

解析電磁気学 授業ノート

電子情報システムコース
平成 29 年度 (平成 29 年 4 月 7 日版)

情報・通信工学科
担当: 安藤 芳晃

第1章 イントロダクション

1.1 本書の構成について

本書は、情報・通信工学科電子情報システムコースの「解析電磁気学」のための講義ノートです。基本的に、構成は授業の進行に合わせています。

通常、電磁気学は30週で講義されますが、「解析電磁気学」は15週しかありません。市販されている教科書と比べ、端折っている箇所などがあります。

また、本書は結構文字が多く、読みにくいかも知れません。皆さんは「分かり易いように図で説明される」ことに慣れているかと思います(私もそうでした)。試験でも「この図なら見たことあるから解けそう」という感じです。

ですが、「文章でしか説明できないこと」も多くあります。特に電磁気学は図示できないことが多いです。最初は慣れないかも知れませんが、文章を読んで物理現象を想像する訓練をしてもらえればと思います。

1.2 電磁気学で勉強すること

電磁気学は電気と磁気に関する学問です。電気と磁気は互いに関係があるので、それをまとめて「電磁気学」と呼んでいます。

電磁気学で学ぶことは、①電気と磁気に関わる諸現象と②その法則、③コイルやコンデンサといった、電磁気現象を応用したものの動作と原理になります。

電荷や電流が存在すると、周囲に電磁場と呼ばれるものができます。これが電磁気現象の根本です。当然に、電荷や電流の分布の仕方が異なれば、それによってできる電磁場の分布も異なります。

また、周囲に物体(導体、誘電体、磁性体)があると、それによっても電磁場の分布が変化します。

つまり、電荷と電流の分布、および物体の形状と特性を指定すれば、電磁場は一意に決定できることになります。

電磁場の分布を決定するには、解くべき方程式としてマクスウェル(Maxwell)の方程式があります。これは、電磁場の法則をまとめたものです。

また電磁気学では、電場と磁場に関する法則だけでなく、コイルやコンデンサなど、それを工学的に応用した基本的なものを述べ、その動作原理や、その性能を表すための指標を定義します。

1.3 解析電磁気学の範囲

解析電磁気学では、基礎電磁気学でならった電磁気現象全体を更に深く説明し、もう少し数学的に厳密に取り扱って、実際の電磁気現象について取り組める(=解析できる)ようにするのが目的です。

ただ、それには数学の実力が必要であり、具体的には関数と微積分、ベクトルが重要となってきます。

いずれも当然に習っているとは思いますが、「それを使って実際に起こっている問題を解く」となると自由自在に使える必要があります。この授業でも、ごく基本的なものしか取り扱う時間しかありませんが、予習・復習でじっくり取り組んでもらいたいと思います。

1.4 用語について

用いる各種用語をここで明確にしておきます。

- 定義とは、物事や概念をそれ自身と決めること。
- 定理とは、定義されたことを用いて証明されたこと。従って、数学の話です。
- 法則とは、自然に存在する個々の現象を貫く一般的な性質のこと。従って、物理の話です。
- 公式とは、覚えておくと計算が早くできて便利な式のこと。
- 方程式とは、等号で結ばれた式で、その式中の未知量がある条件のときに成立する式のこと。
- 恒等式とは、等号で結ばれた式で、その式中の量がいつでも必ず成立する式のこと。

一般と特殊 一般と特殊という用語は、物理学では日常会話とは異なった使い方がされます。日常会話では「一般的には」といった場合は「普通は」という意味です。また、それとは違う、普通でない、時々起こるようなことを「特殊」と言っています。

しかし、物理や数学で「一般的」というのは、「どのようなケースにも当てはまる、より広い範囲で成立する」ことを言います。

それに対して「特殊」というのは、「適用される範囲が限定された」ことを指します。

例えば、 x を独立変数とする関数 $y(x)$ に対する微分方程式 $\frac{dy}{dx} = 3$ の解は、 $y(x) = 3x$ は一つの解ですが、 $y(x) = 3x + 1$ や $y(x) = 3x + 2$ も同様に解ですので、それぞれが「特殊な解」です。これらを全部ひっくめて、任意の数 C を用いて $y(x) = 3x + C$ と書くと「一般的な解」になります。

「一般」と「特殊」は概念としては対立していますが、異なるものを指すわけではなく、「一般」のうちの一部が「特殊」になります。「特殊」は「一般」に含まれる、包含関係にあります。

電場と磁場について この授業では、電場と磁場という用語について、少し特殊な使い方をします。他の教科書では、電界と電場は同じ意味に用いられたりしますが、この授業では「電界と電場は違うもの」とします。

電界は物理量であり、その単位は V/m です。電場は「電気的な作用が及んでいる空間」を指すものとします。ですから、電場は「電界と電束密度をひっくめるめたもの」と考えてもらってOKです。

磁場も同様で、磁界と磁束密度をひっくめるめた、磁気的作用が及んでいる空間のことを指すものとします。

1.5 物理量について

スカラーとベクトル この授業で扱う物理量としては、スカラーとベクトルがあります。例えば、電流や仕事はスカラー、速度や力はベクトル量です。

この二つを混同しないように気をつけて下さい。もちろん、「スカラー量とベクトル量の和」とかは存在しません。「ベクトルで割る」こともできません。

「場」 また、物理量には、「単なる量」と「場」というものがあります。前者の「単なる量」は、電流とか体重とか、通常あつまっているもので、簡単にイメージできるかと思えます。

それに対して、すこし理解しづらいのが「場」です。この電磁気学の授業を通して、場を常に意識して勉強をして下さい。

「場」とは、空間の各点に存在する物理量であり、例えば、「温度」はスカラーの場です。温度計を各点におけばその点の温度が測れる、他の点では違った値となる、というものです。また、「電界」はベクトルの場です。各点に電界が存在し、各点で異なる「向き」と「大きさ」を持ったベクトルである電界が測れます。「場」は「空間の位置を変数とする関数」で表現できます。

「場」が皆さんにとって理解しづらい理由は、教科書に表現することが難しいからです。特に3次元の場は、どんな手法を使っても表現することは極めて困難です。

表現する手法としては、スカラー場であれば、カラーマップ、等値線(面)での表現があります。また、ベクトル場であれば、グリッド点上での矢印による表現や、流線による表現があります。しかし、せいぜい2次元しか表現できません。皆さんに頭の中で想像してもらおうしかありません。

1.6 単位について

単位とは物事を測る際の基準とする量の事です。その基準量に対して何倍かでもって量を測ります。

秒であれば、1秒を表す時間の長さを定義します。ある時間が、その1秒の5倍であれば「5秒」と呼ぶこととなります。

この基準(単位)が異なってしまうと測定値がずれてしまいますので、しっかり計測すればずれないように基準を国際的に定めています¹。

物事が異なれば加算減算はできないので、異なる単位の量を加算減算する式は存在しません。1+3はできますが、1 m + 3 kg はできません、1 m の棒と 3 kg のリンゴを加える、といっても答えがでないこととなります。この簡単な例なら分かるとは思いますが、難しい計算をやったあとに、単位が異なる量を足した式とかを出している人が結構います。

