ。

問 20. 半径 a [m] の球内に電荷 Q [C] が一様に分布している。このとき、球の中心から距離 r_0 [m] の点における電位 $\varphi(\boldsymbol{r})$ [V] を求めよ。

問 21. 真空中において電荷 Q [C] が位置 $\boldsymbol{r}_0$ にあるときに、位置 $\boldsymbol{r}$ にできる静電ポテンシャル (電位) は $\varphi(\boldsymbol{r}) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$ で求められる。位置 $\boldsymbol{r}_1 = \dfrac{d}{2}\hat{\boldsymbol{x}}$ に $+Q$ [C] があり、位置 $\boldsymbol{r}_2 = -\dfrac{d}{2}\hat{\boldsymbol{x}}$ に $-Q$ [C] があるときの位置 $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}}$ における静電ポテンシャル $\varphi(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

$|\boldsymbol{r}| = r$ とする。$r \gg d$ のとき、$\dfrac{d}{r}$ は十分に小さいとして、求めた静電ポテンシャルをテイラー展開で $\dfrac{d}{r}$ の一次の項まで展開して整理せよ。

問 22. 電気双極子が作る電位は $\varphi(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\boldsymbol{p}\bullet\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ で与えられる。電気双極子が作る電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

問 23. 半径 a [m] の球内に電荷 Q [C] が一様に分布している。このとき、球の中心からの距離 r [m] における電界の強さ $E(r)$ [V/m] を求めよ。また、この状態で蓄えられている全エネルギーを求めよ。

第3章　導体と静電容量

問 1.　平行平板コンデンサ (電極面積 S [m^2]、電極間距離 d [m]、電極間は真空) に電位差を与え、$\pm Q$ [C] の電荷を蓄える。

(1) このコンデンサに蓄えられるエネルギー $\frac{1}{2}CV^2$ を求めよ。
(2) 電極間にできる電場に蓄えられるエネルギーを求めよ。

問 2.　図 3.1 に示すような同心球導体 (内導体の半径 a_1 [m]、外導体の内半径 a_2 [m]) のコンデンサに、内導体に $+Q$ [C]、外導体に $-Q$ [C] の電荷を与える。内外導体間は真空とする。

(1) このコンデンサに蓄えられるエネルギー $\frac{1}{2}CV^2$ を求めよ。
(2) 内外導体間にできる電場に蓄えられるエネルギー W を求めよ。
(3) 内外導体間の距離が極めて小さいとき、静電容量は (球面の面積を持つ) 平行平板コンデンサの静電容量で近似できることを示せ。

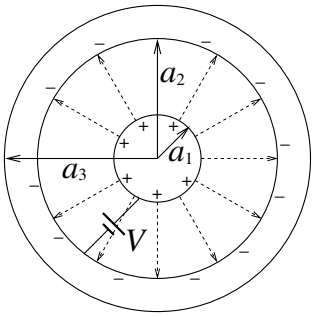
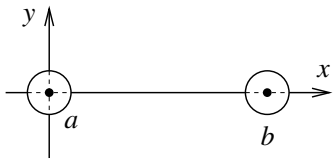


図 3.1: 同心球導体

問 3.　二つの無限長の円筒導体 (いずれも半径 a [m]) が、中心を距離 b [m] だけ離れて平行に置かれている (図 3.2a に断面図を示す)。一方 (導体 A) の中心を原点とし、他方 (導体 B) の中心を $b\hat{\boldsymbol{x}}$ の点におく。二導体間に電位差 V [V] を与え、導体 A は λ [C/m]、導体 B は $-\lambda$ [C/m] に帯電した。$b \gg a$ が成立しており (円筒半径に比べ導体間距離が十分大きい)、互いに帯電した電荷による電界は、他方の電荷分布に影響を与えないものとする (即ち、帯電した電荷は円筒導体表面に一様に分布するものとする)。このとき、二導体間の、単位長さ当たりの静電容量 C [F/m] を求めよ。

ヒント： x 軸上の電界を求め、電荷を導体間だけ移動したときの仕事から V と λ の関係を計算、$C = \lambda/V$。

✍memo: この静電容量 C [F/m] は平行二線式フィーダー (図 3.2b) の特性インピーダンスを求める際に用いられる。



(a) 平行な無限長円筒導体

(b) 平行二線式フィーダー

図 3.2: 平行二導体線路

問 4.　半径 a [m] の孤立導体球を考える。この導体に全く電荷が与えられていない状態 (電荷 0 C、電位 0 V) から、無限遠から微小電荷を徐々に持ってきてこの導体に与え、Q [C] まで蓄えるのに要した仕事 W [J] を求める。

(1) 途中の q [C] まで蓄えたときの導体表面の電位 v [V] を求めよ。
(2) 上の状態からさらに微小電荷 dq [C] を無限遠から運んで導体に与えたときの仕事 dW [J] を求めよ。
(3) 0 C から Q [C] まで蓄えるときに要した仕事を求めよ。
(4) 孤立導体球の静電容量は $C = 4\pi\varepsilon_0 a$ で与えられる。孤立導体球のコンデンサに蓄えられているエネルギーと、上で求めた仕事を比較せよ。

問 5.　半径がそれぞれ a [m], b [m] の二導体球 (A, B) が十分な距離 d [m]($\gg a, b$) 離れて存在しており、その中心はそれぞれ $\boldsymbol{r}_A = \hat{\boldsymbol{0}}$、$\boldsymbol{r}_B = d\hat{\boldsymbol{x}}$

である。十分な距離があるため、導体球が帯電したとき周囲にできる電界は、互いに影響を及ぼさないものとする (即ち、帯電した導体表面の電荷分布は、孤立した導体球と変らないものとする)。この二導体間の静電容量 C [F] を求めよ。

問 6. 真空中に図 3.3 に示すような、半径 a [m] の導体球 (導体 1) と、導体球の中心から d [m] 離れた位置に十分小さな導体 (導体 2) がある導体系を考える ($d > a$ とする)。導体 2 は十分小さいため、導体 1 に電荷を与えてできた電界分布に影響を及ぼさないものとする。

(1) 電位係数 p_{11}, p_{12} を求めよ。

(2) 導体 1 を接地し、導体 2 に電荷 Q [C] を与えたとき、静電誘導によって導体 1 に現れる電荷を求めよ。

✎ **導体系 解答の指針**

- 導体系の電位係数などは電荷や電位によって変わりません。導体系の位置· 形状のみに依存します。従って、問題に「 導体 i に電荷 Q を与え、…」などとあっても、電位係数を求める際は無視して好きな電荷や電位を与えて OK です。
- 単一の導体に電荷を与えたときに、各導体がどのような電位をとるかを求めることで電位係数が得られます。
- $p_{ij} = p_{ji}$ を用いましょう。
- 電位係数や電荷、電位を求める際に、以下の操作が利用できます。
  - 導体を接地する、即ちその導体の電位を 0 とする
  - 導体を細い導線で結ぶ、即ち導体の電位を等しくする

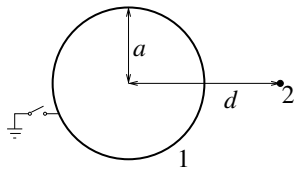


図 3.3: 導体系

第4章　誘電体

問 1.　図 4.1 の媒質境界を考える。$z > z_0$ における媒質の誘電率が $\varepsilon_1 = 5\varepsilon_0$(媒質 1)、$z < z_0$ で $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_0$(媒質 2) とする。媒質 1 側の媒質境界上の点 $z = z_0 + 0$ における電界が $\boldsymbol{E}_1 = 2\hat{\boldsymbol{y}} + 3\hat{\boldsymbol{y}}$ [V/m] であった。$z = z_0 + 0$ における電束密度 $\boldsymbol{D}_1$ [C/m^2]、媒質 2 側の媒質境界上の点 $z = z_0 - 0$ における電界 $\boldsymbol{E}_2$ [V/m] と電束密度 $\boldsymbol{D}_2$ [C/m^2] を求めよ。

問 2.　誘電体 1 と 2 が平面で接している。この接している面のごく近傍の電界 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2$ [V/m] がそれぞれ誘電体 1 と 2 にある。電界 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2$ [V/m] が面の法線方向に対して角度 θ_1, θ_2 となっているとき、$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ [F/m] と θ_1, θ_2 の関係式を求めよ。(東工大平 21[1] を改変)

問 3.　図 4.2 の媒質境界において、誘電率が $\varepsilon_1 = 5\varepsilon_0$、$\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ とする。x の負から、原点に近付いた極限の点 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} - 0\hat{\boldsymbol{x}}$ において、電界が $\boldsymbol{E}_2 = 2\hat{\boldsymbol{x}} - 3\hat{\boldsymbol{y}}$ [V/m] であった。$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} - 0\hat{\boldsymbol{x}}$ における電束密度 $\boldsymbol{D}_2$ [C/m^2]、$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} + 0\hat{\boldsymbol{x}}$ における電界 $\boldsymbol{E}_1$ [V/m] と電束密度 $\boldsymbol{D}_1$ [C/m^2] を求めよ。なお、図の破線は 1 m 毎の目盛とする。

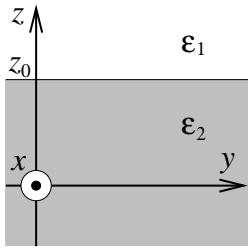


図 4.1: $z = z_0$ における媒質境界

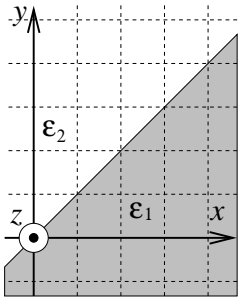


図 4.2: 境界

問 4.　十分面積の大きい平行平板コンデンサ (電極間距離 d [m]) の電極間に、厚さ t [m] の誘電体 1 と厚さ $(d - t)$ [m] の誘電体 2 が図 4.3 のように装荷されている。

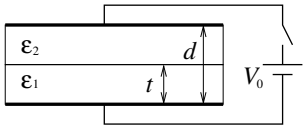


図 4.3: コンデンサ

(1) 電極の単位面積当たりの静電容量 C_0 [F/m^2] を求めよ。

(2) 電位差 V_0 [V] を与えたとき、下部電極から距離 z [m] の位置における電位 $V(z)$ [V] を求めよ。下部電極の電位を 0 V とする。

(東工大平 21[1] を改変)

問 5.　図 4.4 のように、長さ L [m]、半径 a [m] の円柱状の内部導体と、厚さを無視できる長さ L [m]、半径 c [m] の円筒状外部導体がある。内外の導体の中心軸は一致している。中心軸から b [m] をを境界として二種類の一様な誘電体で内外導体間を満たし、内側 $(a \leqq \rho < b)$ および外側 $(b \leqq \rho < c)$ の領域の誘電率をそれぞれ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ [F/m] とする。内外導体間に電位差をかけ、内部導体に $+Q$ [C]、外部導体に $-Q$ [C] が蓄えられた。$L \gg c$ とし、円筒端部での電界分布の影響は無視する。(東工大平 29/4 および平 28/9 入試想定問題 [2] を改変)

(1) $a \leqq \rho < b, b \leqq \rho < c$ における電束密度の大きさを求めよ。

(2) $a \leqq \rho < b, b \leqq \rho < c$ における電界の大きさを求めよ。

(3) この二導体の静電容量 C [F] を求めよ。

(4) 誘電体境界に生じる面分極電荷密度 σ_p [C/m^2] を求めよ。

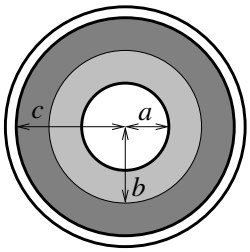


図 4.4: 同心円状に誘電体が異なる長さ L の円筒型コンデンサ

問 6.　半径 a [m] の円柱状導体と内半径 b [m] の中空円筒状導体が図 4.5 に示すように中心軸を

同一として配置されている。内外導体の長さを L [m] とする。(東工大平 20[1] を改変)

(1) 内外導体間を真空として、電位差 V_0 [V] を与えて電荷を蓄えた。このとき蓄えられる電荷 Q_0 [C] を求めよ。

(2) 上の状態でスイッチを切り離し、比誘電率 ε_r の誘電体で $x(< L)$ [m] だけ満たした。このときの内外導体間の電位差 $V(x)$ [V] を求めよ。

(3) 上の状態で再度スイッチを入れ、内外導体間の電位差を V_0 [V] とした。このとき蓄えられる電荷 Q [C] を Q_0 を用いて表せ。

(4) 上の状態で、スイッチを入れたまま誘電体の挿入長 x を Δx だけ増やしたときの静電エネルギーの変化量 ΔU [J] を求めよ。また、誘電体に働く力 F [N] を $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x}$ より求めよ。

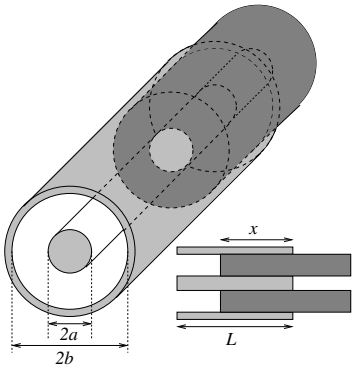


図 4.5: 一部に誘電体が装荷された円筒型コンデンサ

問 7. 図 4.6 に示す平行平板コンデンサ (極板の面積 S [m^2]) を考える。極板間距離 $4d$ [m] のうち、$3d$ [m] は比誘電率 $\varepsilon_r = 10$ の誘電体が置かれている。電源電圧 V [V] で電位差を与えたとき、極板間の真空部分の電界が $\boldsymbol{E}_1 = 100\hat{\boldsymbol{y}}$ [V/m] となった。

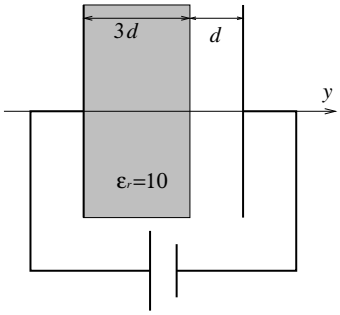


図 4.6: 誘電体を一部装荷したコンデンサ

(1) 極板間の真空部分の電束密度 $\boldsymbol{D}_1$ [C/m^2] を求めよ。

(2) 誘電体中の電束密度 $\boldsymbol{D}_2$ [C/m^2] を求めよ。

(3) 誘電体中の電界 $\boldsymbol{E}_2$ [V/m] を求めよ。

(4) 誘電体中の分極ベクトル $\boldsymbol{P}$ [C/m^2] を求めよ。

(5) 誘電体表面に現れる分極面電荷の面電荷密度 σ_p [C/m^2] を求めよ。

(6) 電界から極板間の電位差 V [V] を求め、また、電束密度から極板に現れる面電荷密度 σ [C/m^2] および極板に蓄えられる全電荷を求め、静電容量 C [F] を計算せよ。全て真空のときと比べ、静電容量は何倍となったか求めよ。

問 8. 平行平板コンデンサ (極板の面積 S [m^2]、極板間距離 d [m]) の面積の $\dfrac{1}{3}$ を比誘電率 $\varepsilon_r = 5$ の誘電体で満たした (それ以外は真空のまま)。これに電圧 V [V] の電源をつなぎ、電位差 V [V] を与える。

(1) 真空中の電界の強さ E_1 [V/m]、電束密度の強さ D_1 [C/m^2]、誘電体中の電界の強さ E_2 [V/m]、電束密度の強さ D_2 [C/m^2] を求めよ。

(2) 真空部分の極板に蓄えられる電荷の面電荷密度 σ_1 [C/m^2]、誘電体部分の極板に蓄えられる電荷の面電荷密度 σ_2 [C/m^2] を求めよ。

(3) この平行平板コンデンサの静電容量 C [F] を求めよ。また、極板間が全て真空のときと比べて、静電容量は何倍となったか。

問 9. 極板の面積 S [m^2]、極板間距離 d [m] の平行平板コンデンサがある。極板間の半分は比誘電率 ε_r の誘電体が置かれている (面積 S [m^2]、厚さ $d/2$ [m])。この平行平板コンデンサの静電容量を、極板間が全て真空のときの静電容量の 1.8 倍以上とするための ε_r の条件を求めよ。

問 10. 図 4.7 に示すように原点を中心に半径 a [m] の誘電体球 (比誘電率 ε_r) が置かれており、外部から一様電界 $\boldsymbol{E}_0 = E_0\hat{\boldsymbol{z}}$ [V/m] が印加されている。このときの誘電体球内外の電界を求める。

外部電界よる分極で、誘電体球内部には一様な分極ベクトル $\boldsymbol{P}$ [C/m^2] が発生しているものとする。誘電体球は正負の電荷 $\pm q$ [C] が一様な密度 N [m^{-3}] で存在し、分極によって、正負

の電荷はそれぞれ $+\dfrac{\boldsymbol{d}}{2}, -\dfrac{\boldsymbol{d}}{2}$ だけ変位したものとする。

以下の問に答えよ。記号は問題に与えられたもののみ用いること。

(1) 誘電体球の分極は、一様な正負の電荷密度 $\pm\rho$ [C/m^3] の球が中心を $\boldsymbol{d}$ だけ離心された状態で分布したものとみなすことができる。電荷密度 ρ を求めよ。

(2) 分極ベクトル $\boldsymbol{P}$ を求めよ。

(3) 誘電体内部の電界を求める。分極電荷による電界 $\boldsymbol{E}_p$ [V/m] は、上の正負の電荷密度 $\pm\rho$ がつくる電界となる。位置 $\boldsymbol{r}$ における分極電荷による電界 $\boldsymbol{E}_p$ を求めよ。$\boldsymbol{E}_p$ を分極ベクトル $\boldsymbol{P}$ を用いて表せ。

誘電体球内の電界 $\boldsymbol{E}$ は、外部印加電界 $\boldsymbol{E}_0$ と分極電荷による電界 $\boldsymbol{E}_p$ の和となる。誘電体球内の電界 $\boldsymbol{E}$ を求めよ。また、電界 $\boldsymbol{E}$ を外部印加電界 $\boldsymbol{E}_0$ と比誘電率 ε_r のみで表せ[1]。

(4) 誘電体外部の電界を求める。誘電体球外では、変位した電荷分布の中心に点電荷が置かれた電気双極子とみなすことができる。$|\boldsymbol{d}| \ll |\boldsymbol{r}|$ の近似を用いて、$\boldsymbol{E}_p$ を表せ。

誘電体球外の電界 $\boldsymbol{E}$ は、外部印加電界 $\boldsymbol{E}_0$ と分極電荷による電界 $\boldsymbol{E}_p$ の和となる。誘電体球外の電界 $\boldsymbol{E}$ を求めよ。

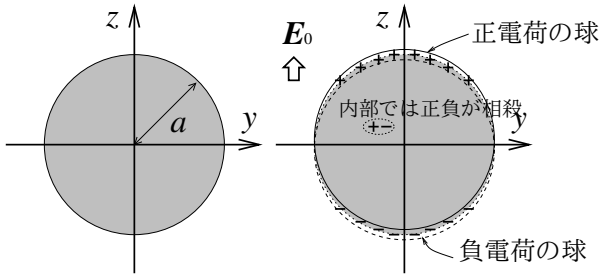


図 4.7: 外部電界で分極した誘電体球

[1]誘電体球内では $\boldsymbol{D} = \varepsilon_r\varepsilon_0\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ から、$\boldsymbol{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ の関係を用いると、$\boldsymbol{E}$ を $\boldsymbol{E}_0$ を用いて表現することが可能である。

第5章　真空中の静磁場の法則

5.1　ビオ＝サバールの法則

問 1.　z 軸上を、直流電流 I [A] が $+z$ 方向に流れている。このとき、$\boldsymbol{\rho} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}}$ の点にできる磁束密度 $\boldsymbol{B}$ [T] を求めよ。

また、得られた磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\rho})$ を、円筒座標系 (z 軸からの距離 ρ、x 軸とのなす角 ϕ) で表せ。即ち、座標 (ρ, ϕ, z) とその基本単位ベクトルで表せ。

(ヒント：ρ 方向単位ベクトルは $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}$、$\phi$ 方向単位ベクトルは $\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{y}}$ と表される。)

問 2.　$z = 0$ の面内で、原点を中心に半径 a [m] の円環電流 I [A] が流れている ($+z$ 方向に対して右ねじの方向を正とする)。z 軸上の点 $\boldsymbol{r} = z\hat{\boldsymbol{z}}$ につくる磁束密度 $\boldsymbol{B}$ [T] を求めよ。

問 3.　図 5.1 に示すように、z 軸に沿った直線部分と、原点を中心に yz 平面内で半径 a [m] の半円を描く部分からなる線電流 I_0 [A] によって、x 軸上の点 $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}}$ にできる磁束密度 $\boldsymbol{B}(x)$ [T] を求めよ。

問 4.　図 5.2 に示す、$z = 0$ の面内で、一部の直線と一部の円周からなるループを流れる直流電流 I [A] が、原点につくる磁束密度 $\boldsymbol{B}$ [T] を求めよ。

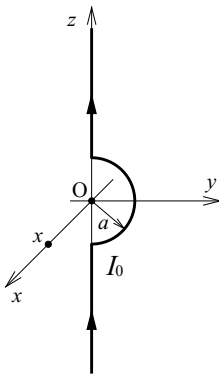


図 5.1: 一部が半円の無限長電流

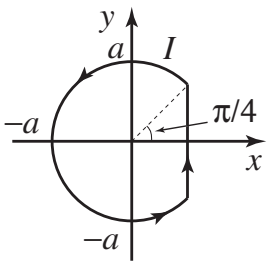


図 5.2: 一部の直線と一部の円周からなるループ状に流れる電流

問 5.　図 5.4 に示す、$z = 0$ の面内で、一部の直線と一部の円周からなるループを流れる直流電流 I [A] が、原点につくる磁束密度 $\boldsymbol{B}$ [T] を求めよ。

問 6.　図 5.3 に示す放物線 $x = \dfrac{1}{4a}y^2$ に沿って流れる直流電流 I [A] が、$x = a$ の点につくる磁束密度 $\boldsymbol{B}$ [T] を求めよ。

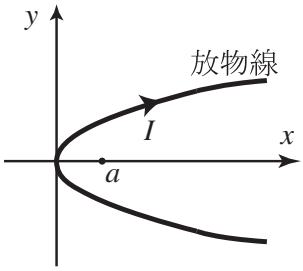


図 5.3: 放物線状に流れる電流

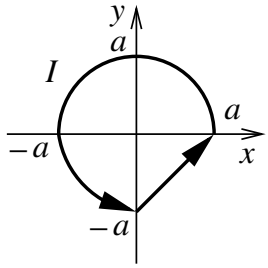


図 5.4: 一部の直線と一部の円周からなるループ状に流れる電流

問 7.　図 5.5 に示すように半径 a [m] の無限長の半円筒 (円筒の軸は x 軸と一致) の表面を電流 I [A] が一様に流れている。

(1) この半無限円筒の電流が流れている面 S を表すベクトル関数を求めよ。また、パラメタの範囲も示すこと。

(2) S 上での面電流密度 $\boldsymbol{J}_S$ [A/m] を求めよ。

(3) 原点における磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{0})$ [T] を求めよ。

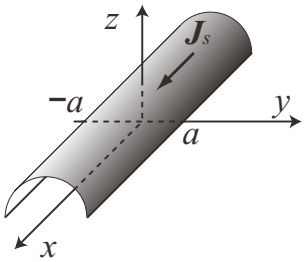


図 5.5: 半円筒型の面電流

5.2　真空中の磁場の法則

問 8.　アンペールの法則が与えられた磁場において成立しているか検討する。図 5.6 は z 軸を $+z$ 方向に流れる無限長直線電流を表している。この電流がつくる磁場は $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\mu_0 I(-y\hat{\boldsymbol{x}} + x\hat{\boldsymbol{y}})}{2\pi(x^2+y^2)}$ である。

(1) 図 5.6(a) のように、半径 R の周回積分路を表すベクトル関数 $\boldsymbol{r}$ を求めよ。また、そのパラメタの範囲を示せ。

(2) 線素ベクトル $d\boldsymbol{r}$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r}$ を計算せよ。

(4) 図 5.6(b) に示すように積分路を一部変更する。ただし、ここで $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ である。$\displaystyle\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r}$ を計算せよ。

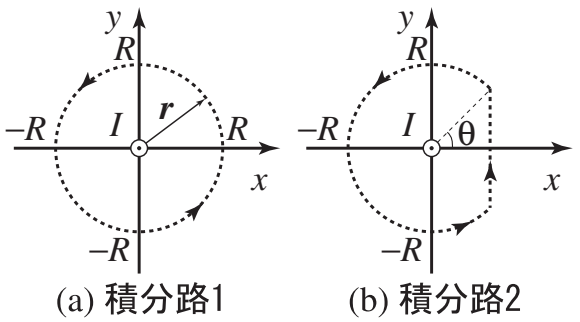


図 5.6: アンペールの法則の確認のための積分路

問 9.　アンペールの法則が成立しているか確認する。図 5.7 は $z=0$ の面内において、z 軸上を $+z$ 方向に流れる無限長直線電流を表している。この電流がつくる磁場は $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\mu_0 I(-y\hat{\boldsymbol{x}} + x\hat{\boldsymbol{y}})}{2\pi(x^2+y^2)}$ である。

次の周回積分路 C_1, C_2 で $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{B} \bullet d\boldsymbol{r}$ を計算し、アンペールの法則が成立しているか確認せよ。ただし $a>0$ とする。

(1) C_1: P → Q → R → S → P

(2) C_2: P → T → U → S → P

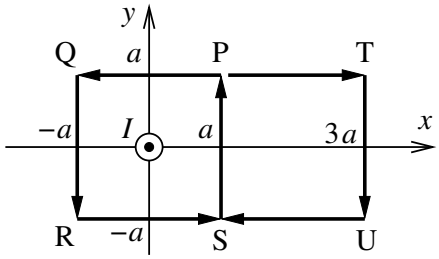


図 5.7: 2 つの積分路

問 10.　中心軸が z 軸と一致する半径 a [m] の無限に長い円筒導体中に $+z$ 方向に電流 I [A] が一様に流れている。また、軸を同一とする半径 b [m] の中空の円筒導体 (円筒は十分に薄い金属) があり、$-z$ 方向に電流 I [A] が一様に流れている。中心軸より ρ [m] の距離における磁束密度の強さ $B(\rho)$ を求めよ。(東北大 2012 年 2 月基礎科目 [3] を改変)

問 11.　図 5.8 に示された無限長の同軸線路があり、内導体は $+z$ 方向に I [A]、外導体は $-z$ 方向に I [A] が一様に流れている。中心軸からの距離 ρ [m] における点の磁束密度の大きさ $B(\rho)$ [T] を求めよ。

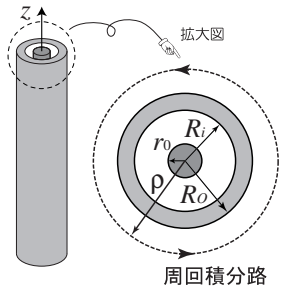


図 5.8: 同軸ケーブルと断面図

5.3　磁場によって働く力

問 12.　図 5.9 に示すように $x=0$ の面内に、無限長直線電流 I_0 [A] および、そこから距離 d [m] 離れたところに正方形電流ループ (I [A]、a [m]$\times$ a [m]) が存在する。無限長直線電流 I_0 がつくる磁束密度 $\boldsymbol{B}$ [T] は $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 I_0(-y\hat{\boldsymbol{x}} + x\hat{\boldsymbol{y}})}{2\pi(x^2+y^2)}$ で与えられる。(東大学院試 (電気系工学専攻)2015 年度 [4] より改変)

(1) 正方形電流ループのうち、$z=-a$ の辺 (下辺) の電流部分に働くアンペール力を求めよ。

(2) 正方形電流ループ全体に働くアンペール力を求めよ。

問 13. 図 5.10 に示す、z 軸に沿った無限長直線電流と、三角形の電流ループが存在する。電流ループに働くアンペール力 $\boldsymbol{F}$ [N] を求めよ。この無限長直線電流がつくる磁束密度 $\boldsymbol{B}$ [T] は $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\mu_0 I(-y\hat{\boldsymbol{x}} + x\hat{\boldsymbol{y}})}{2\pi(x^2+y^2)}$ である。

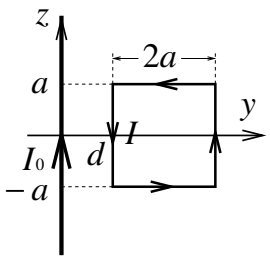


図 5.9: 無限長電流と長方形電流ループ

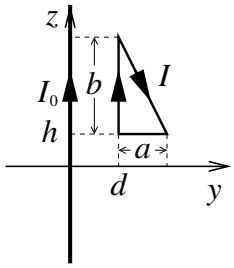


図 5.10: 無限長直線電流と三角形ループ電流

問 14. 図 5.11 に示されているように、x 軸から角度 ψ だけ傾いた半径 a [m] の円形のコイルが原点が固定され、磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = B_0\hat{\boldsymbol{y}}$ [T] 中に置かれている (B_0 は定数)。電流 I [A] がこのコイルに流れているとき、アンペール力によってこのコイルに作用する力と、力のモーメントを求めよ。

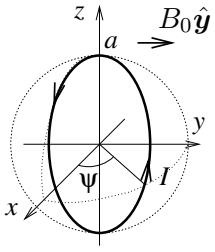


図 5.11: 円形コイル

問 15. 図 5.12 に示すように $0 \leqq y \leqq d$ の領域に一様な磁束密度 $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{x}}$ [T] があり、それ以外では $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ とする。$\pm z$ 方向には十分広い領域にわたって一様に分布しているものとする。

荷電粒子 (質量 m [kg]、電荷 q [C]) が速度 $\boldsymbol{v} = v_0\hat{\boldsymbol{y}}$ [m/s] で等速度運動をしており、時刻 $t = 0$ s において原点に到達して磁束密度が $\boldsymbol{0}$ でない領域に入射するものとする。

この領域の電界は $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ V/m、重力も働いていないものとし、媒質は真空 (ε_0 [F/m]、μ [H/m]) とする。(東大院試 (電気系工学専攻)[4]2015 年度より改変)

(1) 時刻 $t(> 0)$ [s] において荷電粒子が $0 \leqq y \leqq d$ にあるときの速度 $\boldsymbol{v}(t)$ [m/s]、位置 $\boldsymbol{r}(t)$ [m] を求めよ。

(2) この荷電粒子が $y = d$ に到達する条件を求めよ。

(3) 問 (b) の条件が成立しているとき、この荷電粒子が $y = d$ を通過するときの速さを求めよ。

(4) 問 (b) の条件が成立しているとき、この荷電粒子が $y = d$ を通過するときの時刻を求めよ。

問 16. 図 5.13 に示すように、一様磁場 $\boldsymbol{B} = B_0\hat{\boldsymbol{z}}$ [T]、及び一様電場 $\boldsymbol{E} = -E_0\hat{\boldsymbol{y}}$ [V/m] がある空間において、時刻 $t = 0$ s に荷電粒子 (電荷 q [C]、質量 m [kg]) が位置 $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{0}$ [m]、速度 $\boldsymbol{v}(0) = v_0\hat{\boldsymbol{x}}$ [m/s] で運動をしている。$t > 0$ におけるこの粒子の運動を表す $\boldsymbol{v}(t)$ を求めよ。

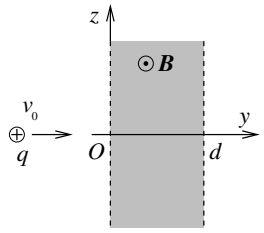


図 5.12: 磁場領域に入射する荷電粒子

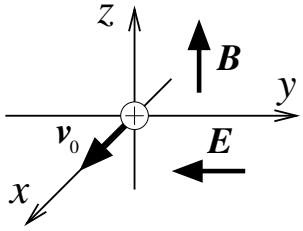


図 5.13: $t = 0$ における荷電粒子の位置と速度

問 17. 図 5.14 に示すように、均一の磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = B_0\hat{\boldsymbol{z}}$ [T] が存在する空間に、真空中に長さ a [m]、断面積 S [m^2] の金属棒が、一端を中心に $+z$ 軸を回転軸として、一定の角速度 ω [rad/s] で回転しているものとする。また、導体中には、正負の電荷が電荷密度 $\pm\rho_0$ [C/m^3] で存在しているものとする。以下の問に答えよ。

(1) 回転軸から距離 ρ [m] のところの導体の移動速度 v [m/s] を求めよ。

(2) 棒が回転しているとき、導体中の電荷はローレンツを受けるが、ローレンツ力によって移動した後は電荷の偏在が生じ、それによる電界 $\boldsymbol{E}$ [V/m] からクーロン力も受け、定常状態では両者の力が平衡する。

距離 ρ [m] のところの微小部分 $d\rho$ [m] 中にある正の電荷 (電荷密度 ρ_0 [C/m^3]) の速度を $\boldsymbol{v}(\rho) = v_\phi(\rho)\hat{\boldsymbol{\phi}}$、電界を $\boldsymbol{E}(\rho) = E_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}$ とするとき、力の釣り合いを表す式を導け。

(3) 上の釣り合いの式から電界 $\boldsymbol{E}$ を求め、棒の両端に生じる電位差 V [V] を求めよ。

問 18. 図 5.15 に示されているように、一様磁場 $\boldsymbol{B} = -B_0\hat{\boldsymbol{y}}$ [T] ($B_0 > 0$) がある空間において、時刻 $t = 0$ s に荷電粒子 (電荷 q [C]、質量 m [kg]) が位置 $\boldsymbol{r}(0) = x_0\hat{\boldsymbol{x}} + y_0\hat{\boldsymbol{y}}$ [m]、速度 $\boldsymbol{v}(0) = v_1\hat{\boldsymbol{x}} + v_3\hat{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{v}_0$ [m/s] で運動をしている。$t > 0$ におけるこの粒子の運動を表す $\boldsymbol{v}(t)$、$\boldsymbol{r}(t)$ を求めよ。また、この粒子は円運動をするが、その半径 R_0 [m]、各周波数 ω [rad/s] を求めよ。また回転を表すものとして、「大きさはその角速度 ω、向きは回転の軸の方向であり、回転方向と右ねじの関係となる」ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を求めよ。

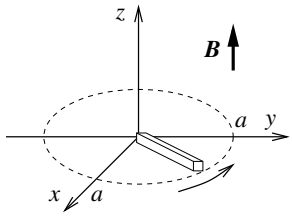


図 5.14: 一端が z 軸を回転軸として回転する導体棒

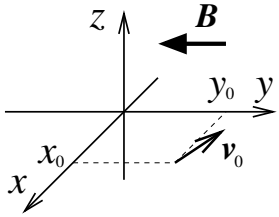


図 5.15: $t = 0$ での荷電粒子の状態

問 19. CRT(Cathode Ray Tube; 陰極線管、ブラウン管) では、陰極から出た電子を加速して磁場で偏向させる (電場で変更させる構成もある)。この電子が蛍光面に当たることで発光するが、磁場の強度を変えることで画像をつくる (走査する)。この管の中は真空になっている。

電界で加速された電子 (質量 m_e [kg]) が等速度で、磁場 (磁束密度 $\boldsymbol{B} = -B_0\hat{\boldsymbol{y}}$, $(0 \leqq x \leqq d)$, B_0 [T] は正の定数) をかける一様磁場の領域へと入る。図 5.16(b) のような座標系をとり、電子が原点に達した時刻を $t = 0$ s とする。$t = 0$ における電子の進入速度を $\boldsymbol{v}(0) = v_0\hat{\boldsymbol{x}}$ とする (v_0 [m/s] は定数)。また電子の電荷量を $-e$ [C] とする ($e > 0$)。電子は磁場により移動方向を変えるが、一様磁場の領域を $x > d$ [m] へ通り抜けるまで、$\pm y$ 方向および $\pm z$ 方向の一様磁場は存在するものとする。また、電子が一様磁場の領域を通り抜ける瞬間 ($x = d$ を通過した瞬間) の時刻を t_0 [s] とする。

(1) $0 < t < t_0$ における運動方程式は、$\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{v}(t) \times \boldsymbol{B}$ [N] となる。$\boldsymbol{v}(t) = v_x(t)\hat{\boldsymbol{x}} + v_y(t)\hat{\boldsymbol{y}} + v_z(t)\hat{\boldsymbol{z}}$ として、この運動方程式の x, y, z の各成分について導出せよ。

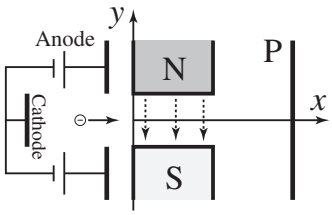
(2) 運動方程式を解いて、初期条件 $\boldsymbol{v}(0) = v_0\hat{\boldsymbol{x}}$ のもと、$0 < t < t_0$ における $\boldsymbol{v}(t)$ を導け。

(3) 電子の位置を $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\hat{\boldsymbol{x}} + y(t)\hat{\boldsymbol{y}} + z(t)\hat{\boldsymbol{z}}$ とする。このとき、$\dfrac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \boldsymbol{v}(t)$ である。初期条件 $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{0}$ のもと、$0 < t < t_0$ における $\boldsymbol{r}(t)$ を導出せよ。

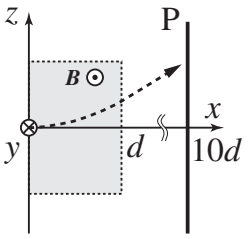
(4) 電子が蛍光面に達するには B_0 がある値より小さい必要がある。電子が蛍光面に達する B_0 の条件を求めよ。

(5) 上の問題 (4) の条件が満されているものとする。時刻 t_0 [s] を求め、そのときの $\boldsymbol{r}(t_0)$、$\boldsymbol{v}(t_0)$ を求めよ。

(6) $x = 10d$ [m] の位置にある蛍光面 P に電子が到達したときの z 座標の位置 z_P [m] を求めよ。



(a) CRT の概念図。P は蛍光面。



(b) 解析のための座標系

図 5.16: CRT。(実際には、蛍光面 P の電位は高くなっている。ここでは、問題を簡単にするため、陽極で加速した後は x 方向には等速度するよう電圧を印加していない)

第6章　磁性体

問 1.　電荷 q [C] が半径 a [m] の周上を角周波数 ω [rad/s] で回転している ($\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{z}}$)。このときの磁気モーメント $\boldsymbol{m}$ [A·m^2] を求めよ。

問 2.　原点を中心として半径 a [m] の球面上に一様に面電荷が面電荷密度 σ [C/m^2] で分布しており、それが z 軸のまわりに角周波数 ω [rad/s] で回転している ($\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{z}}$)。このときの磁気モーメント $\boldsymbol{m}$ [A·m^2] を求めよ。

問 3.　図 6.1 に示されているように、z 軸に沿って、$+z$ 方向に電流 I [A] が流れている。その周りに、中心を z 軸とする、内半径 a [m]、外半径 b [m]、比透磁率 $\mu_r = 10$ のドーナツ型の磁性体を置いた。z 軸からの距離 ρ [m]($a < \rho < b$) における磁束密度の強さ $|\boldsymbol{B}|$ [T] と磁界の強さ $|\boldsymbol{H}|$ [A/m] を求めよ。ただし磁性体は z 方向に十分長く、磁束密度、磁界を求める場所ではそれらは z 方向に対して一様であるとする。

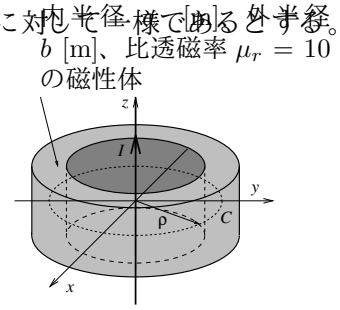


図 6.1: 無限長直線電流と磁性体

問 4.　内半径 a [m]、外半径 b [m]、厚さ c [m] の、比透磁率 μ_r の鉄心 (磁性体; 図 6.2 のような形) のまわりに N 巻のコイルを巻いて無端ソレノイドを構成する。

(1) コイルに電流 I [A] を流したとき、ソレノイド中心から ρ [m] の距離における磁束密度を求めよ (ヒント: 中心から半径 ρ [m] の円周上でアンペールの法則を利用する)。

(2) 磁束密度を鉄心の断面にわたって積分し、全磁束 Φ [Wb] を求めよ。

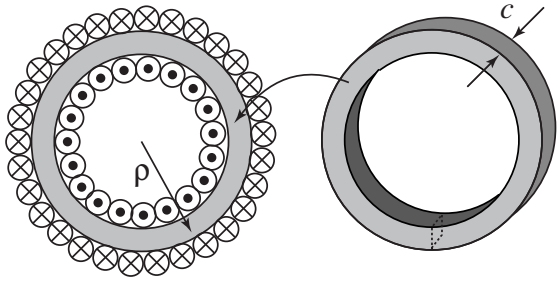


図 6.2: 無端ソレノイド

問 5. 図 6.3(a) に示す平均磁路長 $l = 50$ mm の環状鉄心 A に生ずる磁束と、図 6.3(b) に示すように A に空隙 $l_g = 0.5$ mm を設けた環状鉄心 B に生ずる磁束が共に Φ [Wb] で等しいとき、図 6.3(b) のコイルに流す電流 I_B を表す近似式として、正しいものを下の番号から選べ、ただし、A に巻くコイルに流れる電流を I_A [A] とし、コイルの巻数 N はどちらのコイルでも等しく、鉄心の比透磁率 $\mu_r = 1000$ とする。また、磁気飽和及び漏れ磁束はないものとする。

(第一級陸上無線技術士「無線工学の基礎」H24 年 1 月)

①$I_B \approx 11I_A$ [A]　②$I_B \approx 21I_A$ [A]　③$I_B \approx 50I_A$ [A]

④$I_B \approx 100I_A$ [A]　⑤$I_B \approx 150I_A$ [A]

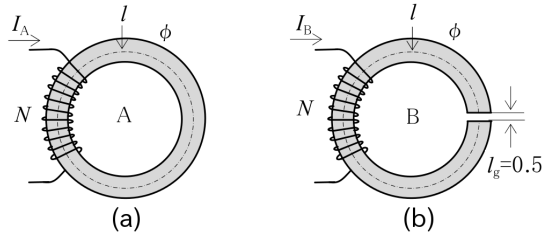


図 6.3: 2 つの磁気回路

問 6.　図 6.4 に示すような透磁率が μ [H/m] の鉄心で作られた磁気回路の磁路 ab の磁束 Φ [Wb] を表す式として、正しいものを下の番号から選べ。ただし、磁性体の断面積はどこも S [m^2] であり、各磁路 (ab, cd, ef, ac, ae, bd, bf) は l [m] で等しいものとし、磁気回路に漏れ磁束はない

ものとする。また、コイル C の巻数を N、C に流す直流電流を I [A] とする。

(第一級陸上無線技術士「無線工学の基礎」H25 年 1 月)

$$①\Phi = \frac{N^2 I\mu l}{S} \quad ②\Phi = \frac{2N^2 I\mu S}{5l} \quad ③\Phi = \frac{NI\mu S}{2l}$$

$$④\Phi = \frac{NI\mu l}{2S} \quad ⑤\Phi = \frac{2NI\mu S}{5l}$$

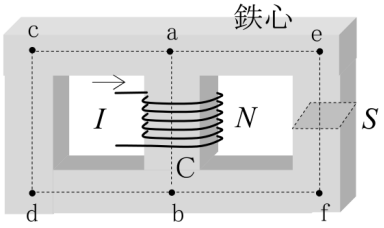


図 6.4: 磁気回路

問 7. 真空中に半径 a [m] の球状の磁性体 (透磁率 μ [H/m]) をおき、周囲から一様磁場 (磁束密度 $\boldsymbol{B}_0$ [T]) を印加する。磁性体球内は一様の磁化ベクトル $\boldsymbol{M}$ [A/m] ができるが、このときの球内外の磁束密度は次のような仮定で求めることができる。

① 球内部では一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}_i$ [T]

② 球外部では、印加された磁束密度 $\boldsymbol{B}_0$ と、球の中心に仮想的に $\boldsymbol{m} = \dfrac{4\pi a^3}{3}\boldsymbol{M}$ [A·m] の磁気モーメントを置いたときにできる磁束密度 $\boldsymbol{B}_m$ [T] の和: $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_m$ ($\boldsymbol{B}_m$ は本日の授業の結果を利用)

以上の仮定を用いて、球内部の磁束密度 $\boldsymbol{B}_i$、磁化ベクトル $\boldsymbol{M}$ を求める。座標系を図 6.5 のように置いて、$\boldsymbol{B}_0 = B_0\hat{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{M} = M\hat{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{B}_i = B_i\hat{\boldsymbol{z}}$ として以下の問に答えよ。(東工大院理工学研究科 [1]H26 年より改変)

(1) 磁性体と真空の境界は $|\boldsymbol{r}| = a$ にあるため、球座標系を用いた方が境界条件の適用に都合が良い。そこで、磁化ベクトルなどは z 方向を向いていることから、球座標系で表現し直す必要がある。

$\boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{B}_i, \boldsymbol{B}_m$ について、球座標系の基本単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ を用いて表せ。

(ヒント: いずれも ϕ 成分は持たない。授業資料の式 (2.18)-(2.20) を利用可)

(2) 磁性体と真空の境界における、磁束密度、磁界の境界条件を適用し、B_i と M の関係式を二つ導出せよ。

(ヒント: r, θ 成分のいずれが境界面に対する法線成分で、いずれが接線成分かを考えること。磁束密度の法線成分が連続、磁界 (= 磁束密度/透磁率) の接線成分が連続を適用する。)

(3) 上の二式を解いて $\boldsymbol{B}_i, \boldsymbol{M}$ を求めよ。

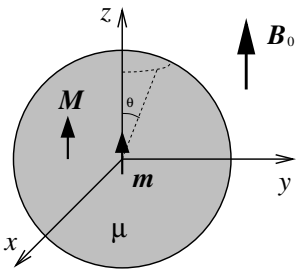


図 6.5: 一様磁場中の磁性体球

問 8. 図 6.6 に示すように二つの磁性体 (それぞれ比透磁率が μ_{r1}, μ_{r2}、平均磁路長が l_1, l_2 [m]) があり、長さ δ [m] のギャップを隔てて隣接している。また、磁性体 1 には N 巻きのコイルが巻かれ、一定電流 I [A] が流れている。

二つの磁性体の断面積は S [m^2] であり、磁性体中での磁場の強さは一様で磁路の方向を向いているものとする。また、漏れ磁束は存在しないものとする。

磁性体 1, 2 中の磁界の強さをそれぞれ H_1, H_2 [A/m]、ギャップ中の磁界の強さを H_0 [A/m] として、以下の問に答えよ。

(1) アンペールの法則 $\oint_C \boldsymbol{H} \bullet d\boldsymbol{r} = NI$ を適用すると、

$$NI = \boxed{(a)}\, l_1 + \boxed{(b)}\, l_2 + \boxed{(c)}\, 2\delta$$

となる。$\boxed{(a)}$ ~ $\boxed{(c)}$ は何か。

(2) 漏れ磁束が存在しないことから、磁性体を通過する磁束を Φ [Wb] とおく。このとき、H_0, H_1, H_2 を Φ および問題に与えられた記号を用いて表せ。

(3) 上記より、Φ を求めよ。

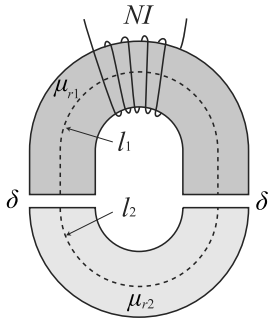


図 6.6: 二つの磁性体からなる磁気回路

第7章　電磁誘導現象とインダクタンス

問 1.　図 7.1 に示すように、一様磁場 $\boldsymbol{B} = B_0\hat{\boldsymbol{y}}$ [T] 中に回路 (各辺が a [m] × b [m]) が、角度 θ をなして置かれている。

(1) 回路と鎖交する磁束を求めよ。

(2) $\theta(t) = \omega_0 t$ でこの回路が回転するとき、回路に発生する起電力を求めよ。

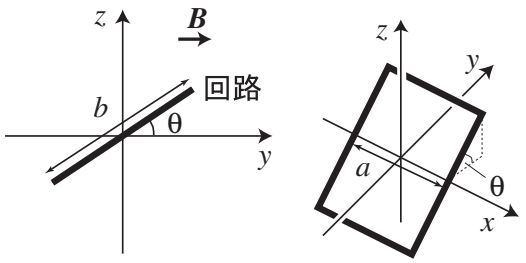


図 7.1: 一様磁場内で回転する回路

問 2.　図 7.2 に示すように、正方形の導線ループ D が磁石の磁極間を一定の速さ v [m/s] で移動するときの現象について、次の□に入れるべき字句を以下の番号から選び、□に記入せよ。ただし、磁極は導線ループに比べ十分に大きく、一様な磁場 B [T] ができているものとする。また、D は一辺が l [m] で、その面を磁極面に平行 (磁束密度に垂直) に保ち、かつ磁極の中央を辺 ab と磁極の辺 pq が平行を保って移動するものとする。(第一級陸上無線技術士「無線工学の基礎」H22 年 7 月)

- D に生ずる起電力の大きさ e [V] は、D 内部の磁束が Δt [s] 間に $\Delta\Phi$ [Wb] 変化すると、$e =$ ア [V] である。
- 辺 dc が面 pp'q'q に達した時間 t_1 から、辺 ab が面 pp'q'q に達する時間 t_2 の間に D に生ずる起電力の大きさは、$e =$ イ [V] である。
- 上のとき、e によって D に流れる電流の方向は、点 a から ウ の方向である。
- D 全体が磁界中にあるときには、起電力の大きさは、エ [V] である。
- D に生ずる起電力の時間による変化の概略は、図 7.3 の オ である。

①$\Delta\Phi/\Delta t$ ②Blv ③d → c → b → a ④$2Blv$ ⑤B

⑥$\Delta\Phi\ \Delta t$ ⑦0 ⑧b → c → d → a ⑨Blv^2 ⑩A

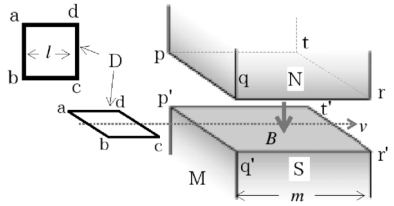


図 7.2: 磁極を通過する導線ループ

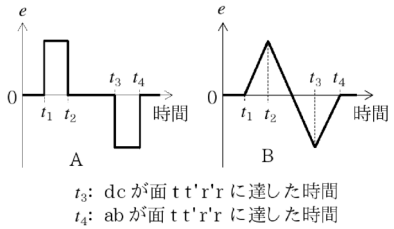


図 7.3: 設問オの選択肢 (左:A, 右 B)

問 3.　図 7.4 に示すように、時刻 $t = 0$ s において真空中の xy 面中に、辺の長さが a [m] と b [m] の長方形のコイルがある。コイルの両端は開放端となっており、端子 1, 2 間に発生する誘導起電力 (端子 1 に対する端子 2 の電位) を U [V] とする。以下の問に答えよ。(東北大院試 電子・情報系 基礎科目 [3]H27 年 3 月より改変)

(1) コイルが xy 面上に固定された状態で、この空間に一様な磁束密度 $\boldsymbol{B} = B_0 \cos\omega_1 t\hat{\boldsymbol{z}}$ [T] が印加されている。このときコイルの両端に生じる起電力 U [V] を求めよ。

(2) この空間に一様な磁束密度 $\boldsymbol{B} = B_1\hat{\boldsymbol{x}}$ [T] が印加された状態で、コイルが y 軸を軸として図の矢印の方向に角周波数 ω_2 [rad/sec] で回転している。このときコイルの両端に生じる起電力 U [V] を求めよ。

(3) この空間に一様な磁束密度 $\boldsymbol{B} = B_2 \cos\omega_2 t\hat{\boldsymbol{x}}$ [T] が印加された状態で、コ

イルが y 軸を軸として図の矢印の方向に角周波数 ω_2 [rad/sec] で回転している。このときコイルの両端に生じる起電力 U [V] を求めよ。

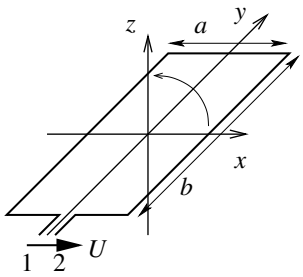


図 7.4: 長方形コイル

問 4. 図 7.5 に示すように、半径 a [m] の二本の平行導線が距離 d [m] 離れて置かれている ($d \gg a$ とする)。電流が互いに逆方向に I [A] 流れているものとする (図の矢印の方向)。この線路の長さ l [m] における自己インダクタンスを次の方法で求めよ。

(i) まず、各導線の内部インダクタンス L_i [H] を求める。互いの導線間でできる磁場は無視し、自分の導線自体がつくる磁場のみで考える。半径 a [m]、長さ l [m] の導線内部の磁場のエネルギーは $\boxed{\text{(a)}}$ [J] となる。これが $\frac{1}{2}L_i I^2$ に等しいので、$L_i = \boxed{\text{(b)}}$ [H] となる。

(ii) 次に導線間のインダクタンスを考える。位置 $\boldsymbol{r} = z\hat{\boldsymbol{z}}$ にできる磁場 (磁界 $\boldsymbol{H}(z)$ [A/m] は、(各導線がつくる磁場をアンペールの法則を用いて求めると) $\boldsymbol{H}(z) = \boxed{\text{(c)}}$ となる。

従って、両線間と鎖交する磁束 Φ [Wb] は $\Phi = \iint_S \mu_0 \boldsymbol{H} \bullet d\boldsymbol{S} = \int_{y=0}^{l} \int_{z=a}^{d-a} \boxed{\text{(d)}}\, dz\, dy = \boxed{\text{(e)}}$ となる。両線間のインダクタンス L_e [H] は、$\Phi = L_e I$ より、$L_e = \boxed{\text{(f)}}$。

結局、自己インダクタンス L [H] は $L = 2L_i + L_e = \boxed{\text{(g)}}$ となる。

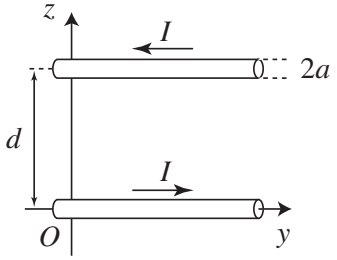


図 7.5: 平行二導体線路

問 5. 図 7.6 に示すように無限長ソレノイド (断面は半径 a [m] の円、単位長さの巻数 N [m^{-1}]、内部は真空) に電流 I [A] を流し、ソレノイド内に一様な磁場 (磁束密度 $B_0\hat{\boldsymbol{y}}$ [T]) ができている。