当然、基準量(単位)の定義が異なれば現れる式が異なってきます。ここではSI(MKSA 有理)単位系を用います。

電磁気学で用いる基本的な単位は m, kg, s(sec), A の4つです。他の量はこの基本単位の組み合わせで表せます。

しかし4つの単位だけですと混乱します。混乱を防ぐために多くの量で独自の単位を定義しています。例えば、V(ボルト)を基本単位だけで表すと $\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$ となってしまいます。また、F(ファラド)は $\text{m}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$ です。このように、異なる単位は、その指数部の値が異なるだけですので、理解がしづらいことが分かります。そのため、V(ボルト)やF(ファラド)といった独自の単位(組立単位と呼びます)をつくります。

組立単位をつくと覚える単位が増えてしまいますが、上のように4つの単位の次数を覚えるよりはマシでしょう。

1.7 なぜ電磁気学は「難しい」のか

一般に「電磁気学は難しい」と言われます。また、私自身の記憶からも、電磁気学が理解し難かった記憶があります。ここでは、なぜ電磁気学は難しいと言われるのか、私なりの考察をまとめておきます。これによって、皆さんが電磁気を勉強する際に、どの点を注意すべきかが分かるのではないかと思います。

電磁気学が難しい理由(1): 「電磁場は3次元ベクトル場」であるから

先程説明した「場」ですが、知識として理解するのはそんなに困難ではなくても、本当に理解するのは少し努力が必要です。さらに、電場や磁場は「ベクトルの場」であり、空間の(無限にある)各点にベクトル量が割り当たっている、という状態です。これを理解しないと、電磁気学は「複雑で難しい」学問になります。

¹細かな値は省きますが、例えば1秒とは、セシウムという原子において、ある準位からある準位に電子が遷移したとき、そのエネルギー差に相当する電磁波が発生するのですが、その電磁波はある周波数を持っているわけで、「その電磁波のX周期分の時間」を1秒とする、とされています。m(メートル)は、「電磁波が真空中をY秒間に進む距離」とされています(つまり、秒の定義が先)。また1kgは、「これが1kgのおもり」というのが保管されています(日本にもコピーがあります。運搬時にはパトカーが先導するくらい大事なものです。現在、このおもりを使った定義は止める議論の最中です)。量を測るには、それらに対して何倍か、ということが問題となります。

さらにこの「3次元のベクトル場」を紙面に表すことは不可能です。理解したものを頭の中に描くことしかできず、そのために最初はイメージしづらいものとなります。

電磁気学が難しい理由 (2): 多くの教科書で、ベクトル場であることをあえて避けているから

イメージしづらい3次元ベクトル場に対して、多くの教科書では「3次元ベクトル場を意識しないで学べるような」アプローチが取られています。最初からスカラーで計算するようにして、計算上の困難さを避けることができるためでしょう。

ところが、このアプローチは大きな問題があると考えられます。最も大きな理由は「ベクトル場の概念に慣れることができない」ことです。概念を身に付けるには、多少の時間と訓練が必要ですが、それを避けては身に付けることができません。

ベクトルで計算する方法は「一般的」であり、どのような場合にも当てはまります。つまり、一つの方法を覚えておけばOKです。一方で、スカラーで計算できるようにするには、それぞれの場合で異なる定式化が必要となります。

電磁気学が難しい理由 (4): ベクトル場の微積分の計算が難しいから

ベクトル場の微積分は慣れるまで時間がかかります。そのため、途中でくじけてしまう人にとっては「難しい」となります。「解き方を覚えればいい」と考えるのではなく、どういう原理なのかを考えてじっくり取り組んで下さい。

電磁気学が難しい理由 (3): 一番簡単な座標系である、デカルト座標系において解ける問題がないから

これまでの勉強で慣れているのが (x, y, z) を用いるデカルト座標系です。しかし、電磁気学の場合は「球対称」「線対称」な構造をしているときに易しい問題で、このときは球座標系や円筒座標系といった、慣れていない座標系になります。「問題は簡単だが、座標系が慣れていない」ため、難しく感じるようになります。

電磁気学が難しい理由 (4): 「物理」と「工学的応用」と「数学」が混ぜて講義されるから

電磁気学そのものは「物理」です。つまり、自然において、電気現象や磁気現象がどんな法則を持っているか(「万有引力の法則」のように)を勉強するものです。

ところが、(特に工学系では)「それを何に应用できるか」がもう一つの主題になってきます。そこで、コンデンサやコイルといった、人間が利用するために作った人工物について勉強する必要があります。そして、その人工物の性能を定量的に表すための、静電容量やインダクタンスといったものも併せて講義されてしまいます。

「電圧」や「電流」はスカラーであり、単なる「量」です(「場」ではない)。従って、微積分は高校生で習ったものと大きく変わりません。しかし電磁気学は「場」を扱います。例えば、微分は「傾き」ですが、空間的に分布している場の場合、色々な方向で色々な傾きが定義できてしまいます(山の傾斜を考えれば、進む方向によって急だったり、緩やかだったり、平らだったり、色々な傾きがあります)。これを一般的に表現する、新しい「数学」=ベクトル解析が必要になります。

上記の3つの要素(物理、工学的応用、数学)が、同時に授業で出てきてしまうことから、混乱してしまうようです。どれが物理でどれが工学的応用なのか、どれが数学の説明でどれが物理の説明なのか、自分でしっかり区別して勉強して下さい。

第2章 電磁気学に必要な計算法

ここからは、電磁気学に必要な計算法について述べます。これまで「数学」の科目で習ってきたことと重複があるかと思いますが、その復習と思って下さい。

数学と呼べるほどのものではなく、単なる計算法と思って下さい。定義と説明と解き方だけという、あまりおもしろくない部分ですが、これを理解してもらわないと、電磁気現象を正確に扱うことができません。土台となるツールですので、自在に使えるようにして、電磁気現象を勉強をする際にわずらわされないようにして下さい。

2.1 ベクトル

2.1.1 ベクトルの基本

大きさと方向を持つ量をベクトルと呼びます。この授業ではベクトルは、太いボールド体で表現します (A, b など)。ノートに書くときは \mathcal{C}, \mathcal{C} のように、1本加えて書いて下さい。

任意ベクトル A は、成分毎に表記すると、一意に表現できます。デカルト座標系では次のようになります。

$$A = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \quad (2.1)$$

$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ は、それぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルです (他の本では i, j, k などを使っています。この講義では、座標パラメタ (x, y, z) に対して、ベクトルを示すためにボールド体とし、さらに単位ベクトルを示す $\hat{}$ を付けて表す形式で統一します)。

成分を用いて、ベクトル A の大きさ $|A|$ は $\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ と表せます。

単位ベクトルは、大きさが1のベクトルです。この授業では、単位ベクトルについては、(ハット) を付けて \hat{A}, \hat{n} などと表します。

任意のベクトル A をそれ自身の大きさで割れば、その結果は大きさが1の、 A の方向を向いた単位ベクトル \hat{A} が得られます。

任意のベクトル A は、その大きさ $|A|$ と方向を表す単位ベクトル $\frac{A}{|A|} \equiv \hat{A}$ の積で、一意に表せます。

$$A = |A| \frac{A}{|A|} = |A| \hat{A} \quad (2.2)$$

2.1.2 内積

直交座標系における3つの基本単位ベクトル (例えば $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$) に対して、自分自身との内積の結果は1、異なるベクトル同士の内積は0となります。即ち、 $\hat{x} \cdot \hat{x} = 1, \hat{x} \cdot \hat{y} = 0, \hat{x} \cdot \hat{z} = 0$ です。これを用いると、ベクトル $A = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$ と $B = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$ の内積は分配則を用いて計算できます。

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) \cdot (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}) \\ &= A_x B_x \hat{x} \cdot \hat{x} + A_x B_y \hat{x} \cdot \hat{y} + A_x B_z \hat{x} \cdot \hat{z} + A_y B_x \hat{y} \cdot \hat{x} + \dots \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (2.3)$$

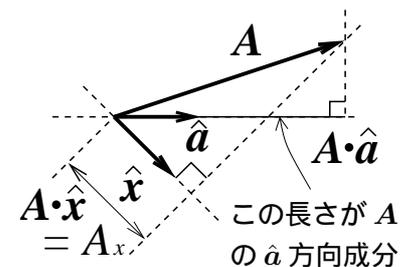


図 2.1: 単位ベクトルとの内積

ベクトル A と x 方向の単位ベクトル \hat{x} との内積は $A \cdot \hat{x} = A_x$ となり、ベクトル A の x 成分となります。同様に任意方向の単位ベクトル \hat{a} との内積 $A \cdot \hat{a}$ の結果は、ベクトル A の \hat{a} 方向成分となります (図 2.1 参照)。

2.1.3 外積

右手座標系とは、「 $+x$ 方向から $+y$ 方向に右ねじを回したとき、ねじの進む方向が $+z$ 方向」とした座標系です (図 2.2 参照)。

外積の定義は、「ベクトル a と b の外積 $a \times b$ は、 a と b に垂直なベクトルであり、 a から b に右ねじを回した方向、その大きさは a と b のつくる平行四辺形の面積」です (図 2.3 参照)。

基本単位ベクトル \hat{x} と \hat{y} の内積を考えると、 $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ となります。同様に、 $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$, $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$ です。また、順序を逆にすると $\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$ となり、他も同様です。

また、同じベクトル同士の外積 $\hat{x} \times \hat{x}$ は、2つのベクトルがつくる平行四辺形の面積が 0 となるので、外積は零ベクトルとなります。

ベクトル $A = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$ と $B = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$ の外積は、分配して同様の規則を適用すれば得られます。

$$\begin{aligned} A \times B &= (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) \times (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}) \\ &= A_x B_x \hat{x} \times \hat{x} + A_x B_y \hat{x} \times \hat{y} + A_x B_z \hat{x} \times \hat{z} \\ &\quad + A_y B_x \hat{y} \times \hat{x} + A_y B_y \hat{y} \times \hat{y} + A_y B_z \hat{y} \times \hat{z} \\ &\quad + A_z B_x \hat{z} \times \hat{x} + A_z B_y \hat{z} \times \hat{y} + A_z B_z \hat{z} \times \hat{z} \\ &= A_x B_y \hat{z} - A_x B_z \hat{y} - A_y B_x \hat{z} + A_y B_z \hat{x} + A_z B_x \hat{y} - A_z B_y \hat{x} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z} \quad (2.4) \end{aligned}$$

スカラー三重積は $A \cdot (B \times C)$ と書かれるもので、 A, B, C の3つの辺でできる平行六面体 (図 2.4 参照) の体積となります (ただし、 B と C のなす角 θ が $0 < \theta < \pi$ 、かつ $B \times C$ と A のなす角 φ は $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ の必要がある)。

巡回的 (サイクリック) といって、以下が成立します。

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) \quad (2.5)$$

ベクトル三重積はありますが、この講義ではあまり使いません。次の公式を覚えておくぐらいで良いでしょう (デカルト座標系で成分毎に分けて公式が成立することを確認してみてください)。

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \quad (2.6)$$

応用: 3点を通る平面: 位置ベクトル a, b, c で表される3点を通る平面の式は、以下のようにして機械的に求めることができます。ベクトル $b-a, c-a$ は平面に平行なベクトルです。従って、 $(b-a) \times (c-a)$ は平面に垂直なベクトルになります。ある点 $r = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ がこの平面にあるとすると、 $r-a$ は平面に平行となります。従って、 $(r-a) \cdot \{(b-a) \times (c-a)\} = 0$ を満足します。整理しますと、 $r \cdot (a \times b + b \times c + c \times a) = a \cdot (b \times c)$ と書けます。

2.2 ベクトル関数 (特に、位置ベクトル関数)

一つ以上のパラメタによって変化するベクトルをベクトル関数と呼びます。パラメタを s としたとき、 $a(s)$ などと書きます。各成分毎に表せば、 $a(s) = a_x(s)\hat{x} + a_y(s)\hat{y} + a_z(s)\hat{z}$ と書けます。

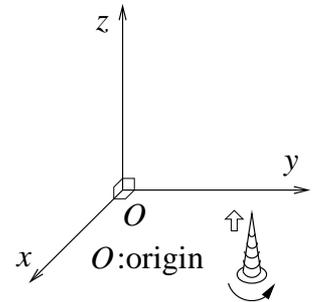


図 2.2: 右手座標系

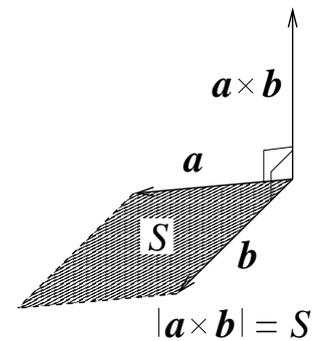


図 2.3: 外積

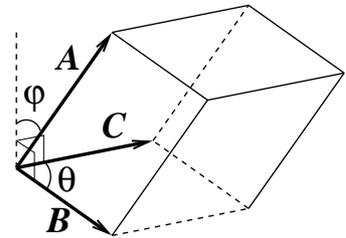


図 2.4: スカラー三重積と平行六面体

ベクトル関数のうち、位置ベクトルの関数はたいへん有用です。パラメタが一つの位置ベクトル関数の場合、その変数を変化させることでベクトル関数の先端は線を描きます。2パラメタの場合は、2変数を独立に動かすと面を描きます。さらに3パラメタの場合は体積を描くことになります。

位置ベクトル関数を用いると、時刻 t における荷電粒子の運動 $r(t)$ などを表現することができます。

3次元空間の位置 x, y, z を3つのパラメタとするベクトル関数 $A(x, y, z)$ を定義できます (これは位置ベクトル関数でなく、普通のベクトル関数です)。空間の各点にベクトルを割り当てることができ、これをベクトル場と呼びます。

2.2.1 経路を表す位置ベクトル関数 $r(s)$

ベクトルの先端が経路 C を動く位置ベクトル関数を $r(s)$ とします。一つのパラメタを持つ位置ベクトルの関数は、そのパラメタの範囲を与えることで空間に経路を表現することができます。 s が範囲 $s_1 \leq s \leq s_2$ を通ることで経路 C を描く、即ち $r(s_1)$ が C の積分経路の始点、 $r(s_2)$ がの終点になります (図 2.5 参照)。

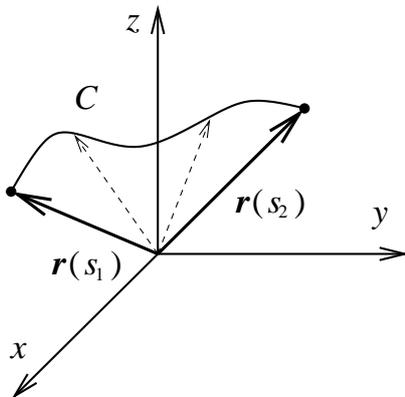


図 2.5: 経路を表すベクトル関数

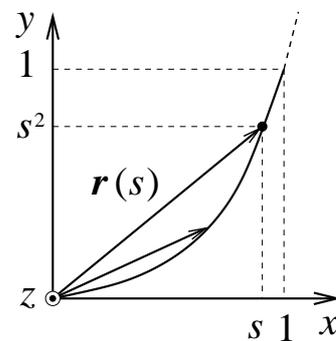


図 2.6: 例 2 の経路

なお、同じ経路を表すベクトル関数は一通りではなく、何通りも存在します。

以下の例のベクトル関数が示す経路を描いてみましょう。

例 2-1. $r(s) = s\hat{x} + 2s\hat{y}$, $0 \leq s \leq 1$

例 2-2. $r(s) = s\hat{x} + s^2\hat{y}$, $0 \leq s \leq 1$ (図 2.6 参照)