このソレノイド内部に、面積 S [m^2] のコイル (1 回巻き) を置いた。このコイルは中心を通る線 (x 軸) を軸に回転できるようになっている。また、コイルには抵抗 R [Ω] が接続されている。

(1) B_0 を求めよ。

(2) コイルの面の法線ベクトル $\hat{\boldsymbol{n}}$ と $\hat{\boldsymbol{y}}$ のなす角を θ とする ($\hat{\boldsymbol{n}} \bullet \hat{\boldsymbol{y}} = \cos\theta$)。コイルに鎖交する磁束 Φ [Wb] を θ の関数として表せ。

(3) ソレノイドとコイルの相互インダクタンス M [H] を求めよ。

(4) コイルを角周波数 ω [rad/s] で回転させたとき、コイルに流れる電流 $I(t)$ [A] を求めよ。ただし、$t = 0$ において $\theta = 0$ とする。

(5) コイルに流れた電流によって、1 周期 (角周波数 ω で 1 回転したとき) の抵抗 R で消費されたジュール損 Q [J] を求めよ。

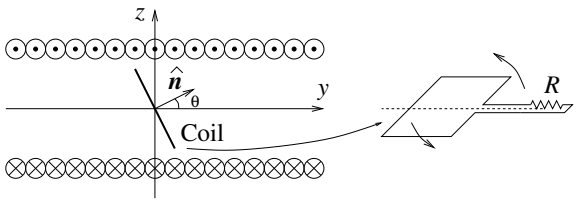


図 7.6: 無限長ソレノイド中とコイル

問 6. 図 7.7 に示すように、環状の磁性体 (透磁率 μ [H/m]、断面積 S [m^2]、平均磁路長 l [m]) にコイルが 2 つ巻かれており、それぞれコイル 1(巻数 N_1)、2(巻数 N_2) とする。

(1) コイル 1 にのみ I [A] を流したとき、磁性体中にできる磁束 Φ_1 [Wb] を求めよ。

(2) 上の状態において、コイル 1 と鎖交する磁束は $N_1\Phi_1$ で与えられる。コイル 1 の自己インダクタンス L_1 [H] を求めよ。

また、このコイルに蓄えられているエネルギー W_m [J] を求めよ。

さらに、磁性体中に磁場で蓄えられているエネルギー密度 w_m [J/m^3] を求め、磁性体の体積をかけて全エネルギーを求めよ。

(3) コイル 1, 2 間の相互インダクタンス M [H] を求めよ。

(4) コイル 1 に電源 (V_1 [V]) につなぎ、磁性体中には磁束 Φ [Wb] ができたとする。ま

た、コイル 2 に誘導される電圧を V_2 [V] とする。V_1, V_2 を Φ を用いて表し、そこから Φ を消去して V_2 を V_1 を用いて表せ。

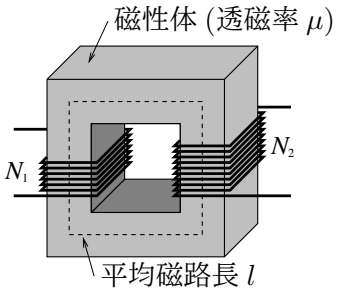


図 7.7: 磁性体と 2 つのコイル

問 7. 図 7.8 に示すように、z 軸に沿った無限長直線導体と yz 平面内に長方形導線回路が置かれている (いずれも十分に細い導線とする)。この 2 つの導体間の相互インダクタンス M [H] を求めよ。

問 8. 図 7.9 に示すように、z 軸に沿った無限長直線導体と xz 平面内に直角二等辺三角形が置かれている。この 2 つの導体間の相互インダクタンス M [H] を求めよ。

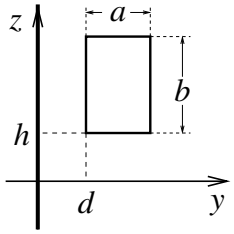


図 7.8: 無限長直線導体と長方形ループ状導体

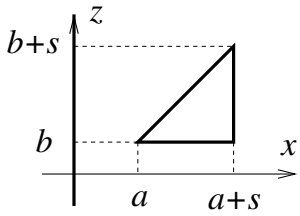


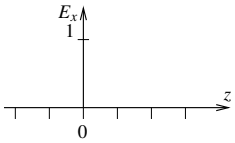
図 7.9: 無限長直線導体と直角三角形導体

第8章　Maxwellの方程式

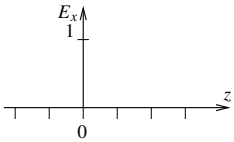
問 1.　$+z$ 方向に伝搬する平面波:
$E_x(z,t) = f(z-c_0t), \quad H_y(z,t) = \dfrac{1}{Z_0}f(z-c_0t)$
について考える。ここで、$f(u)$ は次式で与えられる関数、伝搬している空間は真空 (ε_0, μ_0) とし、$c_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3.0\times10^8$ [m/s] で与えられる。また無損失 $(\sigma = 0)$ とする。

$$f(u) = H(-u), \qquad H(\zeta) = \begin{cases} 1, (\zeta > 0) \\ 0, (\zeta < 0) \end{cases}$$

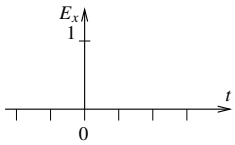
(1) $t = 0$ s、および $t = 1.0\times10^{-9}$ s における E_x の分布、また、$z = 0$ m、および $z = 1$ m で観測される E_x の時間波形を下記のグラフに記入せよ。(目盛は自由に使用してよく、特徴を示す値を記入すること)



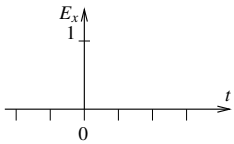
$t = 0$ における E_x の分布



$t = 1\times10^{-9}$ における E_x の分布



$z = 0$ における E_x の時間波形



$z = 1$ における E_x の時間波形

(2) この電磁波のポインティング・ベクトル $\boldsymbol{S}(z,t)$ [W/m^2] を求めよ。

(3) 図8.1に示すような 1 m×1 m×1 m = 1 m^3 の領域 V(その表面 S) を考える。

(a) $0 < t < 1/c_0$ において、$-\oiint_S (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\bullet d\boldsymbol{S}$ [W] を求めよ。$d\boldsymbol{S}$ は微小面素ベクトルで V の領域の外側を向いているものとする。

(b) $0 < t < 1/c_0$ において、V 中の電場および磁場のエネルギー: $\iiint_V w_e\, dV$ および $\iiint_V w_m\, dV$ [J] を求めよ。

(c) $-\oiint_S (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\bullet d\boldsymbol{S} = \dfrac{d}{dt}\iiint_V (w_e + w_m)dV$ となっていることを確認せよ。

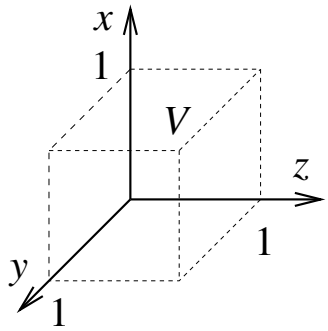


図 8.1: 通過した電磁波のエネルギー

問 2.　$+z$ 方向に伝搬する平面波:
$E_x(z,t) = f(z-c_0t), \quad H_y(z,t) = \dfrac{1}{Z_0}f(z-c_0t)$
について考える。ここで、$f(u)$ は任意の関数、伝搬している空間は真空とし、$c_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ [m/s] で与えられる。

(1) $f(u) = E_0\cos(-k_0u)$ としたときの E_x, H_y を求めよ。なお、$k_0 = \dfrac{\omega}{c_0}$ [rad/m] は真空中の電磁波の波数であり、ω [rad/s] は正弦振動している平面波の角周波数である。

(2) 上の場合におけるポインティング・ベクトル $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$ を求めよ。

(3) 図 8.2 に示すように、$z = 0$ の面における $a\times b$ [m^2] の領域を上の平面波が通過するものとする。この面を、正弦振動の一周期の時間 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ [s] に通過した電磁波のエネルギー W [J] は

$$\int_0^T\int_0^b\int_0^a \boldsymbol{S}(x,y,0,t)\bullet\hat{\boldsymbol{z}}\,dx\,dy\,dt$$

で求められる。W を求めよ。

(4) 上で求めたエネルギーは時刻 $t = \dfrac{2\pi}{\omega}$ において、$a\times b$ の面と、$z = 0$ および $z = c_0T$ でできる領域 V 内に分布していることに

なる。$t = \dfrac{2\pi}{\omega}$ の時刻における V 内の全エネルギーを、電場および磁場の単位体積当たりのエネルギーを領域 V で体積積分することで導出せよ。

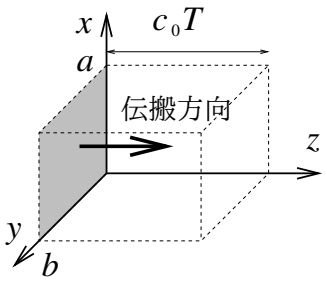


図 8.2: 通過した電磁波のエネルギー

解答 (略解)

第 1 章 電磁気学に必要な計算

問 1. 線分 AD 上, BC 上の点は, $t, s \quad (0 \leqq t \leqq 1, 0 \leqq s \leqq 1)$ を用いて $\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}), \quad \boldsymbol{c}+s(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ と書ける。3 等分する点は s, t が $\dfrac{1}{3}$、または $\dfrac{2}{3}$ となる点である。2 つの線分が変わる点は $\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}+s(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ が成立する。整理すると $s\boldsymbol{b}-(1-t)\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{d}+(1-s)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ となる。条件式 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{d}+2\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ として比較すると、$s = 1-t = \dfrac{t}{2} = \dfrac{1-s}{2}$ より、$t = \dfrac{2}{3}, \quad s = \dfrac{1}{3}$

問 2. 頂点を A, B, C とし、この頂点の位置ベクトルを $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ とする。$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}, \boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}$, $a = |\boldsymbol{a}|, b = |\boldsymbol{b}|, c = |\boldsymbol{c}|$ とする。$\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ より

$$c^2 = \boldsymbol{c} \bullet \boldsymbol{c} = (-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) \bullet (-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = a^2+b^2+2\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = a^2+b^2+2ab\cos\theta$$

問 3. 頂点を A, B, C とし、この頂点の位置ベクトルを $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ とする。$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}, \boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}$ とおく。頂点 A, B, C を通る中線を a_m, b_m, c_m とする。

c_m 上の点 $\boldsymbol{r}_c$ は、A 点からのベクトルを用いて $\boldsymbol{r}_c = \dfrac{a}{2}+l\left(\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}+\boldsymbol{b}\right), 0 \leqq l \leqq 1$ と表せる。

b_m 上の点 $\boldsymbol{r}_b$ は、A 点からのベクトルを用いて

$$\boldsymbol{r}_b = \boldsymbol{a}+m\left(\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}\right) = \boldsymbol{a}+m\left\{\boldsymbol{b}\frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\right\} = \boldsymbol{a}+m\left(-\frac{\boldsymbol{a}}{2}+\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right)$$

と表せる。ここで、$0 \leqq m \leqq 1$ である。

この二つの直線の交点は $\dfrac{a}{2}+l\left(\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}+\boldsymbol{b}\right) = \boldsymbol{a}+m\left(-\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{2}\right), \quad \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{l}{2}\right)\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b} = \left(1-\dfrac{m}{2}\right)\boldsymbol{a}+\dfrac{m}{2}\boldsymbol{b}$ より、各ベクトルの係数が等しくなることから $l = \dfrac{1}{3}, m = \dfrac{2}{3}$ となり、交点は $\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$ と求められる。

a_m がこの点を通れば三つの中線が一点で交わることになる。a_m 上の点 $\boldsymbol{r}_a$ は A 点から $\boldsymbol{r}_a = n\left(\boldsymbol{a}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{2}\right), 0 \leqq n \leqq 1$ と表せる。$n = \dfrac{2}{3}$ のとき $\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$ となる。

問 4.

(1) 辺 AB の長さは $|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|$、辺 BC の長さは $|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}|$

$$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|^2 = (\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}) \bullet (\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{B}|^2+|\boldsymbol{A}|^2-2\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A} = 2-2\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$$
$$= |\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}|^2 = (\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}) \bullet (\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}) = |\boldsymbol{C}|^2+|\boldsymbol{B}|^2-2\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{C} = 2-2\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{C}$$

(2) $|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|^2 = 2-2\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} \neq 0$ より、$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} \neq 1$

(3) 小問 1 より $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{D} \equiv p \neq 1$ が言える。

問題の式と $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ との内積をそれぞれとると、$a+(b+c+d)p = 0, \quad b+(c+d+a)p = 0$ となる。辺々引くと $(a-b)+(b-a)p = (a-b)(1-p) = 0$ となるが、小問 2 より $p \neq 1$ が言えるので、$a = b$。同様にして、$b = c$, $c = d$ が言える。

(4) 小問 3 と $\boldsymbol{A}$ との内積をとった式は $a+(b+c+d)p = a(1+3p) = 0$。$p = \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \cos\theta = -\dfrac{1}{3}$

問 5. $\vec{AB} = \boldsymbol{A}, \vec{BC} = \boldsymbol{B}, \vec{CA} = \boldsymbol{C}$ とする。このとき、$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$ が成立する。

$\vec{AF} = \gamma\boldsymbol{A}, \vec{BD} = \alpha\boldsymbol{B}, \vec{CE} = \beta\boldsymbol{C}$ とおく。このとき、α, β, γ のいずれか一つ、または三つ全てが 1 より大きくなる。

$\vec{AE} = -(1-\beta)\boldsymbol{C} = \kappa\vec{AF}+(1-\kappa)\vec{AD}$ となる。

$$\begin{aligned}\kappa\vec{AF}+(1-\kappa)\vec{AD} &= \kappa\gamma\boldsymbol{A}+(1-\kappa)\{\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{B}\} = \kappa\gamma\boldsymbol{A}+(1-\kappa)\{\boldsymbol{A}+\alpha(-\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A})\} \\ &= \{\kappa\gamma+(1-\kappa)(1-\alpha)\}\boldsymbol{A}-(1-\kappa)\alpha\boldsymbol{C} \\ &= -(1-\beta)\boldsymbol{C}\end{aligned}$$

従って、$\kappa\gamma+(1-\kappa)(1-\alpha) = 0$ より $\kappa = -\dfrac{1-\alpha}{\gamma-1+\alpha}$

$$\therefore 1-\beta = \frac{\gamma\alpha}{\gamma-1+\alpha}, \qquad \beta = \frac{\gamma-1+\alpha+\gamma\alpha}{\gamma-1+\alpha} = -\frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{\gamma-1+\alpha}$$

従って、

$$\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA} = -\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\beta}{1-\beta} = -\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{-(1-\alpha)(1-\gamma)}{\gamma\alpha} = 1$$

問 6.

(1) $\boldsymbol{S} \bullet \hat{\boldsymbol{a}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} + \dfrac{9}{2}$

(2) 任意のベクトルとの外積で直交したベクトルとなり、そのベクトルの大きさを 1 にすればよい。例えば $\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{a}} = -\dfrac{1}{2}\hat{\boldsymbol{y}} + \dfrac{1}{2}\hat{\boldsymbol{z}}$ となるので、$\hat{\boldsymbol{b}} = \dfrac{\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{a}}}{|\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{a}}|} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{z}}$

(3) $\hat{\boldsymbol{c}} = \hat{\boldsymbol{a}} \times \hat{\boldsymbol{b}}$ とすればよい。上の例を継続すれば $\hat{\boldsymbol{c}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{x}} - \dfrac{1}{2}\hat{\boldsymbol{y}} - \dfrac{1}{2}\hat{\boldsymbol{z}}$

(4) $S_b = \boldsymbol{S} \bullet \hat{\boldsymbol{b}}, S_c = \boldsymbol{S} \bullet \hat{\boldsymbol{c}}$ で求められる。

上の例の場合、$S_b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, S_c = \dfrac{3}{\sqrt{2}} - \dfrac{9}{2}$ より、$\boldsymbol{S} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{2}} + \dfrac{9}{2}\right)\hat{\boldsymbol{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{b}} + \left(\dfrac{3}{\sqrt{2}} - \dfrac{9}{2}\right)\hat{\boldsymbol{c}}$

(5) x, y, z 座標系の場合は $|\boldsymbol{S}| = \sqrt{3^2+4^2+5^2} = 5\sqrt{2}$。上の例の場合、$a, b, c$ 座標系の場合は

$$|\boldsymbol{S}| = \left\{\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{9}{2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{2}$$

問 7.

(1) $\boldsymbol{a}_1 = \left(\boldsymbol{a} \cdot \dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\right)\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2} = -\dfrac{13}{25}(3\hat{\boldsymbol{y}} - 4\hat{\boldsymbol{z}}), \quad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_1 = 2\hat{\boldsymbol{x}} - \dfrac{36}{25}\hat{\boldsymbol{y}} - \dfrac{27}{25}\hat{\boldsymbol{z}}$

(2) 例えば $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 9\hat{\boldsymbol{x}} + 8\hat{\boldsymbol{y}} + 6\hat{\boldsymbol{z}}$

問 8. $\boldsymbol{r}(\theta) = \hat{\boldsymbol{y}} + \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}(\sin\theta\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{z}}),\ -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$

問 9. 以下の 4 つのベクトル関数で表すことができる。

(1) $\boldsymbol{r}(\theta) = \cos\theta\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{y}} + 2\hat{\boldsymbol{y}},\ -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$

(2) $\boldsymbol{r}(\theta) = \cos\theta\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{y}} + 2\hat{\boldsymbol{x}} + 2\hat{\boldsymbol{y}},\ -\pi \leqq \theta \leqq -\frac{\pi}{2}$

(3) $\boldsymbol{r}(\theta) = \cos\theta\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{y}} + 2\hat{\boldsymbol{x}},\ \frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$

(4) $\boldsymbol{r}(\theta) = \cos\theta\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{y}},\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$

問 10. 図 1.3 は $\boldsymbol{r} = y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}},\ 0 \leqq y \leqq d, -\infty < z < \infty$

図 1.4 は $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + z\hat{\boldsymbol{z}},\ 0 \leqq x \leqq a, 0 \leqq z \leqq c - \dfrac{c}{a}x$

問 11. $\boldsymbol{r}(x, z) = x\hat{\boldsymbol{x}} + (-2x+2)\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}},\ 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq z \leqq 1$

問 12. $\boldsymbol{r}(s, \theta) = 3s\cos\theta\hat{\boldsymbol{x}} + 2s\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}} + 2\hat{\boldsymbol{x}} + 4\hat{\boldsymbol{y}},\ 0 \leqq s \leqq 1, 0 \leqq \theta < 2\pi$

問 13. $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + (2 - 2x - \frac{1}{2}y)\hat{\boldsymbol{z}},\ 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 4 - 4x$

問 14. $\boldsymbol{r}(\rho, \phi, z) = \rho\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \rho\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}},\ 0 \leqq z \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \leqq \rho \leqq \frac{z}{\sqrt{3}}, 0 \leqq \phi < 2\pi$

問 15. $\boldsymbol{r}(\rho, \phi, z) = 2\hat{\boldsymbol{y}} + \rho\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \rho\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}},\ 0 \leqq \rho \leqq 2, 0 \leqq \phi \leqq \pi, 0 \leqq z \leqq 4$

問 16. $\hat{\boldsymbol{x}} = \cos\frac{\pi}{6}\hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin\frac{\pi}{6}\hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{y}} = \sin\frac{\pi}{6}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos\frac{\pi}{6}\hat{\boldsymbol{\phi}}$

問 17.

(1) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_o) = \hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} + 6\hat{\boldsymbol{z}}$

(2) $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{y}}$ より、$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{y}}$

(3) $\hat{\boldsymbol{x}} = \cos\phi\hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\rho}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\phi}}$, $\hat{\boldsymbol{y}} = \sin\phi\hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\phi}}$

$\boldsymbol{r}_0 = \hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} + \sqrt{6}\hat{\boldsymbol{z}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\rho}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) + \sqrt{6}\hat{\boldsymbol{z}} = \sqrt{2}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \sqrt{6}\hat{\boldsymbol{z}}$

(4) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_0) = \hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} + 6\hat{\boldsymbol{z}} = \sqrt{2}\hat{\boldsymbol{\rho}} + 6\hat{\boldsymbol{z}}$

(5) $r = 2\sqrt{2}, \boldsymbol{r}_0 = 2\sqrt{2}\hat{\boldsymbol{r}}$

$\hat{\boldsymbol{x}} = \sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$, $\hat{\boldsymbol{y}} = \sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$, $\hat{\boldsymbol{z}} = \cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$, $\phi = \dfrac{\pi}{4}$,

$\hat{\boldsymbol{x}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{r}} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\phi}}$, $\hat{\boldsymbol{y}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{r}} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\phi}}$, $\hat{\boldsymbol{z}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\hat{\boldsymbol{r}} - \dfrac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\theta}}$

$\boldsymbol{r}_0 = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{r}} + \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{\theta} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) + \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{r}} + \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) + \sqrt{6}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\hat{\boldsymbol{r}} - \dfrac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} = 2\sqrt{2}\hat{\boldsymbol{r}}$

(6) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_0) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{r}} + \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{\theta} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) + \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{r}} + \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) + 6\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\hat{\boldsymbol{r}} - \dfrac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{3}\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2} - 3\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}$

問 18. $R = \{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\}^{\frac{1}{2}}$ より、$\dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{x-x_0}{R}$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{R}\right) = \dfrac{d}{dR}\left(\dfrac{1}{R}\right)\dfrac{\partial R}{\partial x} = -\dfrac{x-x_0}{R^3}$

問 19. $\displaystyle\int_1^2 \boldsymbol{A}\,ds = -3\hat{\boldsymbol{x}} + \log\frac{5}{2}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{3}{4}\hat{\boldsymbol{z}}$

問 20. 図 1.10: $\boldsymbol{r}(s) = s^2\hat{\boldsymbol{x}} + s\hat{\boldsymbol{y}}$, $-\infty < s < \infty$, $d\boldsymbol{r} = (2s\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})ds$

図 1.11: 円周部は $\boldsymbol{r}(\phi) = a\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + a\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}$, $\frac{\pi}{4} \leqq \phi \leqq \frac{7}{4}\pi$, $d\boldsymbol{r} = a(-\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{y}})d\phi$

直線部は $\boldsymbol{r} = \frac{a}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{x}} + s\hat{\boldsymbol{y}}$, $-\frac{a}{\sqrt{2}} \leqq s \leqq \frac{a}{\sqrt{2}}$, $d\boldsymbol{r} = ds\hat{\boldsymbol{y}}$

問 21. 経路は $\boldsymbol{r} = a\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + a\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}$, $0 \leqq \phi \leqq \dfrac{\pi}{2}$。$d\boldsymbol{r} = a(-\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{y}})d\phi$、$\boldsymbol{A} = a\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}$ より、$\boldsymbol{A} \bullet d\boldsymbol{r} = -a^2\sin\phi\cos\phi\,d\phi$。$\displaystyle\int \boldsymbol{A} \bullet d\boldsymbol{r} = -\frac{a^2}{2}$

問 22. 積分路 C は $\boldsymbol{r} = a\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = a(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}})$, $0 \leqq \phi \leqq 2\pi$ となる。線素ベクトルは $d\boldsymbol{r} = a\,d\phi(-\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{y}})$ となる。ベクトル場は $\boldsymbol{A} = yx^2\hat{\boldsymbol{x}} + x^3\hat{\boldsymbol{y}} + x^2\hat{\boldsymbol{z}} = a^3\sin\phi\cos^2\phi\hat{\boldsymbol{x}} + a^3\cos^3\phi\hat{\boldsymbol{y}} + a^2\cos^2\phi\hat{\boldsymbol{z}}$ となる。従って、

$$\oint_C \boldsymbol{A} \bullet d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi}(a^3\sin\phi\cos^2\phi\hat{\boldsymbol{x}} + a^3\cos^3\phi\hat{\boldsymbol{y}} + a^2\cos^2\phi\hat{\boldsymbol{z}}) \bullet (-\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{y}})a\,d\phi$$
$$= \int_0^{2\pi}(-a^3\sin^2\phi\cos^2\phi + a^3\cos^4\phi)\,a\,d\phi = \frac{\pi a^4}{2}$$

問 23. 経路を表すベクトル関数は $\boldsymbol{r}_{C_1} = x\hat{\boldsymbol{x}}, a \leqq x < \infty$ と書ける。従って、線素ベクトルは $d\boldsymbol{r}_{C_1} = dx\hat{\boldsymbol{x}}$。この経路上のベクトル関数は $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_{C_1}) = \dfrac{x}{x^3}\hat{\boldsymbol{x}} = \dfrac{1}{x^2}\hat{\boldsymbol{x}}$ と書ける。$\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^2}\hat{\boldsymbol{x}} \bullet dx\hat{\boldsymbol{x}} = \int_a^\infty \frac{1}{x^2}dx = -\left[\frac{1}{x}\right]_a^\infty = \frac{1}{a}$

問 24. ベクトル関数は例えば $\boldsymbol{r}(s) = -s\hat{\boldsymbol{x}} + s\hat{\boldsymbol{y}}, \dfrac{a}{\sqrt{2}} \leqq s < \infty$ とおける。このとき、$d\boldsymbol{r} =$

$(-\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}})ds$ となる。また、この経路上の $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(s))=\dfrac{-s\hat{\boldsymbol{x}}+s\hat{\boldsymbol{y}}}{2\sqrt{2}s^3}=\dfrac{-\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}}}{2\sqrt{2}s^5}$ となるので、$\boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{r}=\dfrac{ds}{2\sqrt{2}s^2}$ となる。従って、$\displaystyle\int\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{ds}{s^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{1}{s}\right]_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\infty}=\frac{1}{a}$

問 25. 経路を表すベクトル関数は $\boldsymbol{r}_{(x)}=x\hat{\boldsymbol{x}}+\log x\hat{\boldsymbol{y}},\ 1\leqq x\leqq e$ となる。線素ベクトルは $d\boldsymbol{r}=(\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{1}{x}\hat{\boldsymbol{y}})dx$ より $\displaystyle\int_1^e(\log x)\hat{\boldsymbol{x}}\bullet(\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{1}{x}\hat{\boldsymbol{y}})dx=\int_1^e(\log x)dx=1$

別解として、ベクトル関数を $\boldsymbol{r}(y)=e^y\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}},\ 0\leqq y\leqq 1$ と選ぶこともできる。このときの線素ベクトルは $d\boldsymbol{r}=(e^y\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}})dy$ となるので、$\displaystyle\int_0^1 y\hat{\boldsymbol{x}}\bullet(e^y\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}})dy=\int_0^1 ye^y dy=1$

問 26. $d\boldsymbol{S}=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}du\,dv=\hat{\boldsymbol{z}}du\,dv$、$\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{x}}+u\hat{\boldsymbol{y}}+v\hat{\boldsymbol{z}}$ より、$\boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{S}=v\,du\,dv$ となる。$\displaystyle\iint\boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{S}=\int_1^2\int_0^1 v\,du\,dv=\frac{3}{2}$