例 2-3. $r(s) = 3 \cos \psi \hat{x} + 3 \sin \psi \hat{y}$, $0 \leq \psi \leq \pi$

例 2-4. $r(s) = s\hat{x} + s\hat{y} + s\hat{z}$, $0 \leq s \leq 1$

例 1 については、 s はちょうど座標 x と一致しますので、 $r = x\hat{x} + 2x\hat{y}$, $0 \leq x \leq 1$ というように、座標変数とパラメタを同じ記号にすると分かり易いと思います。

経路の表現法 実際の現象を解析するときは、上の例題とは逆で、“経路が与えられた時に、それを表すベクトル関数とパラメタの範囲を見つける”ことが必要となってきます。ベクトルの加減算などを用いて与えられた経路を見つけるのは多少の訓練が必要です。

1. 経路が直線するとき

例えば始点が a 、終点が b とする。始点から終点に向かうベクトルは $b-a$ 。従って、 $r(s) = a + s(b-a)$, $0 \leq s \leq 1$ とすると見つかります。ただし、それが分かりやすい表現とは限りません。

2. 経路が円弧上するとき

角度をパラメタとした三角関数を使うと比較的簡単です。

経路を表す際の注意 経路を表す位置のベクトル関数を選ぶ際には、以下の注意点を守るようにしましょう。

1. 始点から終点へと移動する際に、パラメタが増える方向に 選ぶようにします。仮に選んだものが減る方向だったら、パラメタに負符号をつけるなどして下さい。
2. うまくパラメタを選ばないと多価関数になってしまいます。(例: $x = y^2$, $-1 \leq y \leq 1$ となる経路は、①: $\mathbf{r}(s) = -s\hat{x} - \sqrt{-s}\hat{y}$, $-1 \leq s \leq 0$, ②: $\mathbf{r}(s) = s\hat{x} + \sqrt{s}\hat{y}$, $0 \leq s \leq 1$ と二つに分ける必要がありますが、 $\mathbf{r}(s) = s^2\hat{x} + s\hat{y}$, $-1 \leq s \leq 1$ とすれば一つで十分です)
3. 経路が滑らかでない場合 (折れている場合など)、一つのベクトル関数で表すことはできません。二つ以上のベクトル関数を用いて経路を表して下さい。

2.2.2 曲面を表すベクトル関数 $\mathbf{r}(u, v)$

2変数の位置ベクトル関数 $\mathbf{r}(u, v)$ は、パラメタ u, v がある範囲 ($u_1 \leq u \leq u_2, v_1 \leq v \leq v_2$) を独立に動くことで面を描きます (「独立に」というのは、 v を動かさずに u を動かしたりできる、という意味です)。この方法で様々な曲面を表現する方法をここでは勉強します。イメージとしては図 2.7 を参照して下さい。

u, v は独立して動きますが、範囲の上限、下限はどちらかに依存することがあります。例えば、 $u_1 \leq u \leq u_2, v_1(u) \leq v \leq v_2(u)$ という感じになります。

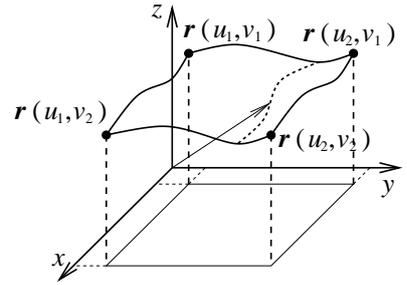


図 2.7: 曲面を表すベクトル関数

例 2-5. $\mathbf{r}(u, v) = u\hat{x} + v\hat{y} + \hat{z}$, $0 \leq u \leq 1, 1 \leq v \leq 2$

例 2-6. $\mathbf{r}(u, v) = u\hat{x} + v\hat{y} + (1 - u - v)\hat{z}$, $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - u$

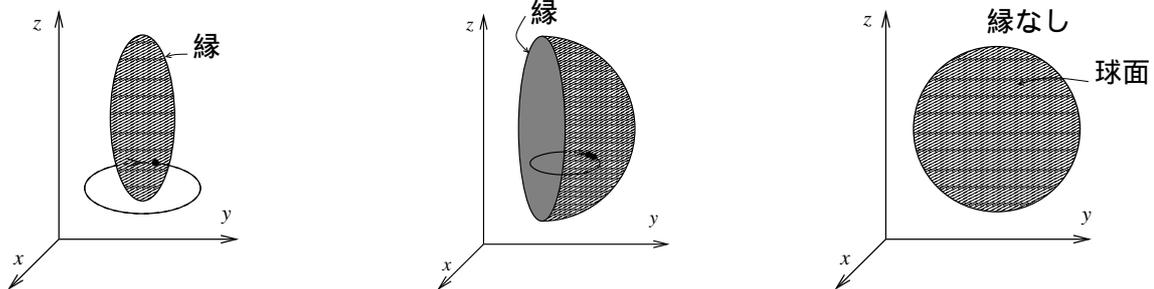
例 2-7. $\mathbf{r}(u, v) = 3 \cos v \sin u\hat{x} + 3 \sin v \sin u\hat{y} + 3 \cos u\hat{z}$, $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2\pi$

例 3 は、 u は球座標系で用いる角度 θ 、 v は角度 ϕ と同一なので、 $\mathbf{r}(\theta, \phi) = 3 \cos \phi \sin \theta\hat{x} + 3 \sin \phi \sin \theta\hat{y} + 3 \cos \theta\hat{z}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ と書くとイメージしやすいかと思います。

曲面が与えられたときに、それを表すベクトル関数とパラメタの範囲を見つけるには、結構な訓練が必要です。

開曲面と閉曲面: 曲面が縁を持っている場合は開曲面と呼びます。曲面が閉じて縁を持たない場合を閉曲面と呼びます (図 2.8 参照)。

また、別の言い方をすると、次のようにも表せます。面には表裏の二面がありますが、面の片側の面からその裏側まで、その面自身を通過せずに移動できるものが開曲面、できないものが閉曲面です。 $\mathbf{r}(\theta, \phi) = a \cos \phi \sin \theta\hat{x} + a \sin \phi \sin \theta\hat{y} + a \cos \theta\hat{z}$, $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ は閉曲面を表し、半径 a の球面となります。



(a)

(b)

(c)

(a) $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u \cos v\hat{z} + u \sin v\hat{x}$, $0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq 2\pi$

(b) $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + a \sin u \cos v\hat{x} + a \sin u \sin v\hat{y} + a \cos u\hat{z}$, $0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq \pi$

(c) $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + a \sin u \cos v\hat{x} + a \sin u \sin v\hat{y} + a \cos u\hat{z}$, $0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi$

図 2.8: 開曲面 (左と中央) と閉曲面 (右)

2.2.3 体積 (領域) を表すベクトル関数 $r(u, v, w)$

三つのパラメタ (例えば u, v, w とする) を持つ位置ベクトル $r(u, v, w)$ と、三つのパラメタの範囲を与えることで、体積 (領域) を設定することができます。

u, v, w が独立に動くこと、またその動く範囲の上限・下限については他の変数に依存する可能性があることは、表面の場合と同じです。

例 2-8. $r(u, v, w) = u\hat{x} + v\hat{y} + w\hat{z}$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$, $0 \leq w \leq 1$ は、一辺が 1 の立方体を表し、その頂点は $0, \hat{x}, \hat{y}, \hat{x} + \hat{y}, \hat{z}, \hat{x} + \hat{z}, \hat{y} + \hat{z}, \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$ にあります。この例ではパラメタ (u, v, w) はデカルト座標系 (x, y, z) に対応するので、 $r(x, y, z) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ と書くとイメージし易いかと思います。

例 2-9. $r(u, v, w) = u \cos w \sin v \hat{x} + u \sin w \sin v \hat{y} + u \cos v \hat{z}$ とし、 $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi, 0 \leq w \leq 2\pi$ の範囲にあるとき、この位置ベクトル $r(u, v, w)$ は原点を中心とする半径 1 の球の領域を表します。この例では、パラメタ (u, v, w) は球座標系の (r, θ, ϕ) に対応しますので、 $r(r, \theta, \phi) = r \cos \phi \sin \theta \hat{x} + r \sin \phi \sin \theta \hat{y} + r \cos \theta \hat{z}$ とし、 $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ と書くと、イメージし易いかと思います。

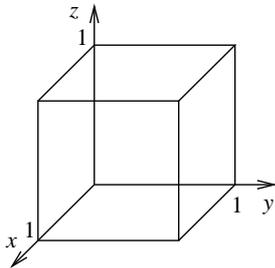


図 2.9: 例 1 のベクトル関数が表現する体積

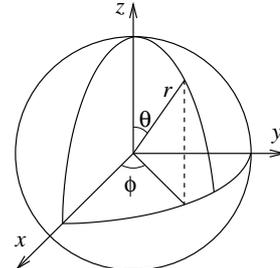


図 2.10: 例 2 のベクトル関数が表現する体積

2.2.4 演習問題

- (1) 図 2.11 に示す、原点から点 P までの経路 C を表すベクトル関数を求めよ。また、パラメタの範囲も示せ。経路 C は直線である。
- (2) 図 2.12 に示す、 Q 点から点 P までの経路 C を表すベクトル関数を求めよ。また、パラメタの範囲も示せ。経路 C は半円周である。
- (3) 図 2.13 に示す、四点を結ぶ平面 S を表すベクトル関数を求めよ。また、パラメタの範囲も示せ。
- (4) 図 2.14 に示す、三点を結ぶ平面 S を表すベクトル関数を求めよ。また、パラメタの範囲も示せ。
- (5) 図 2.15 に示す、円錐の体積領域 V を表すベクトル関数を求めよ。また、パラメタの範囲も示せ。
- (6) 図 2.16 に示す、四角錐の体積領域 V を表すベクトル関数を求めよ。また、パラメタの範囲も示せ。

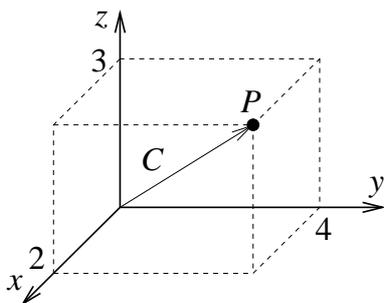


図 2.11: 直線の経路 C

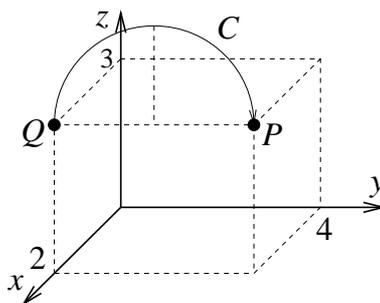


図 2.12: 半円周の経路 C

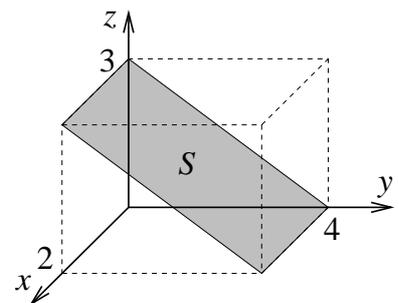


図 2.13: 平面 S

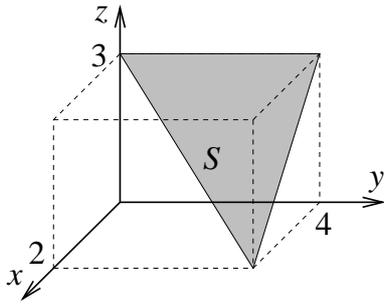


図 2.14: 平面 S

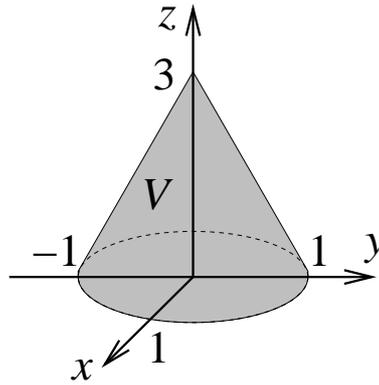


図 2.15: 体積領域 V

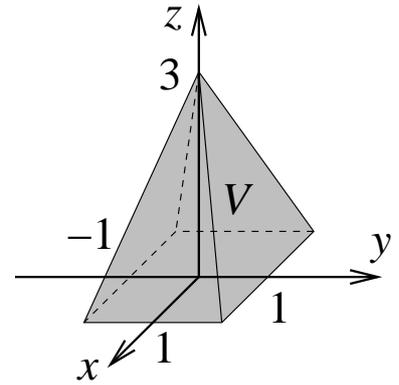


図 2.16: 体積領域 V

2.3 座標系

3次元空間の任意の一点は、3個の独立なパラメタ (=座標と呼びます) で一意に指定できます (「一意」とは一通りという意味です。多少の例外を除き、一点を表す座標は一通りしかありません)。この三つの座標の組み合わせを座標系と呼びます。以下では、3次元空間を表す、最も有名な3つの座標系について説明します。

2.3.1 デカルト座標系 (直角座標系)

基本単位ベクトルとして $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ を用います。

(x_0, y_0, z_0) の座標の点は、位置ベクトル r_0 を基本単位ベクトルを使って $r_0 = x_0\hat{x} + y_0\hat{y} + z_0\hat{z}$ と表すことができます。

前回も言いましたが、「 $+x$ 軸方向から $+y$ 軸方向に回転するとき、その回転で『右ねじ』の進む方向を $+z$ 方向とする」ものを右手座標系と呼びます (何も断りがなければ右手座標系を用います。逆の左手座標系を使うと間違えますので気を付けて下さい)。まずは、 $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ を覚えるのが基本です。

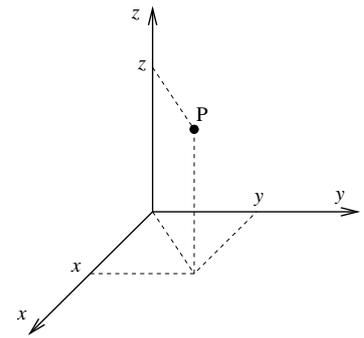


図 2.17: デカルト座標系

2.3.2 円筒座標系 (円柱座標系)