問 27. 球面を表すベクトル関数は $\boldsymbol{r}(\theta,\phi)=a\sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}+a\sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}+a\cos\theta\hat{\boldsymbol{z}},0\leqq\theta\leqq\pi,0\leqq\phi\leqq 2\pi$ となる。面素ベクトルは $d\boldsymbol{S}=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}d\theta\times\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi}d\phi=a^2\sin\theta(\sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}+\sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}+\cos\theta\hat{\boldsymbol{z}})\,d\theta\,d\phi$ この球面上の $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(\theta,\phi))=a\sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}$ より、$\boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{S}=a^3\sin^3\theta\cos^2\phi\,d\theta\,d\phi$ と表される。従って、$\displaystyle\iint\boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}a^3\sin^3\theta\cos^2\phi\,d\theta\,d\phi=\frac{4\pi a^3}{3}$

なお、球座標系のベクトルを用いた計算の場合は以下の通りとなる。球面を表すベクトル関数は $\boldsymbol{r}(\theta,\phi)=a\hat{\boldsymbol{r}}(\theta,\phi),0\leqq\theta\leqq\pi,0\leqq\phi<2\pi$ より、$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}=a\dfrac{\partial\hat{\boldsymbol{r}}}{\partial\theta}=a\hat{\boldsymbol{\theta}},\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi}=a\dfrac{\partial\hat{\boldsymbol{r}}}{\partial\phi}=a\sin\theta\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial\hat{\boldsymbol{r}}}{\partial\phi}=a\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$ となるので、面素ベクトルは $d\boldsymbol{S}=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi}d\theta\,d\phi=a^2\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\times\hat{\boldsymbol{\phi}}d\theta\,d\phi=a^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\hat{\boldsymbol{r}}$。また、$\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A}=x\hat{\boldsymbol{x}}=a\sin\theta\cos\phi(\sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{r}}+\cos\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{\theta}}-\sin\phi\hat{\boldsymbol{\phi}})$ より、$\boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{S}=a^3\sin^3\theta\cos^2\phi\,d\theta\,d\phi$。これ以降の積分は先と同じ。

問 28. 半径 a の球面はベクトル関数で $\boldsymbol{r}(\theta,\phi)=a\sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}+a\sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}+a\cos\phi\hat{\boldsymbol{z}}=a\hat{\boldsymbol{r}},\leqq\theta\leqq\pi,0\leqq\phi<2\pi$ と書ける。このとき面素ベクトルは $d\boldsymbol{S}=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi}d\theta\,d\phi=a^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi(\sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}+\sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}+\cos\theta\hat{\boldsymbol{z}})=a^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{r}}$ となる。また、ベクトル関数は $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{r}(\theta,\phi)=a\hat{\boldsymbol{r}}$ となるので、

$$\iint\boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}a\hat{\boldsymbol{r}}\bullet\hat{\boldsymbol{r}}\,a^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi=a^3\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=4\pi a^3$$

問 29. 開曲面は $\boldsymbol{r}(x,y)=x\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}}+(1-x-y)\hat{\boldsymbol{z}},0\leqq x\leqq 1,0\leqq y\leqq 1-x$ とおける。このとき、面素ベクトルは $d\boldsymbol{S}=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x}dx\times\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial y}dy=(\hat{\boldsymbol{z}}+\hat{\boldsymbol{y}}+\hat{\boldsymbol{x}})dx\,dy$ となる。従って、

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(x,y))\bullet d\boldsymbol{S}=\int_0^1\int_0^{1-x}\{-x^2\hat{\boldsymbol{x}}+2y^2\hat{\boldsymbol{y}}+(1-x-y)^2\hat{\boldsymbol{z}}\}\bullet(\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}}+\hat{\boldsymbol{z}})dy\,dx$$
$$=\int_0^1\int_0^{1-x}\{-x^2+2y^2+(1-x-y)^2\}dy\,dx=\int_0^1\int_0^{1-x}\{3y^2+2(x-1)y+(1-2x)\}dy\,dx$$
$$=\int_0^1\left[y^3+(x-1)y^2+(1-2x)y\right]_0^{1-x}dx=\int_0^1(1-3x+2x^2)dx=\frac{1}{6}$$

問 30. ρ,ϕ を微小に増やしたときのベクトルの変化は $\partial_\rho\boldsymbol{r}=(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}+\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}})\,d\rho=\hat{\boldsymbol{\rho}}\,d\rho$, $\partial_\phi\boldsymbol{r}=\rho(-\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}+\cos\phi\hat{\boldsymbol{y}})\,d\phi=\rho\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$ となる。面素ベクトルは $d\boldsymbol{S}=\partial_\rho\boldsymbol{r}\times\partial_\phi\boldsymbol{r}=\rho\,d\rho\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{z}}$ となる。従って、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2(\rho\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}+\rho\cos\phi\hat{\boldsymbol{y}}+\rho^2\sin\phi\cos\phi\hat{\boldsymbol{z}})\bullet\hat{\boldsymbol{z}}\,\rho\,d\rho\,d\phi=\int_0^2\rho^3\,d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2\phi\,d\phi=2$$

問 31. 領域 V を表すベクトル関数は $\boldsymbol{r}(r,\theta,\phi)=r\hat{\boldsymbol{r}}(\theta,\phi),\ 0\leqq r\leqq 2,0\leqq\theta\leqq\pi,0\leqq\phi\leqq 2\pi$ となる。従って、体積要素は $dV=r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$ となる。スカラー場は $\phi=3\sqrt{x^2+y^2+z^2}=3r$ となるので、$\displaystyle\iiint_V\phi(\boldsymbol{r})dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^2 3r\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi=48\pi$

問 32. 領域 V を表すベクトル関数は $\boldsymbol{r} = \rho\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \rho\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}},\ 0 \leqq \rho \leqq 1-z, 0 \leqq \phi < 2\pi, 0 \leqq z \leqq 1$ と書ける。各パラメタを微小に増加させたときの移動ベクトルは $\partial_\rho \boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{\rho}} d\rho$, $\partial_\phi \boldsymbol{r} = \rho\hat{\boldsymbol{\phi}} d\boldsymbol{\phi}$, $\partial_z \boldsymbol{r} = dz\hat{\boldsymbol{z}}$ となるので、体積要素は $dV = \partial_\rho \boldsymbol{r} \times \partial_\phi \boldsymbol{r} \bullet \partial_z \boldsymbol{r} = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$ となる。従って、$\displaystyle\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1-z}(\rho\cos\phi+\rho\sin\phi+z)\rho\, d\rho\, d\phi\, dz = 2\pi\int_0^1\int_0^{1-z} z\,\rho\, d\rho\, dz = 2\pi\int_0^1 z\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{1-z} d\rho = \pi\int_0^1 z(1-z)^2 dz = \frac{\pi}{12}$

問 33. 領域 V を表すベクトル関数は $\boldsymbol{r}(r,\theta,\phi) = r\sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + r\sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} + r\cos\theta\hat{\boldsymbol{z}} = r\hat{\boldsymbol{r}}$, $0 \leqq r \leqq a, 0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \phi < 2\pi$ と書ける。このとき体積要素は $dV = \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right) \bullet \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} dr\, d\theta\, d\phi = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$ となる。被積分関数は $\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|} = \dfrac{1}{r}$ と書ける。従って、

$$\iiint_V \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\frac{1}{r}r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi = \int_0^a r\, dr\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi a^2$$

問 34.

(1) $e^x \approx 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{24}x^4 + \dfrac{1}{120}x^5$

(2) $e^{0.1} \approx 1 + 0.1 + \dfrac{1}{2}0.01 + \dfrac{1}{6}0.001 = 1.10517 \quad (e^{0.1} \approx 1.10517091807565)$

$e^{-0.1} \approx 1 - 0.1 + \dfrac{1}{2}0.01 - \dfrac{1}{6}0.001 = 0.90483 \quad (e^{-0.1} \approx 0.90483741803596)$

(3) $\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{120}x^5$

(4) $\cos x = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{24}x^4$

(5) $e^{j\theta} = 1 + (j\theta) + \dfrac{1}{2}(j\theta)^2 + \dfrac{1}{6}(j\theta)^3 + \dfrac{1}{24}(j\theta)^4 + \dfrac{1}{120}(j\theta)^5$

$= 1 + j\theta - \dfrac{1}{2}\theta^2 - j\dfrac{1}{6}\theta^3 + \dfrac{1}{24}\theta^4 + j\dfrac{1}{120}\theta^5 = \left(1 - \dfrac{1}{2}\theta^2 + \dfrac{1}{24}\theta^4\right) + j\left(\theta - \dfrac{1}{6}\theta^3 + \dfrac{1}{120}\theta^5\right)$

$= \cos\theta + j\sin\theta$

問 35.

(1) $1 - \frac{1}{2}x$

(2) $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{54}(x-8)$

問 36.

$$\log_e x \approx (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$$

$$\log_e 1.1 \approx 0.1 - \frac{1}{2}0.01 + \frac{1}{3}0.001 - \frac{1}{4}0.0001 = 0.095305333\cdots$$

問 37. $f(x) \approx \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{7}{8}x^2 - \dfrac{15}{16}x^3$

問 38. $\boldsymbol{r}$ の点におけるテイラー展開の各項の係数は $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{r}) = 0, \dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{r}), \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{r}) = -1, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{r}) = -\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(\boldsymbol{r}) = -\dfrac{\pi}{2}$ となるので、

$$f(\boldsymbol{r}) \approx 1 + \frac{1}{2}\left\{-(x-\tfrac{\pi}{2})^2 - (\tfrac{\pi}{2})^2(y-1)^2 - \pi(x-\tfrac{\pi}{2})(y-1)\right\}$$

問 39.

(1) $\varphi(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{|\boldsymbol{r}|} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ より、

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}) = -\frac{\boldsymbol{r}}{|\,\boldsymbol{r}\,|^3}$$

(2) $(\nabla\varphi)(\boldsymbol{r}_0)\bullet\hat{\boldsymbol{x}} = -\dfrac{1}{5\sqrt{5}}$

(3) $(\nabla\varphi)(\boldsymbol{r}_0)\bullet\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}}) = -\dfrac{3}{5\sqrt{10}}$

(4) $(\nabla\varphi)(\boldsymbol{r}_0)\bullet\dfrac{(\nabla\varphi)(\boldsymbol{r}_0)}{|(\nabla\varphi)(\boldsymbol{r}_0)|} = \dfrac{|(\nabla\varphi)(\boldsymbol{r}_0)|^2}{|(\nabla\varphi)(\boldsymbol{r}_0)|} = |(\nabla\varphi)(\boldsymbol{r}_0)| = \dfrac{1}{5}$。向きは $\dfrac{(\nabla\varphi)(\boldsymbol{r}_0)}{|(\nabla\varphi)(\boldsymbol{r}_0)|} = -\dfrac{\hat{\boldsymbol{x}}+2\hat{\boldsymbol{y}}}{\sqrt{5}}$

問 40.

(1) $f(x,y) \approx f(\mathbf{0}) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0})x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0})y + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{0})x^2 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\mathbf{0})xy + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{0})y^2 \equiv F(x,y)$

(2) $\boldsymbol{\nabla}F = \left\{\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0}) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{0})x + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\mathbf{0})y\right\}\hat{\boldsymbol{x}} + \left\{\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0}) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\mathbf{0})x + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{0})y\right\}\hat{\boldsymbol{y}}$

(3) $d\boldsymbol{r} = (\hat{\boldsymbol{x}} + 2x\hat{\boldsymbol{y}})dx$ より、

$$\begin{aligned}
\int_{C_1}\boldsymbol{\nabla F}\bullet d\boldsymbol{r} &= \int_0^{x_0}\left[\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{0})x + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\mathbf{0})x^2\right\}\hat{\boldsymbol{x}}\right.\\
&\qquad\left. + \left\{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\mathbf{0})x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{0})x^2\right\}\hat{\boldsymbol{y}}\right]\bullet(\hat{\boldsymbol{x}}+2x\hat{\boldsymbol{y}})dx\\
&= \int_0^{x_0}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0}) + \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{0}) + 2\frac{\partial f}{\partial x\partial y}(\mathbf{0})\right\}x + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\mathbf{0})x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{0})x^3\right]dx\\
&= \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0})x_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{0})x_0^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0})x_0^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\mathbf{0})x_0^3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{0})x_0^4
\end{aligned}$$

(4) $F(\boldsymbol{r}_2) - F(\boldsymbol{r}_1)$

$$\begin{aligned}
&= f(\mathbf{0}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0})x_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0})x_0^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{0})x_0^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\mathbf{0})x_0x_0^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{0})x_0^4 - f(\mathbf{0})\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0})x_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0})x_0^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{0})x_0^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\mathbf{0})x^3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{0})x_0^4
\end{aligned}$$

問 41.

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iiint_{\Delta V} f(\boldsymbol{r})dV = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}}\int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}}\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta z}{2}} y'z'dx'dy'dz'$$

$$= \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}[x']_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}}\left[\frac{1}{2}y'\right]_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}}\left[\frac{1}{2}z'\right]_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta x\Delta y\Delta z}\Delta x\cdot\frac{1}{2}2y\Delta y\cdot\frac{1}{2}2z\Delta z = yz$$

問 42.

$$\iiint_{\Delta V} f\,dV = \int_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}}\int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}}\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} y'\sin kz'\,dx'\,dy'\,dz' = \Delta x\,y\,\Delta y\,2\frac{\sin kz\,\sin\frac{k\Delta z}{2}}{k}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iiint_{\Delta V} f\,dV &= \lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta x\Delta y\Delta z}\left\{\Delta x\,y\,\Delta y\,2\frac{\sin kz\sin\frac{k\Delta z}{2}}{k}\right\}\\
&= y\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\sin\frac{k\Delta z}{2}}{\frac{k\Delta z}{2}}\sin kz = y\,\sin kz
\end{aligned}$$

問 43.

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Delta S}\boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{S}\\
&= \int_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}}\int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}}\boldsymbol{A}(x+\tfrac{\Delta x}{2},y',z')\bullet\hat{\boldsymbol{x}}\,dy'\,dz' + \iint\boldsymbol{A}(x-\tfrac{\Delta y}{2},y',z')\bullet(-\hat{\boldsymbol{x}})\,dy'\,dz'\\
&\quad + \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}}\int_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}}\left\{\boldsymbol{A}(x',y+\tfrac{\Delta z}{2},z') - \boldsymbol{A}(x',y-\tfrac{\Delta y}{2},z')\right\}\bullet\hat{\boldsymbol{y}}dz'dx'\\
&\quad + \int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}}\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}}\left\{\boldsymbol{A}(x',y',z+\tfrac{\Delta z}{2}) - \boldsymbol{A}(x',y',z-\tfrac{\Delta z}{2})\right\}\bullet\hat{\boldsymbol{z}}\,dx'\,dy'
\end{aligned}$$

$$= \iint \{2(x+\tfrac{\Delta x}{2})y' - 2(x-\tfrac{\Delta x}{2})y'\}\,dy'\,dz' + \iint \{2(y+\tfrac{\Delta y}{2})^2 z' - 2(y-\tfrac{\Delta y}{2})^2 z'\}\,dz'\,dx'$$
$$+ \iint \left\{3\sin(k\{z+\tfrac{\Delta z}{2}\})x'^2 - 3\sin(k\{z-\tfrac{\Delta z}{2}\})x'^2\right\}\,dz'\,dx'$$
$$= \Delta z\left[y'^2\right]_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta x}{2}}\{x+\tfrac{\Delta x}{2}-x+\tfrac{\Delta x}{2}\} + \Delta x\left[z'^2\right]_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}}\{y^2+y\Delta y+\tfrac{\Delta y^2}{4}-y^2+y\Delta y-\tfrac{\Delta y^2}{4}\}$$
$$+ \Delta y\left[x'^3\right]_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}}\left\{\sin(k\{z+\tfrac{\Delta z}{2}\})-\sin(k\{z-\tfrac{\Delta z}{2}\})\right\}$$
$$= 2\Delta x\,\Delta z\,\Delta y\,y + 4\Delta x\,\Delta z\,z\,y\,\Delta y + \Delta y(3x^2\Delta x + \tfrac{\Delta x^3}{4})\{\sin(k\{z+\tfrac{\Delta z}{2}\})-\sin(k\{z-\tfrac{\Delta z}{2}\})\}$$

従って、

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oiint \boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{S} = 2y+4yz+3x^2\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\{\sin(k\{z+\tfrac{\Delta z}{2}\})-\sin(k\{z-\tfrac{\Delta z}{2}\})$$
$$= 2y+4yz+3x^2k\cos kz$$

問 44.

$$\oiint_{\Delta S}\boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{S} = \int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}}\int_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}}\left\{A_x(x+\tfrac{\Delta x}{2},y',z')-A_x(x-\tfrac{\Delta x}{2},y',z')\right\}dz'dy'$$
$$+\int_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}}\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}}\left\{A_y(x',y+\tfrac{\Delta y}{2},z')-A_y(x',y-\tfrac{\Delta y}{2},z')\right\}dx'dz'$$
$$+\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}}\int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}}\left\{A_z(x',y',z+\tfrac{\Delta z}{2})-A_z(x',y',z-\tfrac{\Delta z}{2})\right\}dy'dx'$$
$$=\int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}}\int_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}}\left\{(x+\tfrac{\Delta x}{2})y'-(x-\tfrac{\Delta x}{2})y'\right\}dz'dy'$$
$$+\int_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}}\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}}\left\{(y+\tfrac{\Delta y}{2})z'-(y-\frac{\Delta y}{2})z'\right\}dx'dz'$$
$$+\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}}\int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}}\left\{\sin k(z+\tfrac{\Delta z}{2})x'-\sin k(z-\tfrac{\Delta z}{2})x'\right\}dy'dx'$$
$$=\Delta x\,y\,\Delta y\,\Delta z+\Delta x\,2\,\Delta y\,y\,\Delta z\,z+\Delta y\,x\,\Delta x\,2\cos kz\,\sin k\frac{\Delta z}{2}$$
$$\therefore\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oiint_{\Delta S}\boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{S} = y+2yz+x\frac{\sin k\frac{\Delta z}{2}}{\frac{k\Delta z}{2}}k\cos kz = y+2yz+xk\cos kz = \boldsymbol{\nabla}\bullet\boldsymbol{A}$$

問 45.

$$\oint_{\Delta C}\boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{r} = \int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}}\boldsymbol{A}(x,y',z-\tfrac{\Delta z}{2})\bullet\hat{\boldsymbol{y}}dy' + \int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}}\boldsymbol{A}(x,y',z+\tfrac{\Delta z}{2})\bullet(-\hat{\boldsymbol{y}})dy'$$
$$+\int_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}}\boldsymbol{A}(x,y+\tfrac{\Delta y}{2},z')\bullet\hat{\boldsymbol{z}}dz' + \int_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}}\boldsymbol{A}(x,y-\tfrac{\Delta y}{2},z')\bullet(-\hat{\boldsymbol{z}})dz'$$
$$=\int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}}\left\{y'(z-\tfrac{\Delta z}{2})-y'(z+\tfrac{\Delta z}{2})\right\}dy' + \int_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}}(z'x-z'x)dz' = \int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}}-y'\Delta z dy' = -y\Delta y\Delta z$$
$$\therefore\lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint_{\Delta C}\boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{r} = -y$$

問 46.

(1) $\boldsymbol{\nabla}\bullet\boldsymbol{A}=3$ より、$\displaystyle\iiint_V\boldsymbol{\nabla}\bullet\boldsymbol{A}\,dV = 3\frac{4\pi a^3}{3} = 4\pi a^3$

(2) 面積分をする面はベクトル関数 $\boldsymbol{r}(\theta,\phi)=a\hat{\boldsymbol{r}}$, $0\leqq\theta\leqq\pi, 0\leqq\phi<2\pi$ で表せる。従って、面素ベクトルは $d\boldsymbol{S}=a^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\hat{\boldsymbol{r}}$ となる。また、この面においてベクトル場 $\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A}=a\hat{\boldsymbol{r}}$ となる。従って、$\displaystyle\oiint_S\boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}a\hat{\boldsymbol{r}}\bullet\hat{\boldsymbol{r}}a^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi = 4\pi a^3$

第 2 章 真空中の静電界の法則

問 1.　線電荷を表すベクトル関数は $\boldsymbol{r}_0 = z_0\hat{\boldsymbol{z}}, -\infty < z_0 < \infty$ とおける。従って、$d\boldsymbol{r}_0 = dz_0\hat{\boldsymbol{z}}$, $dr_0 = dz_0$ となる。z_0 における電荷 $\lambda_0 dz_0$ が $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}}+z\hat{\boldsymbol{z}}$ の位置につくる微小な電界 $d\boldsymbol{E}$ は $d\boldsymbol{E} = \dfrac{\lambda_0 dz_0\{x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + (z-z_0)\hat{\boldsymbol{z}}\}}{4\pi\varepsilon_0\{x^2+y^2+(z-z_0)^2\}^{\frac{3}{2}}}$。従って、$\boldsymbol{E} = \displaystyle\int d\boldsymbol{E} = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[(x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz_0}{\{x^2+y^2+(z-z_0)^2\}^{\frac{3}{2}}} + \hat{\boldsymbol{z}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{}{\{x^2}\right.$

二項目は奇関数より、積分結果は 0 となる。結局、$\boldsymbol{E} = \dfrac{\lambda_0(x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}})}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)}$

問 2.　半円を表すベクトル関数は $\boldsymbol{r}_0(\phi_0) = a\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{y}} + a\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{z}}, 0 \leqq \phi_0 \leqq \pi$ となる。従って、$d\boldsymbol{r}_0 = (-\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{y}} + \cos\phi_0\hat{\boldsymbol{z}})a\,d\phi_0$ であり、線素は $dr_0 = a\,d\phi_0$ となる。また、$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0 = x\hat{\boldsymbol{x}} - a\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{y}} - a\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{z}}$ および $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0| = (x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}$ となるので、

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\frac{Q}{\pi a}ad\phi_0(x\hat{\boldsymbol{x}} - a\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{y}} - a\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{z}})}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_0(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\pi}(x\hat{\boldsymbol{x}} - a\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{y}} - a\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{z}})d\phi_0$$

$$= \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_0(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}(x\hat{\boldsymbol{x}}[\phi_0]_0^{\pi} + a\hat{\boldsymbol{z}}[\cos\phi_0]_0^{\pi}) = \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_0(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}(\pi x\hat{\boldsymbol{x}} - 2a\hat{\boldsymbol{z}})$$

問 3. 面を表すベクトル関数は $\boldsymbol{r}_0 = r_0\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} + r_0\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{y}}, 0 \leqq r_0 \leqq a, 0 \leqq \phi_0 < 2\pi$ と書ける。面素ベクトルは $\partial_{r_0}\boldsymbol{r}_0 = (\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi_0\hat{\boldsymbol{y}})dr_0, \partial_{\phi_0}\boldsymbol{r}_0 = r_0(-\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi_0\hat{\boldsymbol{y}})d\phi_0$ より、$d\boldsymbol{S}_0 = \partial_{r_0}\boldsymbol{r}_0\times\partial_{\phi_0}\boldsymbol{r}_0 = r_0dr_0d\phi_0\hat{\boldsymbol{z}}$ となる。従って、面素はその大きさから、$dS_0 = r_0\,dr_0\,d\phi_0$ で与えられる。この面素に含まれる電荷 σdS_0 が $\boldsymbol{r} = z\hat{\boldsymbol{z}}$ につくる電界 $d\boldsymbol{E}$ は $d\boldsymbol{E} = \dfrac{\sigma r_0dr_0d\phi_0(z\hat{\boldsymbol{z}} - r_0\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} - r_0\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{y}})}{(r_0^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

となる。従って、

$$\boldsymbol{E} = \int d\boldsymbol{E} = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{\sigma r_0(z\hat{\boldsymbol{z}} - r_0\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} - r_0\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{y}})}{4\pi\varepsilon_0(r_0^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dr_0\,d\phi_0 = \frac{\sigma z\hat{\boldsymbol{z}}}{2\varepsilon_0}\int_0^{a}\frac{r_0dr_0}{(r_0^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma z\hat{\boldsymbol{z}}}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)$$

問 4. 電荷が分布する面を表すベクトル関数は $\boldsymbol{r}_0(\phi_0, z_0) = a\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} + a\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{y}} + z_0\hat{\boldsymbol{z}} = a\hat{\boldsymbol{\rho}}(\phi_0) + z_0\hat{\boldsymbol{z}}, 0 \leqq \phi_0 < 2\pi, -\frac{h}{2} \leqq z_0 \leqq \frac{h}{2}$ と書ける。従って、$\partial_{\phi 0}\boldsymbol{r}_0 = (-\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi_0\hat{\boldsymbol{y}})a\,d\phi_0 = \hat{\boldsymbol{\phi}}(\phi_0)a\,d\phi_0$、$\partial_{z_0}\boldsymbol{r}_0 = dz_0\hat{\boldsymbol{z}}$ より、$d\boldsymbol{S}_0 = \partial_{\phi}\boldsymbol{r}_0\times\partial_{z0}\boldsymbol{r}_0 = \hat{\boldsymbol{\phi}}(\phi_0)\times\hat{\boldsymbol{z}}a\,d\phi_0dz_0 = \hat{\boldsymbol{\rho}}(\phi_0)a\,d\phi_0dz_0$ であり、この大きさから $dS_0 = |d\boldsymbol{S}_0| = a\,d\phi_0\,dz_0$ となる。また、$\boldsymbol{r} = z\hat{\boldsymbol{z}}$, $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0 = -a\hat{\boldsymbol{\rho}}(\phi_0) + (z-z_0)\hat{\boldsymbol{z}}$, $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0| = \{a^2+(z-z_0)^2\}^{\frac{1}{2}}$ より、

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{Q}{2\pi ah}a\,d\phi_0\,dz_0\{-a\boldsymbol{\rho}(\phi_0) + (z-z_0)\hat{\boldsymbol{z}}\}}{\{a^2+(z-z_0)^2\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h}\hat{\boldsymbol{z}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{z-z_0}{\{a^2+(z-z_0)^2\}^{\frac{3}{2}}}dz_0$$

$$= \frac{Q\hat{\boldsymbol{z}}}{4\pi\varepsilon_0 h}\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+(z-\frac{h}{2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+(z+\frac{h}{2})^2}}\right\}$$

問 5. 電荷が分布する面を表すベクトル関数は以下で与えられる。

$$\boldsymbol{r}_0(\theta_0, \phi_0) = a\sin\theta_0\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} + a\sin\theta_0\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{y}} + a\cos\theta_0\hat{\boldsymbol{z}} = a\hat{\boldsymbol{r}}(\theta_0, \phi_0),$$
$$0 \leqq \theta \leqq \pi, \quad 0 \leqq \phi_0 < 2\pi$$

観測点は $\boldsymbol{r} = z\hat{\boldsymbol{z}}$。面素は $dS_0 = |d\boldsymbol{S}_0| = |\partial_{\theta_0}\boldsymbol{r}_0\times\partial_{\phi_0}\boldsymbol{r}_0| = a^2\sin\theta_0\,d\theta_0\,d\phi_0$

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0 = -a\sin\theta_0\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} - a\sin\theta_0\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{y}} + (z - a\cos\theta_0)\hat{\boldsymbol{z}}$$
$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0| = (a^2+z^2-2az\cos\theta_0)^{\frac{1}{2}}$$