ある点を表す三つのパラメタとして ρ, ϕ, z を用います。

- ρ : xy 平面 ($z = 0$ の面) に射影したとき、その射影した点と原点との距離を ρ とします。
- ϕ : $+x$ 軸と ρ を測った方向との角度を ϕ とします。 $+x$ 軸から $+y$ 軸に回転する方向を正にとります。
- z : デカルト座標と同じ。 z 軸に降ろした (射影した) 位置が z 座標。

三次元空間全体を表すとき、各パラメタの取り得る範囲は、 $\rho : 0 \sim \infty, \phi : 0 \sim 2\pi, z : -\infty \sim \infty$ となります。

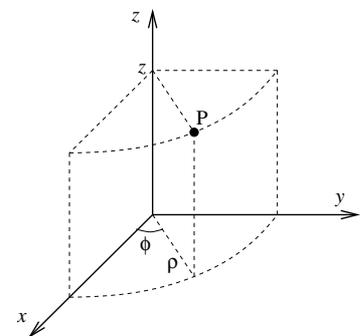


図 2.18: 円筒座標系

円筒座標系の各座標と、デカルト座標系の各座標の関係は以下の通りになります。

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z \tag{2.7}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad z = z \tag{2.8}$$

基本単位ベクトル $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$ は、「ある点における、ある座標方向の基本単位ベクトルの方向」は、「他の2座標を固定して、その座標だけを微小に増やしたときの移動方向」になります。図 2.19 のように、P 点における $\hat{\rho}$ の方向は、 ϕ, z を一定として、 ρ を増やす方向です。

デカルト座標系の基本単位ベクトルを用いると以下のように表せます (図 2.20 参照)。

$$\hat{\rho} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}, \quad \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}, \quad \hat{z} = \hat{z} \tag{2.9}$$

基本ベクトル間関係として、 $\hat{\rho} \times \hat{\phi} = \hat{z}$ があり、これも巡回的に成立します ($\hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{\rho}, \hat{z} \times \hat{\rho} = \hat{\phi}$)。

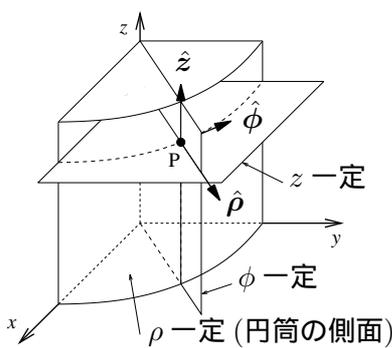


図 2.19: 円筒座標系の基本単位ベクトル

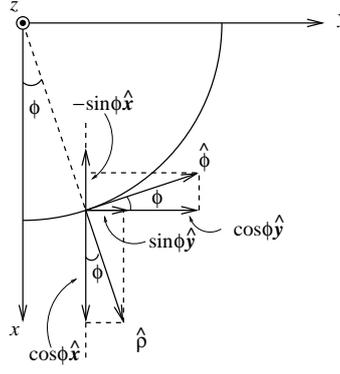


図 2.20: 円筒座標系とデカルト座標系の基本単位ベクトルの関係 1

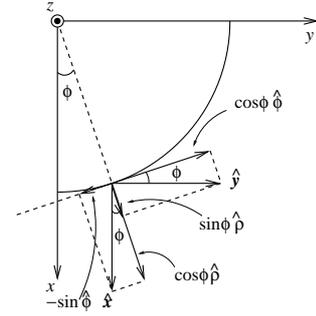


図 2.21: 円筒座標系とデカルト座標系の基本単位ベクトルの関係 2

円筒座標系の基本単位ベクトルは、「どの点を基準にして基本単位ベクトルを定めるか」によって方向が異なってきます。例えば、 $\phi = 0$ の位置を基準とした基本単位ベクトル $\hat{\rho}$ は $\hat{\rho} = \hat{x}$ となりますが、 $\phi = \frac{\pi}{2}$ なら $\hat{\rho} = \hat{y}$ となります。これがデカルト座標系との最も大きな違いです。基本単位ベクトル $\hat{\rho}, \hat{\phi}$ は、基準にする座標 ϕ に依存しますので、正確には $\hat{\rho}(\phi), \hat{\phi}(\phi)$ と書くべきなのですが、省略されることが多いです。

逆に、デカルト座標系の基本単位ベクトルを、円筒座標系のそれを用いて表現すると以下となります (図 2.21 参照)。

$$\hat{x} = \cos \phi \hat{\rho} - \sin \phi \hat{\phi}, \quad \hat{y} = \sin \phi \hat{\rho} + \cos \phi \hat{\phi}, \quad \hat{z} = \hat{z} \tag{2.10}$$

(ρ_0, ϕ_0, z_0) の座標の点の位置ベクトルを r_0 とします。 r_0 を基本単位ベクトルと座標を使って表現すると、 $r_0 = \rho_0 \hat{\rho}(\phi_0) + z_0 \hat{z}$ となります ($r_0 = \rho_0 \hat{\rho}(\phi_0) + \phi_0 \hat{\phi}(\phi_0) + z_0 \hat{z}$ とかではありませんので、気を付けて下さい。しかも、 ϕ_0 は長さの単位を持ってはいませんので、このベクトルの式自体が「あり得ない」ものです。ただし、 ϕ_0 の前に長さ 1 がかけられている場合は長さの単位になりますのであり得ます)。

ϕ_0 以外を基準にした基本単位ベクトルを用いたとき、 $\hat{\rho}, \hat{\phi}$ が異なるので、同じ座標でも表現が異なります。また、座標各点毎に基本単位ベクトルが変わる形で用いることがあります (むしろこちらが一般的)。つまり、 (ρ, ϕ, z) の点において、基本単位ベクトルは $\hat{\rho}(\phi), \hat{\phi}(\phi), \hat{z}$ となります。見て分かる通り、 ρ, z には依存しませんので、 ϕ が同じなら同じベクトルになります。

- 例 1. $\phi = 0$ を基準としたときの円筒座標系の基本単位ベクトルは $\hat{\rho} = \hat{x}, \hat{\phi} = \hat{y}$ となります。
- 例 2. $\phi = \frac{\pi}{6}$ を基準としたときの円筒座標系の基本単位ベクトルは $\hat{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{y}, \hat{\phi} = -\frac{1}{2} \hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{y}$ となります。
- 例 3. $\phi = \frac{\pi}{2}$ を基準としたときの円筒座標系の基本単位ベクトルは $\hat{\rho} = \hat{y}, \hat{\phi} = -\hat{x}$ となります。

例4. $\mathbf{a} = 3\hat{x} + 4\hat{y} + 5\hat{z}$ は、 $\phi = 0$ を基準にした $\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z}$ を用いると、 $\mathbf{a} = 3\hat{\rho}(0) + 4\hat{\phi}(0) + 5\hat{z}$ と表せます。また、 $\phi = \frac{\pi}{6}$ を基準とした基本単位ベクトルを用いると $\mathbf{a} = (\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2)\hat{\rho}(\frac{\pi}{6}) + (-\frac{3}{2} + 2\sqrt{3})\hat{\phi}(\frac{\pi}{6}) + 5\hat{z}$ と表せます。また、 $\phi = \tan^{-1} \frac{4}{3} = \alpha$ を基準にした基本単位ベクトルを用いると $\mathbf{a} = 5\hat{\rho}(\alpha) + 5\hat{z}$ と表せます。

2.3.3 球座標系

球座標系はある点を表す三つのパラメタとして r, θ, ϕ を用います。以下が定義です。

- r : ある点と原点との距離です。
- θ : r を測る方向と z 軸とのなす角です。+ z 軸から $-z$ 軸の方向に正となります。
- ϕ : ある点から xy 平面に射影したとき、原点からその射影した点との方向と x 軸との角度が ϕ (円筒座標系と同じ) と定義されます。

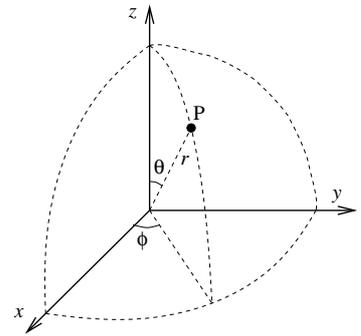
r, θ, ϕ のそれぞれの座標が取り得る値としては、 $r: 0 \sim \infty, \theta: 0 \sim \pi, \phi: 0 \sim 2\pi$ となります。他の座標系との関係は以下の通りになります。

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta, \quad (2.11)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad (2.12)$$

$$\rho = r \sin \theta, \quad \phi = \phi, \quad z = r \cos \theta, \quad (2.13)$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{\rho^2 + z^2}}{z}, \quad \phi = \phi \quad (2.14)$$

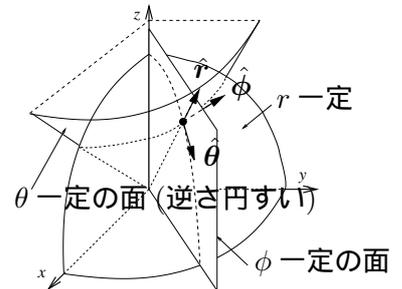


各基本単位ベクトル $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ は以下となります。

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}, \quad (2.15)$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}, \quad (2.16)$$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \quad (2.17)$$



基本ベクトル間の関係として、 $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\phi}$ があり、これも巡回的に成立します ($\hat{\theta} \times \hat{\phi} = \hat{r}, \hat{\phi} \times \hat{r} = \hat{\theta}$)。

また、デカルト座標系の基本単位ベクトルは、球座標系のそれを用いて以下のように表せます。

$$\hat{x} = \sin \theta \cos \phi \hat{r} + \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \sin \phi \hat{\phi}, \quad (2.18)$$

$$\hat{y} = \sin \theta \sin \phi \hat{r} + \cos \theta \sin \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi}, \quad (2.19)$$

$$\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \quad (2.20)$$

上で分かる通り、 $\hat{r}, \hat{\theta}$ は θ, ϕ に依存しますし、 $\hat{\phi}$ は ϕ に依存しますので、 $\hat{r}(\theta, \phi), \hat{\theta}(\theta, \phi), \hat{\phi}(\phi)$ と書くべきですが、通常は変数は省略されています。どこの θ, ϕ を基準とした基本単位ベクトルなのか、注意して下さい。

2.3.4 色々な座標系を使う理由

(例えば球のような) 対称性のよい特殊な構造があったときの物理現象では、物理量がある座標変数に依存しないことがよくあります。例えば、 z 軸に沿って流れる無限長電流がつくる静磁場は、 z 軸に依存しません。

このようなときは、その依存しない座標変数を考える必要はありませんし、物理量はその座標の関数にならずに、他の座標のみに依存することになります。これを使用する変数が少なくなることから“次元の低下”と呼びましょう。

次元の低下が起こる場合は、二次元または一次元の問題に帰着し、問題を解く（電磁場を求める）ことが格段に易しくなることが多いです。つまり、デカルト座標系では三つの座標で解かなければいけない場合でも、球座標系であれば一つの座標で解くことができるようになります。いくつかの電磁場の問題は球対称や軸対称の構造をしていることが多く、これが色々な座標系を使う理由です。

一例として、「真空中において、原点に電荷 Q [C] があるときの $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ における電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 」と考えます。このとき、デカルト座標系を用いたときと、球座標系を用いたときの表記は以下となります。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)} \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (2.21)$$

見ての通り、球座標系では単位ベクトルは一つしか現れず、簡単な表記となっていることが分かります。ここでの \hat{r} は、固定した点を基準にしたものでなく、電界を求めるその点（各点）を基準としたものであることに注意して下さい。

2.4 ベクトル関数の積分

この節では、電磁気学においてよく現れるベクトルの微積分について説明します。特に、以下のベクトルの積分と体積積分については詳細に説明します。

$$\textcircled{1} : \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \quad \textcircled{2} : \iint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}, \quad \textcircled{3} : \iiint_V \phi(\mathbf{r}) dV, \quad \iiint_V \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV, \quad (2.22)$$

2.4.1 単なる微積分

ベクトル関数は微積分できます。基本単位ベクトルが変数に依存しなければ、各成分を微積分するだけで OK です。即ち、 $\mathbf{A}(x, y, z) \equiv \mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x(\mathbf{r})\hat{x} + A_y(\mathbf{r})\hat{y} + A_z(\mathbf{r})\hat{z}$ のとき、

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \hat{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{z} \quad (2.23)$$

$$\int \mathbf{A} dx = \left(\int A_x dx \right) \hat{x} + \left(\int A_y dx \right) \hat{y} + \left(\int A_z dx \right) \hat{z} \quad (2.24)$$

となります。

基本単位ベクトルが変数に依存するような場合、つまり円筒座標系や球座標系のような場合は、依存性に気をつけて微積分する必要があります。すごくややこしくなってしまう場合もありますが、デカルト座標系に直して積分するののも一つの方法です。

2.4.2 ベクトルの経路方向成分の線積分

線素 dr と線素ベクトル $d\mathbf{r}$

s をパラメタとするベクトル関数 $\mathbf{r}(s)$ を考えます。 s がある値（それを s とします）をとって、そこから s を微小に (ds だけ) 増やしたとき、ベクトル関数 $\mathbf{r}(s)$ の先端は微小に移動します。この移動距離を dr とし、移動した変位ベクトル（移動前の点から移動後の点を指すベクトル）を $d\mathbf{r}$ と書きます（図 2.22 参照）。この dr を線素、 $d\mathbf{r}$ を線素ベクトルと呼びます。

このベクトル関数 $r(s)$ を、デカルト座標系の表示で

$$\mathbf{r}(s) = X(s)\hat{x} + Y(s)\hat{y} + Z(s)\hat{z} \quad (2.25)$$

と書いたとします。 $X(s)$, $Y(s)$, $Z(s)$ はそれぞれ s を独立変数とする関数です。 s を微小に ds だけ増やしたとき、 $X(s)$, $Y(s)$, $Z(s)$ は $dX = \frac{dX}{ds}ds$, $dY = \frac{dY}{ds}ds$, $dZ = \frac{dZ}{ds}ds$ だけ増えますので、線素ベクトルは

$$d\mathbf{r}(s) = \frac{dX}{ds}ds\hat{x} + \frac{dY}{ds}ds\hat{y} + \frac{dZ}{ds}ds\hat{z} \quad (2.26)$$

となります。ここで、 $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dX}{ds}\hat{x} + \frac{dY}{ds}\hat{y} + \frac{dZ}{ds}\hat{z}$ ですので、微小変位ベクトルは $d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}ds$ と書けます。もちろん $d\mathbf{r}$ は s の関数です ($d\mathbf{r}(s)$ と書く方が正確と言えます)。