従って、クーロンの法則から以下の積分となる。

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\frac{Q}{4\pi a^2}a^2\sin\theta_0\,d\theta_0d\phi_0\{-a\sin\theta_0\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} - a\sin\theta_0\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{y}} + (z-a\cos\theta_0)\hat{\boldsymbol{z}}\}}{(a^2+z^2-2az\cos\theta_0)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{z}}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta_0(z-a\cos\theta_0)}{(a^2+z^2-2az\cos\theta_0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\hat{\boldsymbol{z}}$$

最後の積分は ϕ_0 の積分を先に行うことで x, y 成分が消える。z 成分は $a^2+z^2-2az\cos\theta_0 = t$ と変数変換すれば計算ができる。

問 6. 電界は $\boldsymbol{E} = \dfrac{Q(x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}})}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ となる。

側面の積分について考える。面を表すベクトル関数は $\boldsymbol{r}(\phi, z) = a\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + a\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}} = a\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$, $0 \leqq \phi < 2\pi, -\frac{h}{2} \leqq z \leqq \frac{h}{2}$ となるので、面素ベクトルは $d\boldsymbol{S} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\, d\phi\, dz = a\boldsymbol{\phi} \times \hat{\boldsymbol{z}}\, d\phi\, dz = \hat{\boldsymbol{\rho}}\, a\, d\phi\, dz$ となる。従って、

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{a\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\boldsymbol{z}}}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \bullet \hat{\boldsymbol{\rho}}\, a\, d\phi\, dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{a^2\, d\phi\, dz}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Qa^2}{2\varepsilon_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{dz}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \frac{h}{\sqrt{h^2+4a^2}}$$

上面については $\boldsymbol{r}(\rho, \phi) = \rho\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \rho\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{h}{2}\hat{\boldsymbol{z}} = \rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{h}{2}\hat{\boldsymbol{z}}$, $0 \leqq \phi < 2\pi, 0 \leqq \rho \leqq a$ と表せる。面素ベクトルは $d\boldsymbol{S} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\, d\rho\, d\phi = \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \rho\hat{\boldsymbol{\phi}}\, d\rho\, d\phi = \hat{\boldsymbol{z}}\rho\, d\rho\, d\phi$ となる。従って、

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{h}{2}\hat{\boldsymbol{z}}}{(\rho^2+\frac{h^2}{4})^{\frac{3}{2}}} \bullet \hat{\boldsymbol{z}}\, \rho\, d\rho\, d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{h}{2} \frac{\rho\, d\rho\, d\phi}{(\rho^2+\frac{h^2}{4})^{\frac{3}{2}}} = \frac{Qh}{4\varepsilon_0} \int_0^a \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+\frac{h^2}{4})^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{4a^2+h^2}}\right)$$

下面は対称性から上面と同じ。従って、閉曲面全体にわたる積分は

$$\oiint_S \boldsymbol{E} \bullet d\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\left\{\frac{h}{\sqrt{h^2+4a^2}} + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{2\sqrt{4a^2+h^2}}\right)\right\} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

問 7. 点電荷の位置 $\boldsymbol{r}_0 = 2a\hat{\boldsymbol{z}}$、球面は $\boldsymbol{r} = a\{\sin\theta(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}) + \cos\theta\hat{\boldsymbol{z}}\}$, $0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \phi < 2\pi$ と表せる。従って、$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = a\{\sin\theta(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}) + (\cos\theta - 2)\hat{\boldsymbol{z}}\}$, $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| = a\{\sin^2\theta + \cos^2\theta - 4\cos\theta + 4)^{\frac{1}{2}} = a(5 - 4\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$ である。また面素ベクトルは $d\boldsymbol{S} = a^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\hat{\boldsymbol{r}}$ となる。電界は $\boldsymbol{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^3}$ より、

$$\oiint_S \boldsymbol{E} \bullet d\boldsymbol{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{a\{\sin\theta(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}) + (\cos\theta - 2)\hat{\boldsymbol{z}}\}}{a^3(5 - 4\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \bullet \hat{\boldsymbol{r}} a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta - 2\cos\theta}{(5 - 4\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{Q}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{1 - 2\cos\theta}{(5 - 4\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta\, d\theta = 0$$

問 8. 解答例

(1) 半径 a [m] 内に均一に分布した電荷がつくる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

① 球の中心を原点にとる　②r 成分が θ, ϕ に依存しない。(ρ, z 成分が ϕ に依存しない)
③θ, ϕ 成分が 0　④ 可能。球の中心を中心とする球面。

(2) 無限長直線状に均一に分布した線電荷がつくる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

① 直線上の電荷を z 軸にとる。　②ρ 成分が ϕ, z に依存しない。(r 成分が ϕ に依存しない、x, y 成分が z に依存しない)　③ϕ, z 成分が 0　④ 可能。z 軸を軸とする円筒の表面。

(3) 有限長直線状に均一に分布した線電荷がつくる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

① 直線を z 軸上に、中央を原点にとる。　②ρ, z 成分が ϕ に依存しない。(r, θ 成分が ϕ に依存しない)　③ϕ 成分が 0　④ 不可能

(4) 半径 a [m] の円周状に均一に分布した線電荷がつくる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

① 円の中心を原点、円を xy 平面にとる。　②ρ, z 成分が ϕ に依存しない。(r, θ 成分が ϕ に依存しない)　③ϕ 成分が 0　④ 不可能

(5) 半径 a [m] の円盤状に均一に分布した面電荷がつくる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

① 円の中心を原点、円を xy 平面にとる。　②ρ, z 成分が ϕ に依存しない。(r, θ 成分が ϕ に依存しない)　③ϕ 成分が 0　④ 不可能

(6) 無限平板状に均一に分布した面電荷がつくる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

① 平板を xy 平面にとる　②z 成分が x, y に依存しない (結果的には z にも依存しない)。(z 成分が ρ, ϕ に依存しない。結果的には z にも依存しない。) (r, θ 成分が ϕ に依存しない。)

③x, y 成分が 0。(ρ, ϕ 成分が 0)　　④ 可能。軸を z 方向に持つ柱状の閉曲面で、高さの半分が $z = 0$

(7) 一辺 a [m] の立方体内に均一に分布した電荷がつくる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

①(どの座標系でも計算できる座標系はないが、解析するとすれば、原点を立方体の中心にし、各面を x, y, z 座標に垂直となるようにとる)　　② 座標に依存しない成分はない。　　③ なし　　④ 不可能

(8) 半径 a [m]、高さ h [m] の円柱内に均一に分布した電荷がつくる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

① 軸を z 軸にし、中央を原点にとる。　　②ρ, z 成分が ϕ に依存しない。(r, θ 成分が ϕ に依存しない)　　③ϕ 成分が 0　　④ 不可能

(9) 半径 a [m] の球状に分布した電荷で、その半球は正電荷が均一に分布しており、もう半球は負電荷が均一に分布しているときにできる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$
(正負の電荷の絶対値は同じものとする)

① 中心を原点。半球の境界を xy 平面にとる。　　②r, θ 成分が ϕ に依存しない。(ρ, z 成分が ϕ に依存しない)　　③ϕ 成分が 0　　④ 不可能

問 9. $r \leqq a$ のとき $\boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{E} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{4x}{\varepsilon_0} + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{4y}{\varepsilon_0} + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{4z}{\varepsilon_0} = \dfrac{12}{\varepsilon_0}$ より $\rho = 12$

$r \geqq a$ のとき $\boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{E} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{4a^3x}{\varepsilon_0 r^3} + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{4a^3y}{\varepsilon_0 r^3} + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{4a^3z}{\varepsilon_0 r^3} = \dfrac{4a^3}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{3}{r^3} + x\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{r^3} + y\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{r^3} + z\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{1}{r^3}\right)$
$= \dfrac{4a^3}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{3}{r^3} - 3\dfrac{x^2}{r^5} - 3\dfrac{y^2}{r^5} - 3\dfrac{z^2}{r^5}\right) = \dfrac{4a^3}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{3}{r^3} - 3\dfrac{r^2}{r^5}\right) = 0$ より $\rho = 0$

問 10. 線電荷を軸とする、長さ l、半径 ρ の円筒面でガウスの法則を適用する。

$$2\pi\rho l E(\rho) = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda l, \qquad \therefore E(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}$$

問 11. 電荷分布の中心軸と同じ中心軸の、長さ l、半径 ρ の円筒面でガウスの法則を適用する。

$$\begin{cases} 2\pi\rho l E(\rho) = \frac{1}{\varepsilon_0}2\pi a\sigma l, \qquad \therefore E(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}, & (\rho \geqq a) \\ 2\pi\rho l E(\rho) = 0, \qquad \therefore E(\rho) = 0 & (\rho < a) \end{cases}$$

問 12.

(1) このとき、内側の導体表面に電荷 Q が一様に分布し、外側の導体の内側表面に一様に $-Q$、外側の導体の外側表面に一様に Q の電荷が分布する。以上をもとにガウスの法則を利用すると以下となる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{0}, & r &< a_1 \\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, & a_1 &\leqq r < a_2 \\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{0}, & a_2 &\leqq r < a_2' \\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, & r &\geqq a_2' \end{aligned}$$

(2) このとき、外側の導体の外側表面に一様に Q の電荷が分布し、その他の箇所には電荷は現れない。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{0}, & r &< a_2' \\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, & r &\geqq a_2' \end{aligned}$$

問 13. 電荷分布の球の中心から半径 r の球面でガウスの法則を応用する。

$r \leqq a$ のとき、$4\pi r^2 E = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\dfrac{Q}{\frac{4\pi a^3}{3}}\dfrac{4\pi r^3}{3} = \dfrac{r^3}{\varepsilon_0 a^3}Q$ より、$E = \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$

$a < r \leqq b$ のとき、$4\pi r^2 E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ より、$E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$b < r \leqq c$ のとき、$4\pi r^2 E = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\dfrac{-Q}{\frac{4\pi c^3}{3} - \frac{4\pi b^3}{3}}\left(\dfrac{4\pi r^3}{3} - \dfrac{4\pi b^3}{3}\right) + \dfrac{Q}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}\dfrac{c^3 - r^3}{c^3 - b^3}$ より、$E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{c^3 - r^3}{c^3 - b^3}$

$r > c$ のとき、$4\pi r^2 E = 0$ より、$E = 0$

問 14.

(1) $r \leqq a$ のとき、半径 r の球面でガウスの法則を応用すると

$4\pi r^2 E_r = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\, dV = \dfrac{4\pi}{\varepsilon_0}\displaystyle\int_0^r \dfrac{3Q}{\pi a^4}(a - r')r'^2 dr' = \dfrac{Qr^3}{\varepsilon_0 a^4}(4a - 3r)$ となる。従って、

$E_r = \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^4}(4a - 3r)$

$r > a$ のとき、同様にガウスの法則を応用すると、$4\pi r^2 E_r = \dfrac{12Q}{\varepsilon_0 a^4}\displaystyle\int_0^a (a - r')r'^2 dr' = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

となるので、$E_r = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

(2) $r \leqq a$ のとき、$\boldsymbol{E} = E_r\hat{\boldsymbol{r}} = \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^4}(4a - 3r)\hat{\boldsymbol{r}} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^4}(4a - 3r)\boldsymbol{r}$

$r > a$ のとき、$\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}$

(3) $\boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{r} = 3,\ \boldsymbol{\nabla} \bullet r\boldsymbol{r} = 4r,\ \boldsymbol{\nabla} \bullet \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0$ より、

$r \leqq a$ のとき、$\varepsilon_0 \boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{E} = \dfrac{Q}{4\pi a^4}\boldsymbol{\nabla} \bullet (4a\boldsymbol{r} - 3r\boldsymbol{r}) = \dfrac{3Q(a - r)}{\pi a^4}$

$r > a$ のとき、$\varepsilon_0 \boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{E} = \dfrac{Q}{4\pi}\boldsymbol{\nabla} \bullet \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0$

(4) $\boldsymbol{\nabla} \times r\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\nabla} \bullet r^2\hat{\boldsymbol{r}} = \left\{\dfrac{\partial(rz)}{\partial y} - \dfrac{\partial(ry)}{\partial z}\right\}\hat{\boldsymbol{x}} + \left\{\dfrac{\partial(rx)}{\partial z} - \dfrac{\partial(rz)}{\partial x}\right\}\hat{\boldsymbol{y}} + \left\{\dfrac{\partial(ry)}{\partial x} - \dfrac{\partial(rx)}{\partial y}\right\}\hat{\boldsymbol{z}} = \left(\dfrac{y}{r}z - \dfrac{z}{r}y\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \cdots$(略)$\cdots = \boldsymbol{0}$ より、$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^4}(4a\boldsymbol{\nabla} \times r\hat{\boldsymbol{r}} - 3\boldsymbol{\nabla} \times r^2\hat{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{\nabla} \times \dfrac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} = \boldsymbol{0}$ より、$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla} \times \dfrac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} = \boldsymbol{0}$

問 15. ① 無限長電荷がつくる電界は $\boldsymbol{E} = \dfrac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} = \dfrac{\lambda_0(x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}})}{2\pi\varepsilon_0(x^2 + y^2)}$ となる。また、点電荷がつくる電界は $\boldsymbol{E} = \dfrac{Q\{x\hat{\boldsymbol{x}} + (y - a)\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}\}}{4\pi\varepsilon_0\{x^2 + (y - a)^2 + z^2\}^{\frac{3}{2}}}$ となるので、これらを合成して、$\boldsymbol{E} = \dfrac{\lambda_0(x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}})}{2\pi\varepsilon_0(x^2 + y^2)} + \dfrac{Q\{x\hat{\boldsymbol{x}} + (y - a)\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}\}}{4\pi\varepsilon_0\{x^2 + (y - a)^2 + z^2\}^{\frac{3}{2}}}$

② この電荷分布は次の二つの無限長円筒電荷分布の合成と見ることができる。

A) 円筒軸を z 軸とする半径 a の一様な電荷密度 ρ_0 の円筒電荷分布

B) 円筒軸を $d\hat{\boldsymbol{x}}$ とする半径 b の一様な電荷密度 $-\rho_0$ の円筒電荷分布

従って、それぞれの電荷分布がつくる電界をもとめて合成すればよい。

A) $\rho \leqq a$ のとき、ガウスの法則を利用すると $E_\rho = \dfrac{\pi\rho^2\rho_0}{2\pi\rho\varepsilon_0} = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\rho_0 = \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\rho$ となるので、

$\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\dfrac{x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}}}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}})$

$\rho > a$ のとき、ガウスの法則を利用すると $E_\rho = \dfrac{\pi a^2\rho_0}{2\pi\varepsilon_0\rho} = \dfrac{a^2\rho_0}{2\varepsilon_0\rho}$ より、

$\boldsymbol{E} = \dfrac{a^2\rho_0}{2\varepsilon_0}\dfrac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}\dfrac{x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}}}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{a^2\rho_0(x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}})}{2\varepsilon_0(x^2 + y^2)}$

B) 位置 $d\hat{\boldsymbol{x}}$ からの距離を ρ' とする。$\rho\prime < b$ のとき、ガウスの法則を用いて $E_{\rho'} = \dfrac{-\pi\rho'^2\rho_0}{2\pi\varepsilon_0\rho'} = -\dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\rho'$ となる。$\boldsymbol{E} = -\dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\{(x-d)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}\dfrac{(x-d)\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}}}{\{(x-d)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}} = -\dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\{(x-d)\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}}\}$

$\rho' > b$ のとき $E_{\rho'} = \dfrac{-\pi b^2\rho_0}{2\pi\varepsilon_0\rho'} = -\dfrac{b^2\rho_0}{2\varepsilon_0\rho'}$ より、$\boldsymbol{E} = -\dfrac{b^2\rho_0}{2\varepsilon_0}\dfrac{\boldsymbol{\rho}'}{\rho'^2} = -\dfrac{b^2\rho_0\{(x-d)\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}}\}}{2\varepsilon_0\{(x-d)^2+y^2\}}$

従って合成電界は以下の様になる $(x-d)^2+y^2 \leqq b^2$ では、$\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}d\hat{\boldsymbol{x}}$、$(x-d)^2+y^2 > b$ かつ $x^2+y^2 \leqq a^2$ では、$\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left[x\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}} - b^2\dfrac{(x-d)\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}}}{(x-d)^2+y^2}\right]$、$x^2+y^2 > a^2$ では、$\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left\{a^2\dfrac{x\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}}}{x^2+y^2} - b^2\dfrac{(x-d)\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}}}{(x-d)^2+y^2}\right\}$

問 16. ベクトル関数は $\boldsymbol{r} = x'\hat{\boldsymbol{x}}, -\infty < x' \leqq -a$ とおける。このとき、$d\boldsymbol{r} = -dx'\hat{\boldsymbol{x}}$ となる。また、$\boldsymbol{E} = \dfrac{Q(x\hat{\boldsymbol{x}}+y'\hat{\boldsymbol{y}}+z'\hat{\boldsymbol{z}})}{4\pi\varepsilon_0\{x^2+y^2+z^2\}^{\frac{3}{2}}}$ より、この経路上で $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{-x'\hat{\boldsymbol{x}}}{\{x'^2\}^{\frac{3}{2}}}$ となるが、$x' < 0$ より $\{x'^2\}^{\frac{1}{2}} = -x'$ となることを考えると、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{-x'\hat{\boldsymbol{x}}}{-x'^3} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{x'^2}\hat{\boldsymbol{x}}$ である。従って、

$$W = -\int_{-\infty}^{-a}\boldsymbol{E}\bullet d\boldsymbol{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{-a}\frac{1}{x'^2}\hat{\boldsymbol{x}}\bullet(-dx'\hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{-a}\frac{dx'}{x'^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

問 17. 経路のベクトル関数は $\boldsymbol{r} = y\hat{\boldsymbol{y}}+a\hat{\boldsymbol{x}}, -\infty < y \leqq 0$ と書ける。従って、$d\boldsymbol{r} = -dy\hat{\boldsymbol{y}}$ である。従って、

$$W = -\int\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\bullet d\boldsymbol{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{0}\frac{y\hat{\boldsymbol{y}}+a\hat{\boldsymbol{x}}}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\bullet dy\hat{\boldsymbol{y}} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{0}\frac{y}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

問 18. $-\nabla\phi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0\,|}\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0\,|}\right)\hat{\boldsymbol{y}} + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{1}{|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0\,|}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\right\}$ を計算すればよい。例えば x 成分については

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\\ &= -\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right\}^{-\frac{3}{2}}(x-x_0) = -\frac{x-x_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\end{aligned}$$

となる。y, z 成分も同様に計算すれば、

$$-\nabla\phi = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\frac{(x-x_0)\hat{\boldsymbol{x}}+(y-y_0)\hat{\boldsymbol{y}}+(z-z_0)\hat{\boldsymbol{z}}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\right\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}$$

問 19.

(1) $r > a$ のとき、全電荷は $\dfrac{4\pi a^3}{3}\rho_0$ より $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{4\pi a^3}{3}\rho_0 = \dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}$

$r \leqq a$ のとき、ガウスの法則を適用すると、$4\pi r^2 E = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\dfrac{4\pi a^3}{3}\rho_0$ より、$E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{4\pi r^3}{3}\rho_0 = \dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}$

従って、ベクトル表記をすると

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases}\frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{r}}, & (r \leqq a)\\ \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, & (r > a)\end{cases}$$

(2) $r \leqq a$ のとき、

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial x}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{y}} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\right\} = \boldsymbol{0}$$

$r > 0$ のとき

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{r^3}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{r^3}\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{r^3}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{z}{r^3}\right)\hat{\boldsymbol{y}} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{r^3}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{r^3}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\right\}$$

$$= \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\left\{\left(-\frac{3yz}{r^5}+\frac{3zy}{r^5}\right)\hat{\boldsymbol{x}}+\left(-\frac{3zx}{r^5}+\frac{3zx}{r^5}\right)\hat{\boldsymbol{y}}+\left(-\frac{3xy}{r^5}+\frac{3xy}{r^5}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\right\}=\boldsymbol{0}$$

(3) $r>a$ のとき、経路 $\boldsymbol{r}=-s\sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}-s\sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}-s\cos\theta\hat{\boldsymbol{z}}=-s\hat{\boldsymbol{r}},\ -\infty<s\leqq -r$ にわたって積分をする。この経路の線素ベクトルは $d\boldsymbol{r}=-\hat{\boldsymbol{r}}ds$ となるので、

$$\varphi(\boldsymbol{r})=-\int \boldsymbol{E}\bullet d\boldsymbol{r}=-\int_{-\infty}^{-r}\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 s^2}\hat{\boldsymbol{r}}\bullet(-\hat{\boldsymbol{r}})ds=\int_{-\infty}^{r}\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\frac{ds}{s^2}=\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r}$$

$r\leqq a$ のとき、距離 a の点から、さらに経路 $\boldsymbol{r}=(a-s)\hat{\boldsymbol{r}},\ 0\leqq s\leqq a-r$ に沿って距離 r まで運べばよい。このときの線素ベクトルは $d\boldsymbol{r}=-\hat{\boldsymbol{r}}ds$ となるので、

$$\varphi(\boldsymbol{r})=-\int \boldsymbol{E}\bullet d\boldsymbol{r}+\varphi(a\hat{\boldsymbol{r}})=-\int_0^{a-r}\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}(a-s)\hat{\boldsymbol{r}}\bullet(-\hat{\boldsymbol{r}})ds+\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 a}$$
$$=\int_0^{a-r}\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}(a-s)ds+\frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0}=\frac{\rho_0 a^2}{6\varepsilon_0}\left(3-\frac{r^2}{a^2}\right)$$

(4) $r>a$ のとき

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi=\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\left(-\frac{x}{r^3}\hat{\boldsymbol{x}}-\frac{y}{r^3}\hat{\boldsymbol{y}}-\frac{z}{r^3}\hat{\boldsymbol{z}}\right)=\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=-\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

したがって、$-\boldsymbol{\nabla}\varphi=\dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$

$r\leqq a$ のとき

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi=-\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla}r^2=-\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}\left(2r\frac{x}{r}\hat{\boldsymbol{x}}+2r\frac{y}{r}\hat{\boldsymbol{y}}+2r\frac{z}{r}\hat{\boldsymbol{z}}\right)=-\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{r}}=-\frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{r}}$$

したがって、$-\boldsymbol{\nabla}\varphi=\dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{r}}$

(5) $r>a$ のとき、$\boldsymbol{\nabla}^2\varphi=\boldsymbol{\nabla}\bullet(\boldsymbol{\nabla}\varphi)=\boldsymbol{\nabla}\bullet\left(-\dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\right)=-\dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{x}{r^3}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{y}{r^3}+\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{z}{r^3}\right)=0$

$r\leqq a$ のとき、$\boldsymbol{\nabla}^2\varphi=\boldsymbol{\nabla}\bullet\left(-\dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{r}}\right)=-\dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(\dfrac{\partial x}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial z}\right)=-\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}$

問 20. できる電界は $|\boldsymbol{r}|>a$ のとき、$\boldsymbol{E}=\dfrac{Q\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}|^3}$、また $|\boldsymbol{r}|\leqq a$ のとき、$\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{Q}{\frac{4\pi a^3}{3}}\dfrac{4\pi r^3}{3}\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\dfrac{Q\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$ である。

電荷を経路 $\boldsymbol{r}=-s\boldsymbol{r},-\infty<s\leqq -r_0$ に沿って移動する。ここで $|\boldsymbol{r}|=r=|s|=-s$ となるので、$d\boldsymbol{r}=-ds\hat{\boldsymbol{r}}$ となる。従って、$r>a$ のとき、

$\phi(r_0)=-\displaystyle\int \boldsymbol{E}\bullet d\boldsymbol{r}=\int_{-\infty}^{-r_0}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-s\boldsymbol{r}}{-s^3}\bullet(-ds\hat{\boldsymbol{r}})=\int_{-\infty}^{-r_0}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ds}{s^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$ となる。また、$r\leqq a$ のとき、

$\phi(r_0)=-\displaystyle\int \boldsymbol{E}\bullet d\boldsymbol{r}=\phi(a)+\int_{-a}^{-r_0}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}(-s\hat{\boldsymbol{r}})\bullet(-ds\hat{\boldsymbol{r}})=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}-\int_{-a}^{-r_0}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}s\,ds=\frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 a}-\frac{Qr_0^2}{8\pi\varepsilon_0 a^3}$

問 21. $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1=(x-\frac{d}{2})\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2=(x+\frac{d}{2})\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}}$ となるので、ポテンシャルは

$\varphi(\boldsymbol{r})=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left\{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2\right\}^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left\{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$ と求められる。ここで、

$$\left\{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2\right\}^{-\frac{1}{2}}=\left(x^2+y^2-xd+\frac{d^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(r^2-xd+\frac{d^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{r}\left\{1-\frac{x}{r}\frac{d}{r}+\left(\frac{d}{2r}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\approx\frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{2}\left\{-\frac{x}{r}\frac{d}{r}+\left(\frac{d}{2r}\right)^2\right\}\right]\approx\frac{1}{r}+\frac{xd}{2r^3}$$

と近似できる。また、同様に $\left\{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r}-\frac{xd}{2r^3}$ と近似できる。従って、ポテンシャルは

$$\varphi \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left(\frac{1}{r}+\frac{xd}{2r^3}\right)-\left(\frac{1}{r}-\frac{xd}{2r^3}\right)\right\}=\frac{(Qd)x}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

問 22. $\boldsymbol{p}=p_x\hat{\boldsymbol{x}}+p_y\hat{\boldsymbol{y}}+p_z\hat{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{r}=x\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}}+z\hat{\boldsymbol{z}}$ とすると $r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$ より、$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{\boldsymbol{p}\bullet\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_x x+p_y y+p_z z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ となる。例えば、x 方向の微分は

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{p_x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{p}\bullet\boldsymbol{r}2x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right\}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left\{p_x-3\frac{(\boldsymbol{p}\bullet\boldsymbol{r})x}{r^2}\right\}$$

従って、x,y,z 方向の微分から

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\nabla}\varphi=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left\{p_x\hat{\boldsymbol{x}}+p_y\hat{\boldsymbol{y}}+p_z\hat{\boldsymbol{z}}-3\frac{(\boldsymbol{p}\bullet\boldsymbol{r})}{r^2}(x\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}}+z\hat{\boldsymbol{z}})\right\}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left\{-p+3\frac{(\boldsymbol{p}\bullet\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^2}\right\}$$

（別解）ダイポール z 方向としたときの、球座標系も利用して考える。$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ と書けるので

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{\nabla}\varphi&=-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)=\frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{\boldsymbol{\theta}}=\frac{pr\cos\theta r\hat{\boldsymbol{r}}}{2\pi\varepsilon_0 r^5}+\frac{p(\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}}-\hat{\boldsymbol{z}})}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\\&=\frac{-p\hat{\boldsymbol{z}}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}+\frac{2(\boldsymbol{p}\bullet\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}+(\boldsymbol{p}\bullet\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\end{aligned}$$

問 23. できる電界の強さは $r\leqq a$ で $E=\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$、$r>a$ で $E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ となる。エネルギー密度 w [J/m^3] は、$w=\frac{\varepsilon_0}{2}E^2$ より、$r\leqq a$ で $w=\frac{Q^2r^2}{32\pi^2\varepsilon_0 a^6}$、$r>a$ で $w=\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$ となる。これを積分すればよいので、$\int_0^a\frac{Q^2r^2}{32\pi^2\varepsilon_0 a^6}4\pi r^2\,dr+\int_a^\infty\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}4\pi r^2\,dr=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a}$

第 3 章 導体と静電容量

問 1. 平行平板コンデンサの静電容量は $C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$ で与えられる。

(1) $\frac{1}{2}CV^2=\frac{Q^2}{2C}=\frac{Q^2d}{2\varepsilon_0 S}$

(2) 電界の大きさを E は、$E=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{S}$ で与えられる。電界の大きさは電極間で一定なので、エネルギー密度 $\frac{\varepsilon_0}{2}E^2$ に体積をかければよい。$\frac{\varepsilon_0}{2}E^2V=\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0^2S^2}Sd=\frac{Q^2d}{2\varepsilon_0 S}$

問 2. 導体間にできる電界は $\boldsymbol{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$ で与えられる。ここで、r は球の中心からの距離、$\hat{\boldsymbol{r}}$ は径方向の単位ベクトルである。

(1) $C=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}}$, $\quad\frac{1}{2}CV^2=\frac{Q^2}{2C}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)$

(2) $E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ より、$w=\frac{\varepsilon_0}{2}E^2=\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}, W=\iiint w\,dV=\int_{a_1}^{a_2}\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}4\pi r^2\,dr=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)$

(3) 導体間の距離を $d = a_2 - a_1$ とおく。

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 a_1 a_2}{a_2 - a_1} = \frac{4\pi\varepsilon_0 a_1(a_1 + d)}{a_2 - a_1} = \frac{4\pi\varepsilon_0 a_1^2}{d}\left(1 + \frac{d}{a_1}\right) \approx \frac{4\pi\varepsilon_0 a_1^2}{d}$$

導体の表面積は $S = 4\pi a_1^2$ より、$C \approx \dfrac{\varepsilon S}{d}$ となる。

問 3. まず電界を求める。導体 A の電荷が x 軸上につくる電界は $+x$ 方向を正にとると、ガウスの法則を応用して $x > a$ において $2\pi x E_A = \dfrac{\lambda}{\varepsilon_0}$ より $E_A = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$ となる。同様に導体 B の電荷が x 軸上につくる電界は $x < b - a$ において $2\pi(b - x)E_B = \dfrac{\lambda}{\varepsilon_0}$ より、$E_B = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(b - x)}$ となる。従って、全電界 $\boldsymbol{E}$ は $a < x < b - a$ において $\boldsymbol{E} = (E_A + E_B)\hat{\boldsymbol{x}} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{b - x}\right)\hat{\boldsymbol{x}}$ となる。(電荷分布が導体表面に一様という仮定がなければ上記のようには求められないことに注意する。)

次に、導体間の電位差を求める。経路を $\boldsymbol{r} = (b - t)\hat{\boldsymbol{x}}, (a \leqq t \leqq b - a)$, 従って $d\boldsymbol{r} = -dt\hat{\boldsymbol{x}}$。

$$V = -\int_a^{b-a} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b - t} + \frac{1}{t}\right)\hat{\boldsymbol{x}} \bullet (-dt\hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^{b-a}\left(\frac{1}{b - t} + \frac{1}{t}\right)dt = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\log\frac{b - a}{a}\left(\approx \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\log\frac{b}{a}\right)$$

$$\therefore C = \frac{\lambda}{V} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\log\frac{b-a}{a}}\left(\approx \frac{\pi\varepsilon_0}{\log\frac{b}{a}}\right)$$

問 4.

(1) $v = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$

(2) $dw = v\,dq = q4\pi\varepsilon_0 a dq$

(3) $W = \displaystyle\int dw = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_0^Q q\,dq = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$

(4) $C = 4\pi\varepsilon_0 a$ より $W = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$

問 5. 導体 A に $+Q$、導体 B に $-Q$ の電荷を与え、この電荷によってできる電界を求めて、そこから両導体間の電位差を導出する。$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}}, (a < x < d - b)$ における電界は $\boldsymbol{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\hat{\boldsymbol{x}} + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0(d - x)^2}\hat{\boldsymbol{x}}$ より、$V = -\displaystyle\int_B^A \boldsymbol{E} \bullet d\boldsymbol{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d - a} - \frac{1}{d - b} + \frac{1}{b}\right)$ となる。従って、

$$\therefore C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{d-a} - \frac{1}{d-b} + \frac{1}{b}} \approx \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d}}$$

別解 1) 導体 A, B にそれぞれ $Q, -Q$ の電荷を与えたときの電位は、近似的に $V_A = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0(d - a)}$, $V_B = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0(d - b)}$ となる[1]。従って、$C = \dfrac{Q}{V_A - V_B} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{d-a} - \frac{1}{d-b} + \frac{1}{b}}$

別解 2) 導体 A, B にそれぞれ Q_A, Q_B 与えたときの電位を V_A, V_B とする。$Q_B = 0$ のとき、$V_A = \dfrac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 a}, V_B = \dfrac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0(d - b)}$, となる。同様に $Q_A = 0$ のときも考えると、

$$\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0(d-a)} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0(d-b)} & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 b} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} Q_A \\ Q_B \end{bmatrix}$$

と書ける。$Q_A = Q, Q_B = -Q$ として V_A, V_B を求めて、$C = \dfrac{Q}{V_A - V_B} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{d-a} - \frac{1}{d-b} + \frac{1}{b}}$

問 6. 導体 1, 2 の電位をそれぞれ V_1, V_2、電荷を Q_1, Q_2 とし、電位係数とこれらの関係を次のように書く。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

[1] $V_A = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d}$ などとしても可

(1) 導体 1 に Q、導体 2 に 0 の電荷を与えたとき、$V_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} = p_{11}Q, V_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d} = p_{21}Q$ より、$p_{11} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}, p_{21} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}$ となる。また、$p_{12} = p_{21}$ より、$p_{12} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}$ となる。

(2) 導体 1 が接地されているので $V_1 = 0$、また $Q_2 = Q$ より、$0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}Q_1 + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}Q$ となるので、これを Q_1 について解くと $Q_1 = -\dfrac{a}{d}Q$

第 4 章 誘電体

問 1. $\boldsymbol{D}_1 = 5\varepsilon_0\boldsymbol{E}_1 = \varepsilon_0(10\hat{\boldsymbol{y}} + 15\hat{\boldsymbol{z}})$ となる。$\boldsymbol{E}_2 = E_{2y}\hat{\boldsymbol{y}} + E_{2z}\hat{\boldsymbol{z}}$, $\boldsymbol{D}_2 = D_{2y}\hat{\boldsymbol{y}} + D_{2z}\hat{\boldsymbol{z}}$ とおくと $E_{2y} = E_{1y} = 2$, $D_{2z} = D_{1z} = 15\varepsilon_0$ となる。また、$D_{2y} = 3\varepsilon_0 E_{2y} = 6\varepsilon_0$, $E_{2z} = \dfrac{D_{2z}}{3\varepsilon_0} = 5$ である。従って、$\boldsymbol{E}_2 = 2\hat{\boldsymbol{y}} + 5\hat{\boldsymbol{z}}$, $\boldsymbol{D}_2 = \varepsilon_0(6\hat{\boldsymbol{y}} + 15\hat{\boldsymbol{z}})$

問 2. $E_1 = |\boldsymbol{E}_1|, E_2 = |\boldsymbol{E}_2|$ とする。電界の接線成分が連続なので $E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$ であり、電束密度の法線成分が連続なので $\varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\theta_2$ である。辺々割ると $\dfrac{1}{\varepsilon_1}\tan\theta_1 = \dfrac{1}{\varepsilon_2}\tan\theta_2$ を得る。

問 3. $\boldsymbol{D}_2 = \varepsilon_0\boldsymbol{E}_2 = 2\varepsilon_0\hat{\boldsymbol{x}} - 3\varepsilon_0\hat{\boldsymbol{y}}$

xy 平面内の単位接線ベクトルは $\hat{\boldsymbol{t}} = \dfrac{\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}}{\sqrt{2}}$ で与えられる。また法線ベクトルは $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{t}} \times \hat{\boldsymbol{z}} = \dfrac{\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}}}{\sqrt{2}}$ と書ける。

ε_2 側の電界 $\boldsymbol{E}_2$ の接線成分、電束密度 $\boldsymbol{D}_2$ の法線成分は $E_{2t} = \boldsymbol{E}_2 \bullet \hat{\boldsymbol{t}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, D_{2n} = \boldsymbol{D}_2 \bullet \hat{\boldsymbol{n}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}}\varepsilon_0$ となる。ε_2 側の電界 $\boldsymbol{E}_1$、電束密度 $\boldsymbol{D}_1$ は接線成分と法線成分を用いて書くと $\boldsymbol{E}_1 = E_{1n}\hat{\boldsymbol{n}} + E_{1t}\hat{\boldsymbol{t}}, \boldsymbol{D}_1 = D_{1n}\hat{\boldsymbol{n}} + D_{1t}\hat{\boldsymbol{t}}$ となる。ここで境界条件より $D_{1n} = D_{2n}, E_{1t} = D_{2t}$ である。また、$E_{1n} = D_{1n}/\varepsilon_1, D_{1t} = \varepsilon_1 E_{1t}$ より、

$$\boldsymbol{D}_1 = \varepsilon_0\frac{5}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{n}} + 5\varepsilon_0 E_{1t}\hat{\boldsymbol{t}} = \varepsilon_0\frac{5}{\sqrt{2}}\frac{\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}}}{\sqrt{2}} - \varepsilon_0\frac{5}{\sqrt{2}}\frac{\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}}{\sqrt{2}} = -5\varepsilon_0\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{D_{1n}}{5\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{n}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{t}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}}{\sqrt{2}} = -\hat{\boldsymbol{y}}$$

問 4.

(1) 電位差 V を与えて電荷 Q が蓄えられたとすると $D = \dfrac{Q}{S}, E_2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_2 S}, E_1 = \dfrac{Q}{\varepsilon_1 S}$ となる。従って、$V = E_1 t + E_2(d-t) = \left(\dfrac{t}{\varepsilon_1} + \dfrac{d-t}{\varepsilon_2}\right)\dfrac{Q}{S}$ より、$C = \dfrac{Q}{V} = S\left(\dfrac{t}{\varepsilon_1} + \dfrac{d-t}{\varepsilon_2}\right)^{-1}$ となるので、単位面積当たりの静電容量 C_0 は $C_0 = \dfrac{C}{S} = \left(\dfrac{t}{\varepsilon_1} + \dfrac{d-t}{\varepsilon_2}\right)^{-1} = \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2 t + \varepsilon_1(d-t)}$

(2) $0 \leqq z \leqq t$ では $V(z) = E_1 z = \dfrac{Q}{\varepsilon_1 S}z = \dfrac{CV_0}{\varepsilon_1 S}z = \dfrac{V_0}{\varepsilon_1}C_0 z = \dfrac{\varepsilon_2 V_0}{\varepsilon_2 t + \varepsilon_1(d-t)}z$ となる。

$t < z \leqq d$ では $V(z) = V(t) + E_2(z-t) = V(t) + \dfrac{CV_0}{\varepsilon_2 S}(z-t) = \dfrac{\varepsilon_2 V_0}{\varepsilon_2 t + \varepsilon_1(d-t)}t + \dfrac{\varepsilon_1 V_0}{\varepsilon_2 t + \varepsilon_1(d-t)}(z-t) = \dfrac{\varepsilon_2 t + \varepsilon_1(z-t)}{\varepsilon_2 t + \varepsilon_1(d-t)}V_0$

問 5.

(1) 長さ L の円筒面に対してガウスの法則を応用すると、電束密度の大きさを D として $2\pi\rho D = \frac{Q}{L}$ より $D = \dfrac{Q}{2\pi\rho L}$

(2) 電界の大きさを E とすると、$a \leqq \rho < b$ では $E = \dfrac{D}{\varepsilon_1} = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_1\rho L}$、$b \leqq \rho < c$ では $E = \dfrac{D}{\varepsilon_2} = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_2\rho L}$

(3) 二導体間の電位差を V とすると $V = \displaystyle\int_a^b E\,d\rho + \int_b^c E\,d\rho = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 L}\log\frac{b}{a} + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_2 L}\log\frac{c}{b}$ より、$C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{2\pi L}{\frac{1}{\varepsilon_1}\log\frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2}\log\frac{c}{b}}$

(4) $a \leqq \rho < b$ において分極ベクトルの大きさ P_1 は $P_1 = D - \varepsilon_0 E = \dfrac{Q}{2\pi\rho L} - \dfrac{\varepsilon_0 Q}{2\pi\varepsilon_1\rho L} = \dfrac{Q}{2\pi\rho L}\dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1}$ となる。また、$b \leqq \rho < c$ における分極ベクトルの大きさ P_2 は、同様に $P_2 = \dfrac{Q}{2\pi\rho L}\dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_2}$ である。$\displaystyle\oiint \boldsymbol{P}\bullet d\boldsymbol{S} = \iint \sigma_p dS$ より $\sigma_p = (-P_2 + P_1)|_{\rho=b} = \dfrac{Q}{2\pi bL}\left(-\dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_2} + \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right) = \dfrac{Q}{2\pi bL}\left(\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)$

問 6.

(1) 電荷 Q_0 が蓄えられたときにできる電界はガウスの法則の応用から $E = \dfrac{Q_0}{2\pi\rho\varepsilon_0 L}$ となるので、導体間の電位差 V_0 は $V_0 = \dfrac{Q_0}{2\pi\varepsilon_0 L}\displaystyle\int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{Q_0}{2\pi\varepsilon_0 L}\log\frac{b}{a}$ と書ける。従って、$Q_0 = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 L}{\log\frac{b}{a}}V_0$

(2) 内導体の真空に接する導体表面に現れる面電荷密度を σ_0、誘電体部の導体表面に現れる面電荷密度を σ_d とおく。真空部分の電束密度 D_0 はガウスの法則を応用して $2\pi\rho D_0(L-x) = 2\pi a\sigma_0(L-x)$ から $D_0 = \dfrac{a\sigma_0}{\rho}$ と求められる。同様に、誘電体部の電束密度 D_d は $D_d = \dfrac{a\sigma_d}{\rho}$ となる。電界は誘電体と真空の境界面に平行なので、境界条件から真空部分の電界 E_0 と誘電体部分の電界 E_d は等しい。従って、$E_0 = \dfrac{a\sigma_0}{\varepsilon_0\rho} = E_d = \dfrac{a\sigma_d}{\varepsilon_r\varepsilon_0\rho}$ となるので、$\sigma_0 = \dfrac{\sigma_d}{\varepsilon_r}$ が言える。

導体表面の全電荷 Q_0 で不変なので $2\pi a(L-x)\sigma_0 + 2\pi ax(\varepsilon_r\sigma_0) = Q_0$ が言える。従って、$\sigma_0 = \dfrac{Q_0}{2\pi a\{L + (\varepsilon_r - 1)x\}}$

電位差 V は $V = \displaystyle\int_a^b \frac{a\sigma_0}{\varepsilon_0}\frac{d\rho}{\rho} = \frac{a\sigma_0}{\varepsilon_0}\log\frac{b}{a} = \frac{Q_0\log ba}{2\pi\varepsilon_0\{L + (\varepsilon_r - 1)x\}} = \frac{L}{L + (\varepsilon_r - 1)x}V_0$

(3) 上の設問の解答において $V = \dfrac{Q_0\log ba}{2\pi\varepsilon_0\{L + (\varepsilon_r - 1)x\}}$ より、$C = \dfrac{Q_0}{V} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\{L + (\varepsilon_r - 1)x\}}{\log\frac{b}{a}}$ となる。また、設問 (1) より $V_0 = \dfrac{Q_0}{2\pi\varepsilon_0 L}\log\dfrac{b}{a}$ なので、$Q = CV_0 = \dfrac{L + (\varepsilon_r - 1)x}{L}Q_0$

(4) 静電容量は $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\{L + (\varepsilon_r - 1)x\}}{\log\frac{b}{a}}$ より、エネルギー U は $U = \dfrac{1}{2}CV_0^2 = V_0^2\dfrac{\pi\varepsilon_0\{L + (\varepsilon_r - 1)x\}}{\log\frac{b}{a}}$ となる。Δx だけ変えたときのエネルギー $U + \Delta U$ は $U + \Delta U = V_0^2\dfrac{\pi\varepsilon_0\{L + (\varepsilon_r - 1)(x + \Delta x)\}}{\log\frac{b}{a}}$ となるので、$\Delta U = V_0^2\dfrac{\pi\varepsilon_0\{L + (\varepsilon_r - 1)\Delta x\}}{\log\frac{b}{a}}$。従って、$F = V_0^2\dfrac{\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\log\frac{b}{a}}$

問 7.

(1) $\boldsymbol{D}_1 = \varepsilon_0\boldsymbol{E}_1 = 100\varepsilon_0\hat{\boldsymbol{y}}$

(2) $\boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{D}_1 = 100\varepsilon_0\hat{\boldsymbol{y}}$

(3) $\boldsymbol{E}_2 = \dfrac{1}{10\varepsilon_0}\boldsymbol{D}_2 = 10\hat{\boldsymbol{y}}$

(4) $\boldsymbol{D}_2 = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{P}$ より、$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}_2 - \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_2 = 90\varepsilon_0 \hat{\boldsymbol{y}}$

(5) $-\oiint \boldsymbol{P} \bullet d\boldsymbol{S} = \sigma_P S, \sigma_P = \pm 90\varepsilon_0$

(6) ガウスの法則から $\oiint \boldsymbol{D} \bullet d\boldsymbol{S} = \iint \sigma\, dS$ より、$\sigma = 100\varepsilon_0$。従って、$Q = \sigma S = 100\varepsilon_0 S$ となる。$V = 100d + 10 \cdot 3d = 130d$ より、$C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{100\varepsilon_0 S}{130d} = \dfrac{40}{13}\dfrac{\varepsilon_0 S}{4d}$ となる。従って、$\dfrac{40}{13}$ 倍

問 8.

(1) $E_1 = \dfrac{V}{d} = E_2, D_1 = \varepsilon_0 E_1 = \dfrac{\varepsilon_0 V}{d}, D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{V}{d} = 5\dfrac{\varepsilon_0 V}{d}$

(2) $\sigma_1 = D_1 = \dfrac{\varepsilon_0 V}{d}, \sigma_2 = D_2 = 5\dfrac{\varepsilon_0 V}{d}$

(3) 極板に蓄えられる電荷を Q とすると $Q = \dfrac{S}{3}\sigma_2 + \dfrac{2S}{e}\sigma_1 = \dfrac{5}{3}\dfrac{\varepsilon_0 V}{d}S + \dfrac{2}{3}\dfrac{\varepsilon_0 V}{d}S = \dfrac{7}{3}\dfrac{\varepsilon_0 V}{d}S$ となる。従って、$C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{7}{3}\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

問 9. 電荷 Q を蓄えたとき、電極間にできる電束密度の大きさ D は $D = \frac{Q}{S}$ より、電界の大きさは真空中で $E_0 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$、誘電体中で $E_d = \dfrac{Q}{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}$ となる。電極間の電位差は $V = E_0 \dfrac{d}{2} + E_d \dfrac{d}{2} = \dfrac{Qd}{2\varepsilon_0 S} + \dfrac{Qd}{2\varepsilon_r \varepsilon_0 S} = \dfrac{Qd}{2\varepsilon_0 S}\left(1 + \dfrac{1}{\varepsilon_R}\right)$ より、静電容量は $C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d} 2\left(1 + \dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)^{-1}$ となる。この C が $1.8\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$ 以上にするためには $2\left(1 + \dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)^{-1} \geqq 1.8$ より、$\varepsilon_r \geqq 9$

問 10.

(1) $\rho = Nq$

(2) $\boldsymbol{P} = Nq\boldsymbol{d}$

(3) 正負の電荷密度それぞれについて考える。正の電荷密度 Nq が $\dfrac{\boldsymbol{d}}{2}$ の点を中心に半径 a で分布しているので、同心の球面についてガウスの法則を応用すると、この電荷によって $\boldsymbol{r}$ の位置にできる電界 $\boldsymbol{E}_p^+$ は、誘電体球において $\boldsymbol{E}_p^+ = \dfrac{(\frac{4\pi|\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{d}}{2}|^3}{3}\rho)(\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{d}}{2})}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{d}}{2}|^3}$ と書ける。同様に負の電荷密度による電界 $\boldsymbol{E}_p^-$ は $\boldsymbol{E}_p^- = -\dfrac{(\frac{4\pi|\boldsymbol{r}+\frac{\boldsymbol{d}}{2}|^3}{3}\rho)(\boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{d}}{2})}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{d}}{2}|^3}$ となる。結局、誘電体球内部の分極の電界 $\boldsymbol{E}_p$ は、この二つの電界の合成なので $\boldsymbol{E}_p = -\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{d} = -\dfrac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0}$ となる。

電界は、外部印加電界を加えて $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_p = \boldsymbol{E}_0 - \dfrac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0} = \boldsymbol{E}_0 - \dfrac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \boldsymbol{E}}{3\varepsilon_0} = \boldsymbol{E}_0 - \dfrac{(\varepsilon_r - 1)\boldsymbol{E}}{3}$ より、整理すると $\boldsymbol{E} = \dfrac{3}{\varepsilon_r + 2}\boldsymbol{E}_0$ となる。また、

(4) 誘電体外では、$\dfrac{4\pi a^3}{3}\rho$ の電荷が $\boldsymbol{d}$ だけ離れておかれたときの電荷分布となるので、分極ベクトル $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{p} = \dfrac{4\pi a^3}{3}\rho\boldsymbol{d} = \dfrac{4\pi a^3}{3}\boldsymbol{P}$ となるが、前問から $\boldsymbol{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \boldsymbol{E} = 3\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0$ が言えるので、$\boldsymbol{p} = 4\pi a^3 \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0$ となる。従って、$\boldsymbol{E}_p = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left\{-\boldsymbol{p} + \dfrac{3(\boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^2}\right\} = \left\{-\hat{\boldsymbol{z}} + 3\dfrac{z\boldsymbol{r}}{r^2}\right\}\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\dfrac{a^3}{r^3}\boldsymbol{E}_0$

また、$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_p = E_0\hat{\boldsymbol{z}} + \left\{-\hat{\boldsymbol{z}} + 3\dfrac{z\boldsymbol{r}}{r^2}\right\}\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\dfrac{a^3}{r^3}\boldsymbol{E}_0$ となる。

第 5 章 真空中の静磁場の法則

問 1. 電流の経路を表すベクトル関数は $\boldsymbol{r}_0 = z_0\hat{\boldsymbol{z}},\ -\infty < z_0 < \infty$ と表せる。線素ベクトルは $d\boldsymbol{r}_0 = dz_0\hat{\boldsymbol{z}}$ である。観測点は $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}}$ となる。従って、

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\boldsymbol{r}_0 \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dz_0\hat{\boldsymbol{z}} \times (x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z_0\hat{\boldsymbol{z}})}{(x^2+y^2+z_0^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{-y\hat{\boldsymbol{x}} + x\hat{\boldsymbol{y}}}{(x^2+y^2+z_0^2)^{\frac{3}{2}}}dz_0$$

従って、

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}(-y\hat{\boldsymbol{x}} + x\hat{\boldsymbol{y}})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz_0}{(x^2+y^2+z_0^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I(-y\hat{\boldsymbol{x}} + x\hat{\boldsymbol{y}})}{2\pi(x^2+y^2)}$$

円筒座標系では、$x = \rho\cos\phi, y = \rho\sin\phi$ より、$x^2+y^2 = \rho^2,\ -y\hat{\boldsymbol{x}}+x\hat{\boldsymbol{y}} = \rho(-\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}}+\cos\phi\hat{\boldsymbol{y}}) = \rho\hat{\boldsymbol{\phi}}$ となるので、$\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\boldsymbol{\phi}}$

問 2. 電流を表す経路は $\boldsymbol{r}_0 = a\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} + a\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{y}} = a\hat{\boldsymbol{\rho}},\ 0 \leqq \phi_0 < 2\pi$ と書ける。線素ベクトルは $d\boldsymbol{r}_0 = a\,d\phi_0(-\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi_0\hat{\boldsymbol{y}}) = a\,d\phi_0\hat{\boldsymbol{\phi}}$ となる。観測点は $\boldsymbol{r} = z\hat{\boldsymbol{z}}$ なので、$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0 = -a\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} - a\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}} = -a\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$、$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0| = (a^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$。ビオ=サバールの法則から、

$$\boldsymbol{B} = \int\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\boldsymbol{r}_0 \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a\,d\phi_0\hat{\boldsymbol{\phi}} \times (-a\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\boldsymbol{z}})}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}(a\hat{\boldsymbol{z}} + z\hat{\boldsymbol{\rho}})d\phi_0 = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\boldsymbol{z}}$$

問 3. 直線部からの寄与と半円部からの寄与の和をとればよい。直線部については、ベクトル関数 $\boldsymbol{r}_0 = z_0\hat{\boldsymbol{z}},\ -\infty < z_0 \leqq -a$ および $a \leqq z_0 < \infty$ で表すことができる。電流素片は $I\,d\boldsymbol{r}_0 = I\,dz_0\hat{\boldsymbol{z}}$ となる。観測点は $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}}$ より、$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0 = x\hat{\boldsymbol{x}} - z_0\hat{\boldsymbol{z}},\ |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0| = (x^2+z_0^2)^{\frac{1}{2}}$ となる。ビオ=サバールの法則から $\boldsymbol{B}_1 = \left(\displaystyle\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty}\right)\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dz_0\hat{\boldsymbol{z}} \times (x\hat{\boldsymbol{x}} - z_0\hat{\boldsymbol{z}})}{(x^2+z_0^2)^{\frac{3}{2}}} = \left(\displaystyle\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty}\right)\frac{\mu_0 I x}{4\pi}\hat{\boldsymbol{y}}\frac{dz_0}{(x^2+z_0^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}\hat{\boldsymbol{y}}\left(1 - \dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$ となる。

半円部については、ベクトル関数を用いて $\boldsymbol{r}_0 = a\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{y}} + a\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{z}},\ -\dfrac{\pi}{2} \leqq \phi_0 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ と表せる。従って、電流素片は $I\,d\boldsymbol{r}_0 = I\,a\,d\phi_0(-\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{y}}+\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{z}})$ となる。また、$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0 = x\hat{\boldsymbol{x}}-a\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{y}}-a\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{z}},\ |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0| = \sqrt{x^2+a^2}$ より、ビオ=サバールの法則から $\boldsymbol{B}_2 = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{I\,a\,d\phi_0(-\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{y}} + \cos\phi_0\hat{\boldsymbol{z}}) \times (x\hat{\boldsymbol{x}} -}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\frac{\mu_0 I a}{4\pi(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{z}} + a\sin^2\phi_0\hat{\boldsymbol{x}} + x\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{y}} + a\cos^2\phi_0\hat{\boldsymbol{x}})d\phi_0 = \frac{\mu_0 I a}{4\pi(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}(\pi a\hat{\boldsymbol{x}} + 2x\hat{\boldsymbol{y}})$$

従って、$\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2$ が求める磁束密度となる。

問 4. まず円周部からの寄与について考える。円周部を表すベクトル関数は $\boldsymbol{r}_0 = a\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + a\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} = a\hat{\boldsymbol{\rho}},\ \dfrac{\pi}{4} \leqq \phi \leqq \dfrac{7}{4}\pi$ と書ける。線素ベクトルは $d\boldsymbol{r}_0 = a d\phi(-\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{y}}) = a\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$ となる。観測点は $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ なので、$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0 = -a(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}) = -a\hat{\boldsymbol{\rho}}$ となる。ビオ=サバールの法則から $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7}{4}\pi}\frac{I\,a\,d\phi\,\boldsymbol{\phi} \times (-a\hat{\boldsymbol{\rho}})}{a^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\hat{\boldsymbol{z}}\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi}d\phi = \frac{3\mu_0 I}{8a}\hat{\boldsymbol{z}}$ を得る。

次に、直線部については、ベクトル関数を用いて $\boldsymbol{r}_0 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{x}}+y_0\hat{\boldsymbol{y}},\ -\dfrac{a}{\sqrt{2}} \leqq y_0 \leqq \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ と書ける。線素ベクトルは $d\boldsymbol{r}_0 = dy_0\hat{\boldsymbol{y}}$ となる。また、$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0 = -\dfrac{a}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{x}}-y_0\hat{\boldsymbol{y}}$ であり、$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0| = \left(\dfrac{a^2}{2} + y_0^2\right)^{\frac{1}{2}}$ より、ビオ=サバールの法則から $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\frac{dy_0\hat{\boldsymbol{y}} \times (-\frac{a}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{x}} - y_0\hat{\boldsymbol{y}})}{(\frac{a^2}{2}+y_0^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\frac{\frac{a}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{z}}dy_0}{(\frac{a^2}{2}+y_0^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{\boldsymbol{z}}$

全体からの寄与は両者の和をとればよいので、$\boldsymbol{B} = \left(\dfrac{3\mu_0 I}{8a} + \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}\right)\hat{\boldsymbol{z}} = \dfrac{\mu_0 I}{2a}\left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{\pi}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$

問 5. 知りたい磁場の位置 (観測点) は $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ である。

直線部分のベクトル関数は $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + (x-a)\hat{\boldsymbol{y}}, 0 \leqq x \leqq a$ となる。従って、$d\boldsymbol{r}_0 = (\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})dx$、また、$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = -x\hat{\boldsymbol{x}} - (x-a)\hat{\boldsymbol{y}}$、$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| = \{x^2 + (x-a)^2\}^{\frac{1}{2}}$ である。ビオ=サバールの法則より、$d\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 I(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})dx \times \{-x\hat{\boldsymbol{x}} - (x-a)\hat{\boldsymbol{y}}\}}{4\pi\{x^2 + (x-a)^2\}^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\mu_0 I\{-(x-a) + x\}\hat{\boldsymbol{z}}}{4\pi\{x^2 + (x-a)^2\}^{\frac{3}{2}}}dx = \dfrac{\mu_0 I a\hat{\boldsymbol{z}}}{4\pi 2^{\frac{3}{2}}\{(x - \frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{4}\}^{\frac{3}{2}}}dx$ となる。直線部がつくる磁場 $\boldsymbol{B}_1$ は $\boldsymbol{B}_1 = \displaystyle\int d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I a\hat{\boldsymbol{z}}}{4\pi 2^{\frac{3}{2}}}\int_0^a \frac{1}{\{(x - \frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{4}\}^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{\boldsymbol{z}}$ となる。

円周部については、$\boldsymbol{r}_0 = a\hat{\boldsymbol{\rho}}, 0 \leqq \phi \leqq \frac{3}{2}\pi$ と書ける。従って、$d\boldsymbol{r}_0 = a\hat{\boldsymbol{\phi}}d\phi$。また、$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = -a\hat{\boldsymbol{\rho}}$, $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| = a$ となる。従って、円周部がつくる磁場 $\boldsymbol{B}_2$ は $\boldsymbol{B}_2 = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi} = \dfrac{a\,d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} \times (a\hat{\boldsymbol{\rho}})}{a^3} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}\hat{\boldsymbol{z}}\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi} d\phi = \dfrac{3\mu_0 I}{8a}\hat{\boldsymbol{z}}$ となる。

$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2$ から求められる。

問 6. 経路を表すベクトル関数は $\boldsymbol{r}_0 = \dfrac{1}{4a}y_0^2\hat{\boldsymbol{x}} + y_0\hat{\boldsymbol{y}}$, $-\infty < y_0 < \infty$ と表せる。従って、線素ベクトルは $d\boldsymbol{r}_0 = \left(\dfrac{y_0}{2a}\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}\right)dy_0$ となる。また観測点は $\boldsymbol{r} = a\hat{\boldsymbol{x}}$ より、$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = \left(a - \dfrac{1}{4a}y_0^2\right)\hat{\boldsymbol{x}} - y_0\hat{\boldsymbol{y}}$, $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^2 = \left(a - \dfrac{y_0^2}{4a}\right)^2 + y_0^2 = \left(a + \dfrac{y_0^2}{4a}\right)^2$ となる。ビオ=サバールの法則より、

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{y_0}{2a}\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}\right)dy_0 \times \left\{\left(a - \frac{1}{4a}y_0^2\right)\hat{\boldsymbol{x}} - y_0\hat{\boldsymbol{y}}\right\}}{\left(a + \frac{y_0^2}{4a}\right)^3} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{\boldsymbol{z}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(a + \frac{y_0^2}{4a}\right)^2}dy_0 = -\frac{\mu_0 I}{4a}\hat{\boldsymbol{z}}$$

問 7.

(1) 電流の範囲を表すベクトル関数は $\boldsymbol{r}_0 = a\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{y}} + a\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{z}} + x_0\hat{\boldsymbol{x}}$, $-\infty < x_0 < \infty, 0 \leqq \phi_0 \leqq \pi$

(2) $\boldsymbol{J}_s = \dfrac{I}{\pi a}\hat{\boldsymbol{x}}$

(3) ベクトル関数から、面素は $dS_0 = a\,d\phi_0\,dx_0$ となる。従って、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\frac{I}{\pi a}\hat{\boldsymbol{x}}a\,d\phi_0\,dx_0 \times (-a\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{y}} - a\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{z}} - x_0\hat{\boldsymbol{x}})}{(x_0^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{-a\cos\phi_0\hat{\boldsymbol{z}} + a\sin\phi_0\hat{\boldsymbol{y}}}{(x_0^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}d\phi_0\,dx_0 = \frac{\mu_0 I a}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x_0^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}dx_0\hat{\boldsymbol{y}} = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 a}\hat{\boldsymbol{y}}\end{aligned}$$

問 8.

(1) $\boldsymbol{r} = (\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}})R$, $0 \leqq \phi \leqq 2\pi$

(2) $d\boldsymbol{r} = R(-\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{y}})d\phi$

(3) $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{B} \bullet d\boldsymbol{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{y}}}{R} \bullet R(-\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{y}})d\phi = \mu_0 I$

(4) 直線部分は $\boldsymbol{r}' = \frac{R}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}}$, $-\frac{R}{\sqrt{2}} \leqq y \leqq \frac{R}{\sqrt{2}}$ より、線素ベクトルは $d\boldsymbol{r} = dy\hat{\boldsymbol{y}}$ となる。

$$\begin{aligned}\oint_C \boldsymbol{B} \bullet d\boldsymbol{r} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7}{4}\pi}d\phi + \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}\pi}\frac{-y\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{R}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{y}}}{\frac{R^2}{2} + y^2} \bullet \hat{\boldsymbol{y}}dy = \frac{3\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{R}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}\pi}\frac{dy}{y^2 + \frac{R^2}{2}} \\ &= \frac{3\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} = \mu_0 I\end{aligned}$$

問 9.

(1) C_1 については 4 つの経路に分けて計算する。P→Q の経路は $\boldsymbol{r} = -s\hat{\boldsymbol{x}} + a\hat{\boldsymbol{y}}$, $-a \leqq s \leqq a$ とおける。線素ベクトルは $d\boldsymbol{r} = -ds\hat{\boldsymbol{x}}$ となるので、

$$\int_{P\to Q} \boldsymbol{B} \bullet d\boldsymbol{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{-a}^{a} \frac{-a\hat{\boldsymbol{x}} - s\hat{\boldsymbol{y}}}{s^2+a^2} \bullet (-\hat{\boldsymbol{x}})ds = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{ds}{s^2+a^2} = \frac{\mu_0 I}{4}$$

次に、Q→R の経路は $\boldsymbol{r} = -a\hat{\boldsymbol{x}} - s\hat{\boldsymbol{y}}$, $-a \leqq s \leqq a$、線素ベクトルは $d\boldsymbol{r} = -ds\hat{\boldsymbol{y}}$、従って、

$$\int_{Q\to R} \boldsymbol{B} \bullet d\boldsymbol{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{-a}^{a} \frac{s\hat{\boldsymbol{x}} - a\hat{\boldsymbol{y}}}{a^2+s^2} \bullet (-\hat{\boldsymbol{y}})ds = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{ds}{s^2+a^2} = \frac{\mu_0 I}{4}$$

R→S の経路は $\boldsymbol{r} = s\hat{\boldsymbol{x}} - a\hat{\boldsymbol{y}}$, $-a \leqq s \leqq a$ であり、線素ベクトルは $d\boldsymbol{r} = ds\hat{\boldsymbol{x}}$、従って、

$$\int_{R\to S} \boldsymbol{B} \bullet d\boldsymbol{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{-a}^{a} \frac{a\hat{\boldsymbol{x}} + s\hat{\boldsymbol{y}}}{s^2+a^2} \bullet \hat{\boldsymbol{x}}ds = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{ds}{s^2+a^2} = \frac{\mu_0 I}{4}$$

S→P の経路は $\boldsymbol{r} = a\hat{\boldsymbol{x}} + s\hat{\boldsymbol{y}}$, $-a \leqq s \leqq a$、線素ベクトルは $d\boldsymbol{r} = ds\hat{\boldsymbol{y}}$、従って、

$$\int_{S\to P} \boldsymbol{B} \bullet d\boldsymbol{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{-a}^{a} \frac{-s\hat{\boldsymbol{x}} + a\hat{\boldsymbol{y}}}{a^2+s^2} \bullet \hat{\boldsymbol{y}}ds = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{ds}{s^2+a^2} = \frac{\mu_0 I}{4}$$

結局、周回積分路はこれらの和となるので、$\displaystyle\oint_{C_1} \boldsymbol{B} \bullet d\boldsymbol{r} = \mu_0 I$

(2) C_2 も同様に 4 つの経路に分ける。P→T については、経路は $\boldsymbol{r} = s\hat{\boldsymbol{x}} + a\hat{\boldsymbol{y}}$, $a \leqq s \leqq 3a$ となる。線素ベクトルは $d\boldsymbol{r} = ds\hat{\boldsymbol{x}}$ となる。従って、

$$\int_{P\to T} \boldsymbol{B} \bullet d\boldsymbol{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{a}^{3a} \frac{-a\hat{\boldsymbol{x}} + s\hat{\boldsymbol{y}}}{s^2+a^2} \bullet \hat{\boldsymbol{x}}ds = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\int_{a}^{3a}\frac{ds}{s^2+a^2} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

ただし、$\alpha = \tan^{-1} 3$ である。

T→U の経路は $\boldsymbol{r} = 3a\hat{\boldsymbol{x}} - s\hat{\boldsymbol{y}}$, $-a \leqq s \leqq a$、線素ベクトルは $d\boldsymbol{r} = -ds\hat{\boldsymbol{y}}$ となる。従って、

$$\int_{T\to U} \boldsymbol{B} \bullet d\boldsymbol{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{-a}^{a} \frac{s\hat{\boldsymbol{x}} + 3a\hat{\boldsymbol{y}}}{9a^2+s^2} \bullet (-\hat{\boldsymbol{y}})ds = \frac{-\mu_0 I\, 3a}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{ds}{s^2+a^2} = \frac{-\mu_0 I}{\pi}\beta$$

ただし、$\beta = \tan^{-1}\dfrac{1}{3}$ である。

U→S の経路は $\boldsymbol{r} = -s\hat{\boldsymbol{x}} - a\hat{\boldsymbol{y}}$, $-3a \leqq s \leqq -a$、線素ベクトルは $d\boldsymbol{r} = -ds\hat{\boldsymbol{x}}$、従って、

$$\int_{U\to S} \boldsymbol{B} \bullet d\boldsymbol{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{-3a}^{-a} \frac{a\hat{\boldsymbol{x}} - s\hat{\boldsymbol{y}}}{s^2+a^2} \bullet (-\hat{\boldsymbol{x}})ds = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\int_{-3a}^{-a}\frac{ds}{s^2+a^2} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

S→P の経路は $\boldsymbol{r} = a\hat{\boldsymbol{x}} + s\hat{\boldsymbol{y}}$, $-a \leqq s \leqq a$、線素ベクトルは $d\boldsymbol{r} = ds\hat{\boldsymbol{y}}$ となる。従って、

$$\int_{S\to P} \boldsymbol{B} \bullet d\boldsymbol{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{-a}^{a} \frac{-s\hat{\boldsymbol{x}} + a\hat{\boldsymbol{y}}}{s^2+a^2} \bullet \hat{\boldsymbol{y}}ds = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{ds}{s^2+a^2} = \frac{\mu_0 I}{4}$$

C_2 の周回積分はこれらの和をとればよい。

$$\oint_{C_2} \boldsymbol{B} \bullet d\boldsymbol{r} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\mu_0 I}{\pi}\beta - \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\mu_0 I}{4} = -\frac{\mu_0 I}{\pi}(\alpha+\beta) + \frac{\mu_0 I}{2} = 0$$

ただしここで、$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ を用いている。

問 10. 円筒軸を中心とする半径 ρ の円周の経路でアンペールの法則を応用すると、

$$2\pi\rho B(\rho) = \begin{cases} \mu_0 \frac{I}{\pi a^2}\pi\rho^2, & \rho < a \\ \mu_0 I, & a \leqq \rho < b \\ 0, & \rho > b \end{cases}$$

となるので、$B(\rho)$ は以下の通りとなる。

$$B(\rho) = \begin{cases} \mu_0 \frac{\rho}{2\pi a^2} I, & \rho \leqq a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}, & a < \rho \leqq b \\ 0, & \rho > b \end{cases}$$

問 11. 円筒軸から半径 ρ の円の面積を $+z$ 方向に流れる電流を $i(\rho)$ とする。半径 ρ の円周上でアンペールの法則を適用する。

$\rho \leqq r_0$ では $i(\rho) = \dfrac{I}{\pi r_0^2}\pi\rho^2 = \dfrac{\rho^2}{r_0^2}I$ より、アンペールの法則を適用すると $2\pi\rho B(\rho) = \mu_0 i(\rho)$ となる。従って、$B(\rho) = \dfrac{\mu_0 I\rho}{2\pi r_0^2}$ となる。

$r_0 < \rho \leqq R_i$ では $i(\rho) = I$ より、アンペールの法則を適用した結果から $B(\rho) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$。

$R_i < \rho \leqq R_0$ では $i(\rho) = I - \dfrac{\rho^2 - R_i^2}{R_0^2 - R_i^2}I = \dfrac{R_0^2 - \rho^2}{R_0^2 - R_i^2}I$ より、$B(\rho) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\dfrac{R_0^2 - \rho^2}{R_0^2 - R_i^2}$

$\rho > R_0$ では $i(\rho) = 0$ なので、$B(\rho) = 0$ となる。

問 12.

(1) 電流部分の経路は $\boldsymbol{r} = y\hat{\boldsymbol{y}} - a\hat{\boldsymbol{z}},\ d \leqq y \leqq d + 2a$ と表せる。従って、$d\boldsymbol{r} = dy\hat{\boldsymbol{y}}$。この微小部分にかかるアンペール力は $d\boldsymbol{F} = I\,dy\hat{\boldsymbol{y}} \times \dfrac{\mu_0 I_0(-y\hat{\boldsymbol{x}})}{2\pi y^2} = \dfrac{\mu_0 I\,I_0}{2\pi y}dy\hat{\boldsymbol{z}}$ となるので、

$$\boldsymbol{F} = \int d\boldsymbol{F} = \frac{\mu_0 I\,I_0}{2\pi}\int_d^{d+2a}\frac{dy}{y}\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{\mu_0 I\,I_0}{2\pi}\log\frac{d+2a}{d}\hat{\boldsymbol{z}}$$

(2) 上辺と下辺は相殺する。

$y = d$ にある辺は $I\,d\boldsymbol{r} = -I\,dz\hat{\boldsymbol{z}}$、磁束密度は $\boldsymbol{B} = -\dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi d}\hat{\boldsymbol{x}}$ で与えられるので、アンペール力は $d\boldsymbol{F} = Id\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 I_0\,I}{2\pi d}\hat{\boldsymbol{y}}dz$ より $\boldsymbol{F} = \dfrac{\mu_0 I_0 I a}{\pi d}\hat{\boldsymbol{y}}$ となる。

$y = d{+}2a$ にある辺については、電流素片は $Id\boldsymbol{r} = I\,dz\hat{\boldsymbol{z}}$、磁束密度は $\boldsymbol{B} = -\dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi(d+2a)}\hat{\boldsymbol{x}}$、アンペール力は $d\boldsymbol{F} = I\,dz\hat{\boldsymbol{z}} \times \left(-\dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi(d+2a)}\hat{\boldsymbol{x}}\right) = -\dfrac{\mu_0 I_0\,I}{2\pi(d+2a)}\hat{\boldsymbol{y}}dz$ より、$\boldsymbol{F} = -\dfrac{\mu_0 I_0 I a}{\pi(d+2a)}\hat{\boldsymbol{y}}$ となる。

ループ全体にかかる力は各辺の力を合成して $\boldsymbol{F}_{tot} = \dfrac{\mu_0 I_0 I a}{\pi}\hat{\boldsymbol{y}}\left(\dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{d+2a}\right) = 2\dfrac{\mu_0 I_0 I a^2}{\pi d(d+2a)}\hat{\boldsymbol{y}}$ となる。

問 13. yz 平面内の磁束密度は $\boldsymbol{B} = \dfrac{-\mu_0 I_0}{2\pi y}\hat{\boldsymbol{x}}$ となる。

① の辺のベクトル関数は $\boldsymbol{r}_0 = d\hat{\boldsymbol{y}} + (h+b)\hat{\boldsymbol{z}} + (a\hat{\boldsymbol{y}} - b\hat{\boldsymbol{z}})s = (d+sa)\hat{\boldsymbol{y}} + (b+h-sb)\hat{\boldsymbol{z}}$, $0 \leqq s \leqq 1$ と書ける。線素ベクトルは $d\boldsymbol{r}_0 = (a\hat{\boldsymbol{y}} - b\hat{\boldsymbol{z}})ds$ となるので、電流素片にかかるアンペール力は $d\boldsymbol{F}_1 = Id\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{B} = I(a\hat{\boldsymbol{y}} - b\hat{\boldsymbol{z}})ds \times \dfrac{-\mu_0 I_0\hat{\boldsymbol{x}}}{2\pi(d+sa)} = \dfrac{-\mu_0 I_0 I(a\hat{\boldsymbol{z}} + b\hat{\boldsymbol{y}})}{2\pi(d+sa)}ds$ となるので、

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{\mu_0 I_0 I(a\hat{\boldsymbol{z}} - b\hat{\boldsymbol{y}})}{2\pi}\int_0^1\frac{ds}{d+sa} = \frac{\mu_0 I_0 I(a\hat{\boldsymbol{z}} - b\hat{\boldsymbol{y}})}{2\pi}\frac{1}{a}\log\frac{d+a}{d}$$

② の辺は $\boldsymbol{r}_0 = (d+a-s)\hat{\boldsymbol{y}}$, $0 \leqq s \leqq a$ と書ける。線素ベクトルは $d\boldsymbol{r}_0 = -ds\hat{\boldsymbol{y}}$ となる。電流素片にかかる力は $d\boldsymbol{F}_2 = -I\,ds\hat{\boldsymbol{y}} \times \dfrac{-\mu_0 I_0\hat{\boldsymbol{x}}}{2\pi(d+a-s)} = -\dfrac{\mu_0 I_0 I\hat{\boldsymbol{z}}}{2\pi(d+a-s)}ds$

$$\boldsymbol{F}_2 = -\frac{-\mu_0 I_0 I}{2\pi}\hat{\boldsymbol{z}}\int_0^a\frac{ds}{d+a-s} = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi}\hat{\boldsymbol{z}}\log\frac{d}{d+a} = -\frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi}\hat{\boldsymbol{z}}\log\frac{d+a}{d}$$

③ の辺は $\boldsymbol{F}_3 = Ib\hat{\boldsymbol{z}} \times \dfrac{-\mu_0 I_0}{2\pi d}\hat{\boldsymbol{x}} = -\dfrac{\mu_0 I_0 I b}{2\pi d}\hat{\boldsymbol{y}}$

結局、全アンペール力は $\therefore \boldsymbol{F} = \dfrac{\mu_0 I_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{b}{a}\log\dfrac{d+a}{d} - \dfrac{b}{d}\right)\hat{\boldsymbol{y}}$

問 14. 電流の経路は $\boldsymbol{r}_0 = a\cos\alpha\cos\psi\hat{\boldsymbol{x}} + a\cos\alpha\sin\psi\hat{\boldsymbol{y}} + a\sin\alpha\hat{\boldsymbol{z}}$, $0 \leqq \alpha < 2\pi$ と表せる。線素ベクトルは $d\boldsymbol{r}_0 = a\,d\alpha(-\sin\alpha\cos\psi\hat{\boldsymbol{x}} - \sin\alpha\sin\psi\hat{\boldsymbol{y}} + \cos\alpha\hat{\boldsymbol{z}})$ と与えられる。線素ベクトル部分にかかるアンペール力は $d\boldsymbol{F} = Id\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{B} = Iad\alpha(-\sin\alpha\cos\psi\hat{\boldsymbol{x}} - \sin\alpha\sin\psi\hat{\boldsymbol{y}} + \cos\alpha\hat{\boldsymbol{z}}) \times B_0\hat{\boldsymbol{y}} = -B_0 Ia(\sin\alpha\cos\psi\hat{\boldsymbol{z}} + \cos\alpha\hat{\boldsymbol{x}})d\alpha$ となる。従って、$\boldsymbol{F} = \displaystyle\int d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$。

またこの線素ベクトル部分の力のモーメントは

$$dN = r_0 \times dF = a(\cos\alpha\cos\psi\hat{x} + \cos\alpha\sin\psi\hat{y} + \sin\alpha\hat{z}) \times (-B_0 Ia)(\sin\alpha\cos\psi\hat{z} + \cos\alpha\hat{x})d\alpha$$
$$= -B_0 Ia^2\{(-\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\psi + \sin\alpha\cos\alpha)\hat{y} + \sin\alpha\cos\alpha\sin\psi\cos\psi\hat{x} - \cos^2\alpha\sin\psi\hat{z}\}d\alpha$$

となる。従って、$N = \int dN = B_0 Ia^2 \sin\psi\hat{z}\int_0^{2\pi}\cos^2\alpha\, d\alpha = B_0 I\pi a^2\sin\psi\hat{z}$

問 15.

(1) 運動方程式は $m\dfrac{dv}{dt} = qv(t)\times B\hat{x} = qB(v_z\hat{y} - v_y\hat{z})$ となる。成分毎に書くと $\dfrac{dv_y}{dt} = \omega_c v_z, \dfrac{dv_z}{dt} = -\omega_c v_y, v_x = 0$ となる。ただし、$\omega_c = \dfrac{qB}{m}$ である。この連立微分方程式を解く。$\dfrac{d^2v_y}{dt^2} = -\omega_c^2 v_y$ より、$v_y = A\cos\omega_c t - B\sin\omega_c t$ であり、初期条件より $v_y(0) = A = v_0$ と求められる。また、v_z については $v_z = \dfrac{1}{\omega_c}\dfrac{dv_y}{dt} = -v_0\sin\omega_c t + \cos\omega_c t$ となる。初期条件より $v_z(0) = B = 0$ と求められる。従って、$v(t) = v_0(\cos\omega_c t\hat{y} - \sin\omega_c t\hat{z})$ となる。
位置 $r(t)$ については v を積分することで得られる。$r(t) = \dfrac{v_0}{\omega_c}(\sin\omega_c t\hat{y} + B\cos\omega_c t\hat{z}) + r_0$ となる。初期条件より、$r(0) = \dfrac{v_0}{\omega_c}\hat{z} + r_0 = 0$ となるので、$r_0 = -\dfrac{v_0}{\omega_c}\hat{z}$ と求められる。結局、位置は $r(t) = \dfrac{v_0}{\omega_c}\{\sin\omega_c t\hat{y} + (\cos\omega_c t - 1)\hat{z}\}$ となる。

(2) $\dfrac{v_0}{\omega_c} \geqq d$

(3) $v = v_0$

(4) $t_0 = \dfrac{1}{\omega_c}\sin^{-1}\dfrac{\omega_c d}{v_0}$

問 16. 運動方程式は $m\dfrac{dv}{dt} = qv\times B + qE = qB_0(-v_x\hat{y} + v_y\hat{x}) - qE_0\hat{y}$ となる。成分毎に分けて書くと、$\dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{qB_0}{m}v_y = \omega_c v_y$, $\dfrac{dv_y}{dt} = -\dfrac{qB_0}{m}v_x = -\dfrac{qE_0}{m} = -\omega_c v_x - \frac{qE_0}{m}$ となる。後者の式を微分して $\dfrac{d^2v_y}{dt^2} = -\omega_c\dfrac{dv_x}{dt} = -\omega_c^2 v_y$ となるので、これを解いて $v_y = A\cos\omega_c t + B\sin\omega_c t$ を得る。初期条件から、$v_y(0) = A = 0$ より、$v_y = B\sin\omega_c t$。v_x は、$v_x = -\dfrac{1}{\omega_c}\dfrac{dv_y}{dt} - \dfrac{E_0}{B_0} = -B\cos\omega_c t - \dfrac{E_0}{B_0}$ となる。初期条件 $v_x(0) = -B - \frac{E_0}{B_0} = v_0$ より、$B = -\left(v_0 + \frac{E_0}{B_0}\right)$ を得る。結局、$v_x = \left(v_0 + \dfrac{E_0}{B_0}\right)\cos\omega_c t - \dfrac{E_0}{B_0}$, $v_y = -\left(v_0 + \dfrac{E_0}{B_0}\right)\sin\omega_c t$ となる。

問 17.

(1) $v = \rho\omega$

(2) かかる力は $\rho_0\, d\rho\, S\, v_\phi\hat{\phi}\times B_0\hat{z} + \rho_0\, d\rho\, S\, E_\rho\hat{\rho} = 0$ より、$\rho_0\, d\rho\, S\, v_\phi\, B_0\hat{\rho} + \rho_0\, d\rho\, S\, E_\rho\hat{\rho} = 0$ となる。従って、ρ 方向成分のみとなり、$\rho_0\, d\rho\, S\, v_\phi\, B_0 + \rho_0\, d\rho\, S\, E_\rho = 0$ より $E_\rho = -v_\phi\, B_0$

(3) 電界は $E = -v_\phi\, B_0\hat{\rho} = -\rho\omega B_0\hat{\rho}$ より、電位差は $V = -\int_0^a E\bullet\hat{\rho}\, d\rho = \int_0^a \rho\omega B_0\, d\rho = \dfrac{a^2\omega B_0}{2}$

問 18. 初期条件は $r(0) = x_0\hat{x} + y_0\hat{y}$, $v_0 = v_1\hat{x} + v_3\hat{z}$ で与えられる。運動方程式は $m\dfrac{dv}{dt} = qv\times B = q(v_x\hat{x}(+v_y\hat{y}) + v_z\hat{z})\times(-B_0)\hat{y} = qB_0(-v_x\hat{z} + v_z\hat{x})$ となる。成分毎に分けると $m\dfrac{dv_x}{dt} = qB_0 v_z$, $m\dfrac{dv_z}{dt} = -qB_0 v_x$ となる ($m\frac{dv_y}{dt} = 0$ であり、初期条件より $v_y = 0$)。連立微分方程式を解く。第一

式を微分して第二式を代入すると、$\dfrac{d^2v_x}{dt^2}=\omega_c\dfrac{dv_z}{dt}=-\omega_c^2v_x$ となる。ここで、$\omega_c=\frac{qB_0}{m}$ である。これを解くと、$v_x=A\cos\omega_c t+B\sin\omega_c t$ となる。初期条件より、$v_x(0)=A=v_1$ を得る。v_z は $v_z=\dfrac{1}{\omega_c}\dfrac{dv_x}{dt}=-A\sin\omega_c t+B\cos\omega_c t$ となる。初期条件より $v_z(0)=B=v_3$ となる。従って、速度は $\boldsymbol{v}=(v_1\cos\omega_c t+v_3\sin\omega_c t)\hat{\boldsymbol{x}}+(-v_1\sin\omega_c t+v_3\cos\omega_c t)\hat{\boldsymbol{z}}$ となる。ここで、$V=\sqrt{v_1^2+v_3^2}$ とおくと、$\boldsymbol{v}=V\left(\frac{v_1}{V}\cos\omega_c t+\frac{v_3}{V}\sin\omega_c t\right)\hat{\boldsymbol{x}}+V\left(\frac{v_3}{V}\cos\omega_c t-\frac{v_1}{V}\sin\omega_c t\right)\hat{\boldsymbol{z}}=V(\cos\alpha\cos\omega_c t+\sin\alpha\sin\omega_c t)\hat{\boldsymbol{x}}+V(\sin\alpha\cos\omega_c t-\cos\alpha\sin\omega_c t)\hat{\boldsymbol{z}}=V\cos(\omega_c t-\alpha)\hat{\boldsymbol{x}}-V\sin(\omega_c t-\alpha)\hat{\boldsymbol{z}}$ と書ける。ここで、$\tan\alpha=\dfrac{v_3}{v_1}$ である。

位置は $\boldsymbol{r}=\displaystyle\int_0^t\boldsymbol{v}(t')dt'+\boldsymbol{r}(0)=\frac{V}{\omega_c}\sin(\omega_c t-\alpha)\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{V}{\omega_c}\{\cos(\omega_c t-\alpha)-\cos\alpha\}\hat{\boldsymbol{z}}+x_0\hat{\boldsymbol{x}}+y_0\hat{\boldsymbol{y}}$ となる。

回転を表すベクトルは $\boldsymbol{\omega}=\omega_c\hat{\boldsymbol{y}}$ となる。

問 19.

(1) 運動方程式は $m_e\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-e\boldsymbol{v}\times(-B_0\hat{\boldsymbol{y}})=B_0e(v_x\hat{\boldsymbol{z}}-v_z\hat{\boldsymbol{x}})$ となる。これを成分毎に書けば以下となる。$m_e\dfrac{dv_x}{dt}=-eB_0v_z,\quad m_e\dfrac{dv_y}{dt}=0,\quad m_e\dfrac{dv_z}{dt}=eB_0v_x$

(2) 前問の解の第 1 式を微分して第 3 式を代入すると $\dfrac{d^2v_x}{dt}=-\dfrac{eB_0}{m_e}\dfrac{dv_z}{dt}=-\left(\dfrac{eB_0}{m_e}\right)^2v_x$ を得る。従って、これを問いて $v_x=A\cos\omega_c t+B\sin\omega_c t$ となる。ただしここで $\omega_c=\dfrac{eB_0}{m_e}$ である。初期条件より $v_x(0)=A=v_0$ となる。また、v_z は前問の第 1 式から $v_z=-\dfrac{1}{\omega_c}\dfrac{dv_x}{dt}=A\sin\omega_c t-B\cos\omega_c t$ となる。初期条件より $v_z(0)=-B=0$ となる。結局 $\boldsymbol{v}=v_x\hat{\boldsymbol{x}}+v_z\hat{\boldsymbol{z}}=v_0(\cos\omega_c t\hat{\boldsymbol{x}}+\sin\omega_c t\hat{\boldsymbol{z}})$ を得る。

(3) $\boldsymbol{v}$ を積分して、$\boldsymbol{r}=\displaystyle\int_0^t\boldsymbol{v}dt+C=\frac{v_0}{\omega_c}\{\sin\omega_c t\hat{\boldsymbol{x}}-(\cos\omega_c t-1)\hat{\boldsymbol{z}}\}$

(4) 半径 $\dfrac{v_0}{\omega_c}>d$ より、$B_0<\dfrac{m_ev_0}{ed}$

(5) $t_0=0$ で $x=d$ より $\dfrac{v_0}{\omega_c}\sin\omega_c t_0=d$ となる。従って、$t_0=\dfrac{1}{\omega_c}\sin^{-1}\left(\dfrac{\omega_c d}{v_0}\right)$ となる。また、$\cos\omega_c t_0=\dfrac{\sqrt{v_0^2-(\omega_c d)^2}}{v_0}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_c d}{v_0}\right)^2}$ より、$\boldsymbol{r}(t_0)=d\hat{\boldsymbol{x}}+\dfrac{v_0}{\omega_c}(1-\cos\omega_c t_0)\hat{\boldsymbol{z}}=d\hat{\boldsymbol{x}}+\left(\dfrac{v_0}{\omega_c}-\sqrt{\left(\dfrac{v_0}{\omega_c}\right)^2-d^2}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$、および $\boldsymbol{v}(t_0)=v_0(\cos\omega_c t_0\hat{\boldsymbol{x}}+\sin\omega_c t_0\hat{\boldsymbol{z}})=\sqrt{v_0^2-(\omega_c d)^2}\hat{\boldsymbol{x}}+\omega_c d\hat{\boldsymbol{z}}$

(6) t_0 での速度のまま等速度運動なので x 方向に $(10d-d)$ だけ移動する時間 t_1 は $t_1=\dfrac{9d}{v_x(t_0)}=\dfrac{9d}{\sqrt{v_0^2-(\omega_c d)^2}}$ となる。従って、$z_p=z(0)+v_z(t_0)t_1=\dfrac{v_0}{\omega_c}-\sqrt{\left(\dfrac{v_0}{\omega_c}\right)^2-d^2}+\dfrac{9\omega_c d^2}{\sqrt{v_0^2-(\omega_c d)^2}}$

第 6 章 磁性体

問 1. $I=\dfrac{\omega}{2\pi}q$ より、$\boldsymbol{m}=\pi a^2\dfrac{\omega}{2\pi}q\hat{\boldsymbol{z}}=\dfrac{\omega a^2q}{2}\hat{\boldsymbol{z}}$

問 2. 球座標系で θ において微小角度 $d\theta$ が球面上つくる面の部分の電流を dI とすると $dI=a\,d\theta\times2\pi a\sin\theta\times\sigma\times\dfrac{\omega}{2\pi}=\sigma\omega a^2\sin\theta\,d\theta$ となる。この電流がつくる磁気モーメントを $d\boldsymbol{m}$ とすると

$d\boldsymbol{m} = \pi(a\sin\theta)^2 dI\hat{\boldsymbol{z}} = \sigma\pi\omega a^4 \sin^3\theta\, d\theta\hat{\boldsymbol{z}}$ となる。従って、$\boldsymbol{m} = \int d\boldsymbol{m} = \sigma\pi\omega a^4\hat{\boldsymbol{z}}\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{4}{3}\sigma\pi\omega a^4\hat{\boldsymbol{z}}$

問 3. z 軸に垂直で、z 軸を中心とする円周に対してアンペールの法則を応用すると $\oint \boldsymbol{H}\bullet d\boldsymbol{r} = 2\pi\rho H_\phi = I$ より $H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$ となる。磁束密度は $\rho < a, \rho > b$ において $B_\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$、$a \leqq \rho \leqq b$ において $B_\rho = \frac{10\mu_0 I}{2\pi\rho}$

問 4.

(1) 中心から半径 ρ の円周においてアンペールの法則を応用すると、$2\pi\rho H = NI$ より $H = \frac{NI}{2\pi\rho}$

(2) 磁束密度 $B = \mu_0\mu_r H$ を鉄心の断面にわたって面積分する。厚さ c にわたって一様なので $\Phi = c\int_a^b \frac{\mu_0\mu_r NI}{2\pi\rho}d\rho = \frac{c\mu_0\mu_r NI}{2\pi}\log ba$

問 5. 鉄心 A において、鉄心に沿う円周でアンペールの法則を応用すると、鉄心中の磁界の強さを H としたとき $Hl = NI_A$ となる。従って、鉄心 A の磁束は $\Phi = BS = \mu_0\mu_r HS = \mu_0\mu_r HS = \mu_0\mu_r\frac{NI_A}{l}S$ となる。

同様に、鉄心 B 中でもアンペールの法則を用いるが、磁界は鉄心中と真空中で異なるので (場と境界が垂直なので磁束密度 B は連続)、鉄心および真空における磁界をそれぞれ H_m, H_a とすると、$NI_B = H_m(l-l_g) + H_a l_g = \frac{B}{\mu_r\mu_0}(l-l_g) + \frac{B}{\mu_0}l_g$ となる。従って、$B = \frac{\mu_0 NI_B}{\frac{l-l_g}{\mu_r}+l_g}$ より、$\Phi = \frac{\mu_0 NI_B}{\frac{l-l_g}{\mu_r}+l_g}S$ となる。

鉄心 A, B の磁束が等しいことから、$I_B = I_A\left(1-\frac{l_g}{l}+\frac{l_g}{l}\mu_r\right) = I_A\left\{1+\frac{0.5\times10^{-3}}{50\times10^{-3}}(1000-1)\right\} \approx 11I_A$

問 6. ab 間の磁界を H_{ab}, Φ_{ab}、dc 間の磁界、磁束を H_{dc}, Φ_{dc} とする。ab 間以外の磁界、磁束は構造と対称性から全て等しい。abcda 間のループにわたってアンペールの法則を考えると $NI = H_{ab}l + H_{dc}3l = \frac{\Phi}{\mu S}l + \frac{\Phi_{dc}}{\mu S}3l$ となる。また、キルヒホッフの法則を a 点または b 点で考えると $\Phi = 2\Phi_{dc}$ となるので、$NI = \frac{\Phi}{\mu S}l + \frac{\Phi}{\mu S}\frac{3}{2}l = \frac{\Phi}{\mu S}\frac{5}{2}l$。即ち、$\Phi = \frac{2}{5}\frac{\mu NIS}{l}$

問 7.

(1) $\hat{\boldsymbol{z}} = \cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ より、$\boldsymbol{B}_i = B_i\hat{\boldsymbol{z}} = B_i\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} - B_i\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$、$\boldsymbol{B}_0 = B_0\hat{\boldsymbol{z}} = B_0\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} - B_0\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$

$$\boldsymbol{B}_m = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left\{-m\hat{\boldsymbol{z}} + 3\frac{(m\hat{\boldsymbol{z}}\bullet\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^2}\right\} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left\{-m(\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) + 3\frac{(m\{\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\}\bullet r\hat{\boldsymbol{r}})r\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\right\}$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi r^3}(2m\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} + m\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

$m = \frac{4\pi a^3}{3}M$ より、$\boldsymbol{B}_m = \frac{\mu_0 a^3}{3r^3}M(2\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}})$

(2) 磁束密度の法線成分 (r 成分) が $r = a$ で連続、即ち $(\boldsymbol{B}_0|_{r=a} + \boldsymbol{B}_m|_{r=a})\bullet\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{B}_i|_{r=a}\bullet\hat{\boldsymbol{r}}$ から、

$$\underline{B_0\cos\theta + \frac{\mu_0 a^3}{3a^3}M2\cos\theta = B_i\cos\theta}$$

磁界の接線成分 (θ 成分) が $r=a$ で連続、即ち $\dfrac{(\boldsymbol{B}_0|_{r=a}+\boldsymbol{B}_m|_{r=a})}{\mu}\bullet\hat{\boldsymbol{\theta}}=\dfrac{\boldsymbol{B}_i|_{r=a}}{\mu_0}\bullet\hat{\boldsymbol{\theta}}$ から、
$\underline{-\dfrac{B_i}{\mu}\sin\theta=-\dfrac{B_0}{\mu_0}\sin\theta+\dfrac{1}{3}M\sin\theta}$

(3) 前の設問の境界条件を B_i, M について解いて $\boldsymbol{B}_i=B_i\hat{\boldsymbol{z}}=\dfrac{3\mu}{\mu+2\mu_0}B_0\hat{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{M}=M\hat{\boldsymbol{z}}=\dfrac{B_0}{\mu_0}\dfrac{3(\mu-\mu_0)}{\mu+2\mu_0}\hat{\boldsymbol{z}}$

問 8.

(1) (a) H_1 (b) H_2 (c) H_0

(2) $H_1=\dfrac{\Phi}{\mu_1 S}, H_2=\dfrac{\Phi}{\mu_2 S}, H_0=\dfrac{\Phi}{\mu_0 S}$

(3) アンペールの法則から、$NI=\left(\dfrac{l_1}{\mu_1 S}+\dfrac{l_2}{\mu_2 S}+\dfrac{2\delta}{\mu_0 S}\right)\Phi$ より、$\Phi=\dfrac{NI}{\frac{l_1}{\mu_1 S}+\frac{l_2}{\mu_2 S}+\frac{2\delta}{\mu_0 S}}$

第 7 章 電磁誘導現象とインダクタンス

問 1.

(1) 回路の面はベクトル関数を用いて $\boldsymbol{r}=x\hat{\boldsymbol{x}}+s\cos\theta\hat{\boldsymbol{y}}+s\sin\theta\hat{\boldsymbol{z}}, (-\frac{a}{2}\leqq x\leqq\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\leqq s\frac{b}{2})$ と表せる。この面素ベクトルは $d\boldsymbol{S}=\partial_s\boldsymbol{r}\times\partial_x\boldsymbol{r}=(\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}}-\cos\theta\hat{\boldsymbol{z}})dx\,ds$ となる。この面素との微小鎖交磁束 $d\Phi$ は $d\Phi=\boldsymbol{B}\bullet d\boldsymbol{S}=B_0\sin\theta\,dx\,ds$ より、全鎖交磁束は $\Phi=\int d\Phi=B_0\sin\theta\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}dx\,ds=B_0ab\sin\theta$ となる。

(2) $\Phi(t)=B_0ab\sin\omega_0 t$ より、$V=\dfrac{d\Phi}{dt}=\omega_0 B_0 ab\cos\omega_0 t$

問 2. ア: $e=\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ イ: $\Delta\phi=Blv\,\Delta t$ より、$e=Blv$ ウ: a から b エ: 0 オ: ⑩

問 3.

(1) Φ を $+z$ 方向への磁束を正ととると、$\Phi=abB_0\cos\omega_1 t$ より、$U=-\dfrac{d\Phi}{dt}=\omega B_0 ab\sin\omega t$

(2) $\Phi=B_1\hat{\boldsymbol{x}}\bullet ab(\hat{\boldsymbol{z}}\cos\omega_2 t-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\omega_2 t)=-B_1ab\sin\omega_2 t$ より、$U=-\dfrac{d\Phi}{dt}=B_1\omega_2 ab\cos\omega_2 t$

(3) $\Phi=B_2\cos\omega_2 t\hat{\boldsymbol{x}}\bullet ab(\hat{\boldsymbol{z}}\cos\omega_2 t-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\omega_2 t)=-B_2ab\cos\omega_2 t\sin\omega_2 t$ より、$U=\omega_2 B_2 ab\cos 2\omega_2 t$

問 4.

(i) 導線内で導線の中心から半径 ρ の円周でアンペールの法則を応用すると $2\pi\rho H=\dfrac{I}{\pi a^2}\pi\rho^2$ より $H=\dfrac{I\rho}{2\pi a^2}$ となる。ここからエネルギー密度 w は $w=\dfrac{\mu_0}{2}H^2=\dfrac{\mu_0 I^2\rho^2}{8\pi^2 a^4}$ となるので、これを長さ l の導体内部で積分すると $W=l\displaystyle\int_0^a\frac{\mu_0 I^2\rho^2}{8\pi^2 a^4}2\pi\rho\,d\rho=\underline{\frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}}_{\text{(a)}}=\frac{1}{2}L_i I^2$ より、$L_i=\underline{\dfrac{\mu_0 l}{8\pi}}_{\text{(b)}}$

(ii) 位置 z では、$z=0$ の電流がつくる磁界は半径 z の円周でアンペールの法則を応用し、$z=d$ の電流がつくる磁界は同様に半径 $d-z$ の円周でアンペールの法則を応用して、電流とできる磁界の向きに注意すると $\underline{\boldsymbol{H}(z)=\dfrac{I}{2\pi z}\hat{\boldsymbol{x}}+\dfrac{I}{2\pi(d-z)}\hat{\boldsymbol{x}}}_{\text{(c)}}$ となる。$+x$ 方向を磁束の正とすると、$d\boldsymbol{S}=\hat{\boldsymbol{x}}dz\,dy$ となり、
$\displaystyle\int_0^l\int_z^{d-a}\underline{\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{d-z}\right)}_{\text{(d)}}dz\,dy=\underline{\frac{\mu_0 Il}{\pi}\log\frac{d-a}{a}}_{\text{(e)}}=L_e I$ より、$L_e=\underline{\dfrac{\mu_0 l}{\pi}\log\dfrac{d-a}{a}}_{\text{(f)}}$ となる。全体のインダクタンスは $L=2L_i+L_e=\underline{\dfrac{\mu_0 l}{4\pi}+\dfrac{\mu_0 l}{\pi}\log\dfrac{d-a}{a}}_{\text{(g)}}$

問 5.

(1) ソレノイド内は均一の軸方向を向いた磁場が形成される。ソレノイド内でアンペールの法則を応用することで $B_0 = \mu_0 NI$ を得る。

(2) $\Phi = BS\cos\theta = \mu_0 NIS\cos\theta$

(3) $\Phi = MI$ より、$M = \mu_0 NS\cos\theta$

(4) $\theta = \omega t$ となる。$I = \dfrac{V}{R} = -\dfrac{1}{R}\dfrac{d\Phi}{dt} = \dfrac{\mu_0 NIS}{R}\omega\sin\omega t$

(5) $Q = \displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} RI^2 dt = \frac{(\mu_0 NIS\omega)^2}{R}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2\omega t\, dt = \frac{\pi(\mu_0 NIS)^2\omega}{R}$

問 6.

(1) 磁性体内の磁路にわたってアンペールの法則を応用すると $N_1 I = Hl = \dfrac{B}{\mu}l = \dfrac{l}{\mu S}\Phi_1$ より、$\Phi_1 = \dfrac{\mu S}{l}N_1 I$

(2) コイル 1 と鎖交する全磁束は $L_1 I = N_1\Phi_1 = \dfrac{\mu S}{l}N_1^2 I$ より $L_1 = \dfrac{\mu S}{l}N_1^2$

$W_m = \dfrac{1}{2}L_1 I^2 = \dfrac{\mu N_1^2 S}{2l}I^2$

$w_m = \dfrac{1}{2}BH = \dfrac{1}{2\mu}B^2 = \dfrac{1}{2\mu}\left(\dfrac{\Phi_1}{S}\right)^2 = \dfrac{\mu N_1^2 I^2}{2l^2}$ となる。体積は $V = Sl$ より、全エネルギーは $w_m V = \dfrac{\mu N_1^2 S}{2l}I^2$

(3) 鎖交磁束は $MI = N_2\Phi_1 = N_2\dfrac{\mu S}{l}N_1 I$ となるので、$M = \dfrac{\mu S N_1 N_2}{l}$

(4) かけた電圧 V_1 と逆起電力 $-N_1\dfrac{d\Phi}{dt}$ が等しいので、$V_1 = -N_1\dfrac{d\Phi}{dt}$ となる。また、2 次側のコイルには $V_2 = -N_2\dfrac{d\Phi}{dt}$ の逆起電力が発生する。従って、$V_2 = \dfrac{N_2}{N_1}V_1$

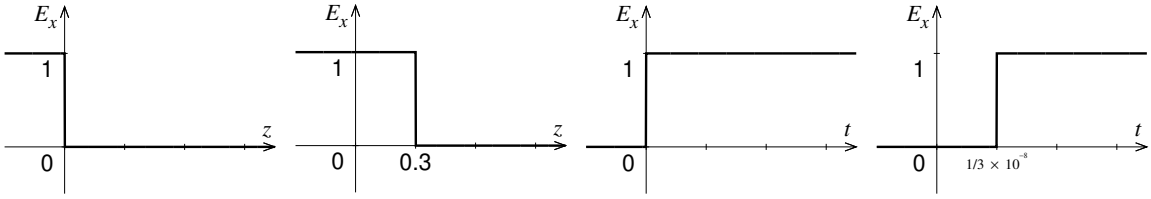
問 7. 直線導体に電流 I を流したとすると、yz 面内にできる磁束密度は $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi y}(-\hat{\boldsymbol{x}})$ となる。長方形ループと鎖交する磁束を計算するが、$-x$ 方向を磁束の正にとると、微小面素は $d\boldsymbol{S} = -dy\,dz\hat{\boldsymbol{x}}$ となる。$d\Phi = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi y}dy\,dz$ より、鎖交磁束は $\Phi = \displaystyle\int d\Phi = \int_h^{h+b}\int_d^{d+a}\frac{\mu_0 I}{2\pi y}dy\,dz = \frac{\mu_0 I}{2\pi}b\log\frac{d+a}{d}$ となる。従って、$\Phi = MI$ より $M = \dfrac{\mu_0}{2\pi}b\log\dfrac{d+a}{d}$

問 8. 直線導体に電流 I を流したとき zx 平面にできる磁束密度は $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}\hat{\boldsymbol{y}}$ となる。三角形の平面はベクトル関数を用いて $\boldsymbol{r} = (a+t)\hat{\boldsymbol{x}} + (b+u)\hat{\boldsymbol{z}}, (0 \leqq t \leqq s, 0 \leqq u \leqq t$ と表せるので、$d\boldsymbol{S} = \partial_t\boldsymbol{r}\times\partial_u\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{y}}du\,dt$ より、微小面素との微小鎖交磁束 $d\Phi$ は $d\Phi = \boldsymbol{B}\bullet d\boldsymbol{S} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi(a+t)}du\,dt$ となる。従って、全鎖交磁束は $\Phi = \displaystyle\int d\Phi = \int_0^s\int_0^t\frac{\mu_0 I}{2\pi(a+t)}du\,dt = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^s\frac{t}{a+t}dt = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(s - a\log\frac{a+s}{a}\right)$ となるので、$M = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\left(s - a\log\dfrac{a+s}{a}\right)$

第 8 章 Maxwell の方程式

問 1.

(1) 以下のようなグラフになる。



$t = 0$　　$t = 1 \times 10^{-9}$　　$z = 0$　　$z = 1$

(2) $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = E_x \hat{\boldsymbol{x}} \times H_y \hat{\boldsymbol{y}} = E_x H_y \hat{\boldsymbol{z}} = \dfrac{1}{Z_0} f^2(z - c_0 t)\hat{\boldsymbol{z}} = \dfrac{1}{Z_0} H^2(c_0 t - z)\hat{\boldsymbol{z}}$

(3) $-\oiint (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \bullet d\boldsymbol{S} = -\left\{ -\dfrac{1}{Z_0} H^2(c_0 t) + \dfrac{1}{Z_0} H^2(c_0 t - 1) \right\} = \dfrac{1}{Z_0} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$

(4) 電場のエネルギー密度は $w_e = \dfrac{\varepsilon_0}{2} H^2(c_0 t - z)$ を体積積分して電場のエネルギー W_e が得られる。$W_e = \iiint w_e dV = \displaystyle\int_0^1 \frac{\varepsilon_0}{2} H^2(c_0 t - z) dz = \int_0^{c_0 t} \frac{\varepsilon_0}{2} dz = \frac{\varepsilon_0}{2} c_0 t = \frac{t}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$

同様に、磁場のエネルギー密度は $w_m = \dfrac{\mu_0}{2} \left\{ \dfrac{1}{Z_0} H(c_0 t - z) \right\}^2$ より、磁場のエネルギー W_m は $W_m = \iiint w_m dV = \dfrac{\mu_0}{2 Z_0} c_0 t = \dfrac{t}{2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$

(5) $\displaystyle\iiint_V (w_e + w_m) dV = \frac{dW_e}{dt} + \frac{dW_m}{dt} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$ となる。

問 2.

(1) $E_x = E_0 \cos(-k_0\{z - c_0 t\}) = E_0 \cos(k_0 c_0 t - k_0 z) = E_0 \cos(\omega t - k_0 z)$、$H_y = \dfrac{E_0}{Z_0} \cos(\omega t - k_0 z)$

(2) $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = E_x H_y \hat{\boldsymbol{z}} = \dfrac{E_0^2}{Z_0} \cos^2(\omega t - k_0 z)\hat{\boldsymbol{z}}$

(3) $W = \displaystyle\int_0^T \int_0^b \int_0^a \frac{E_0^2}{Z_0} \cos^2(\omega t - k_0 z)\hat{\boldsymbol{z}} \bullet \hat{\boldsymbol{z}} dx\, dy\, dt = \frac{E_0^2}{Z_0} ab \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2 \omega t\, dt = \frac{E_0^2}{Z_0} ab \frac{\pi}{\omega}$

(4) $t = \dfrac{2\pi}{\omega}$ において $E_x = E_0 \cos k_0 z$, $H_y = \dfrac{E_0}{Z_0} \cos k_0 z$ となる。電磁界のエネルギー密度は $w_e = \dfrac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 \cos^2 k_0 z, w_m = \dfrac{\mu_0}{2} \dfrac{E_0^2}{Z_0^2} \cos^2 k_0 z, = \dfrac{\varepsilon_0}{2} E_0 \cos^2 k_0 z$ より、合計で $w = w_e + w_m$ $= \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 k_0 z$ となる。V 内のエネルギーは

$\displaystyle\iiint_V w\, dV = ab \int_0^{c_0 \frac{2\pi}{\omega}} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 k_0 z\, dz = \varepsilon_0 E_0^2 c_0 \frac{\pi}{\omega} ab = \frac{E_0^2}{Z_0} \frac{\pi}{\omega} ab$

参考文献

[1] http://www.ee.titech.ac.jp/admissions/guideline_masters/detail_69.html(2017 年 4 月 7 日アクセス)

[2] (http://www.titech.ac.jp/graduate_school/news/ pdf/17_H2904.H2809_sotei_denkidenshi.pdf)(2017 年 4 月 7 日アクセス)

[3] http://www.ecei.tohoku.ac.jp/ecei_web/admission/pastexam.html(2017 年 4 月 7 日アクセス)

[4] http://www.eeis.t.u-tokyo.ac.jp/education/subject.html(2017 年 4 月 7 日アクセス)