線素 $d\mathbf{r}$ は、線素ベクトル $d\mathbf{r}$ の大きさなので $d\mathbf{r} = |d\mathbf{r}|$ から計算できます。

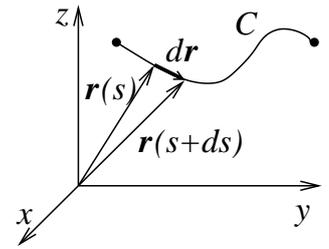


図 2.22: 線素ベクトル

ベクトル場の経路方向線積分

ベクトル場 $A(\mathbf{r})$ が存在するとき、経路 C にわたる経路方向成分の線積分 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ を考えます。

パラメタ s のある値 (それを s とします) での位置 $\mathbf{r}(s)$ の、ベクトル場の値は $A(\mathbf{r}(s)) = A(x(s), y(s), z(s))$ となります。これと線素ベクトルの内積 $A(\mathbf{r}(s)) \cdot d\mathbf{r}(s)$ との内積をとり (内積をとるということは、その演算結果は当然スカラーになります)、それを経路全体にわたって集めることで線積分となります。

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} A(\mathbf{r}(s)) \cdot d\mathbf{r}(s) \quad (2.27)$$

s_1 が経路の始点、 s_2 が経路の終点に相当し、 s_1 から s_2 には s が大きくなる方向にとる必要があることに注意して下さい。

例 1. ベクトル場 $A(\mathbf{r}) = xy^2\hat{x} + y^2\hat{y} + z\hat{z}$ を、図 2.23 に示す経路 C に沿って線積分せよ、即ち $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ を計算せよ。

(解) 経路 C はパラメタ s を用いて、 $\mathbf{r}(s) = \hat{x} + s\hat{y} + \hat{z}$, $0 \leq s \leq 1$ と書けます。このときの線素ベクトル (つまり、 s が微小 ds だけ増えたときの \mathbf{r} の先端の移動ベクトル) は $d\mathbf{r} = ds\hat{y}$ となります (\mathbf{r} は x , z 成分を持っていますが、 $d\mathbf{r}$ は y 成分だけです。 s を増やしたとき、 \mathbf{r} の先端の移動ベクトルがどちら向きか、考えてみてください)。

$\mathbf{r}(s)$ の x 成分は 1、 y 成分は s 、 z 成分は 1 ですから、 $\mathbf{r}(s)$ の位置におけるベクトル場 $A(\mathbf{r})$ の値 $A(\mathbf{r}(s))$ は、 x に 1、 y に s 、 z に 1 を代入して、

$$A(\mathbf{r}(s)) = s^2\hat{x} + s^2\hat{y} + \hat{z} \quad (2.28)$$

となります。つまり、パラメタ s で指定できる C 上の点における、ベクトル場 A の値であり、 s を用いた表現法です。

次に、ベクトル場と線素ベクトルとの内積をとります。

$$A(\mathbf{r}(s)) \cdot d\mathbf{r} = \{s^2\hat{x} + s^2\hat{y} + \hat{z}\} \cdot (ds\hat{y}) = s^2ds \quad (2.29)$$

これが、 $\mathbf{r}(s)$ の点から、(s を ds だけ増やしたときの変位のベクトル) $d\mathbf{r}(s)$ だけ経路に沿って移動したときの量となります。

これを $0 \leq s \leq 1$ の範囲で集めます。即ち、積分します。

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 A(\mathbf{r}(s)) \cdot d\mathbf{r}(s) = \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3} \quad (2.30)$$

これで、経路 C に沿ったベクトル場の線積分の値が得られました。

例 2. ベクトル場 $A(\mathbf{r}) = xy^2\hat{x} + y^2\hat{y} + z\hat{z}$ を、図 2.23 と逆向きの経路 C' に対して、 $\int_{C'} A \cdot d\mathbf{r}$ を計算せよ。

(解) 上の問題と逆の経路になりますので、解は $-\frac{1}{3}$ と予想できます。ここではあえて、同じようにして計算をしてみます (パラメタをどう選ぶかの練習になります)。

経路 C' の方向に、「パラメタが増える」ように選ぶ必要があるため、例えば経路 C' は $\mathbf{r}(s) = \hat{x} - s\hat{y} + \hat{z}$, $-1 \leq s \leq 0$ などと選ぶ必要があります。あるいは、 $\mathbf{r}(s) = \hat{x} + (1-s)\hat{y} + \hat{z}$, $0 \leq s \leq 1$ などと選んでも OK です。どちらも同じ答えが得られます。

計算は各自でやってみて下さい。

例 3. ベクトル場 $A(\mathbf{r}) = y^2x\hat{x} + axy\hat{y} + z\hat{z}$ を、図 2.24 に示す半円周の経路 C に対して、 $\int_C A \cdot d\mathbf{r}$ を計算せよ。

(解) 円周の経路ですので、三角関数を用いて経路を表すのが簡単です。図 2.24 の角度 θ を用いると、始点が $\theta = \pi$ 、終点が $\theta = 0$ となり、経路の方向に沿ってパラメタが減ってしまうこととなります。そこで、 x 軸の負方向からの角度 $\xi = \pi - \theta$ を用いて表記するようにしましょう。

$$\mathbf{r}(\xi) = a \cos \theta \hat{x} + a \sin \theta \hat{y} = a \cos(\pi - \xi) \hat{x} + a \sin(\pi - \xi) \hat{y} = -a \cos \xi \hat{x} + a \sin \xi \hat{y} \quad (2.31)$$

従って、線素ベクトルは $d\mathbf{r} = (a \sin \xi \hat{x} + a \cos \xi \hat{y}) d\xi$ となります。

この位置ベクトルで表される経路 C 上のベクトル場 A は、 $x = -a \cos \xi$, $y = a \sin \xi$, $z = 0$ を代入して、

$$\mathbf{A} = a^2 \sin^2 \xi (-a \cos \xi) \hat{x} + a(-a \cos \xi) a \sin \xi \hat{y} = -a^3 (\sin^2 \xi \cos \xi \hat{x} + \sin \xi \cos \xi \hat{y}) \quad (2.32)$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^\pi -a^3 (\sin^2 \xi \cos \xi \hat{x} + \sin \xi \cos \xi \hat{y}) \cdot (a \sin \xi \hat{x} + a \cos \xi \hat{y}) d\xi \\ &= -a^4 \int_0^\pi \{ \sin^3 \xi \cos \xi + \cos^2 \xi \sin \xi \} d\xi = a^4 \int_0^\pi \{ (1 - \cos^2) \cos \xi + \cos^2 \xi \} (-\sin \xi) d\xi \\ &= a^4 \int_1^{-1} \{ (1 - t^2)t + t^2 \} dt = a^4 \int_{-1}^1 \{ t^3 - t^2 - t \} dt = -\frac{2}{3} a^4 \end{aligned} \quad (2.33)$$

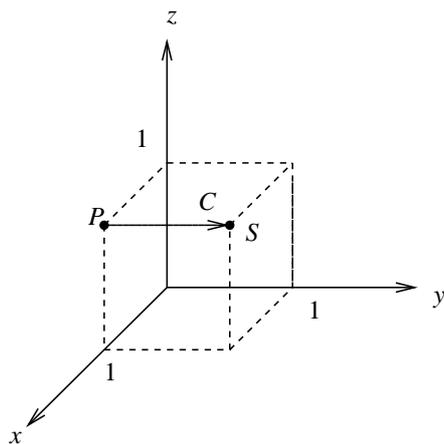


図 2.23: 例 1 の経路

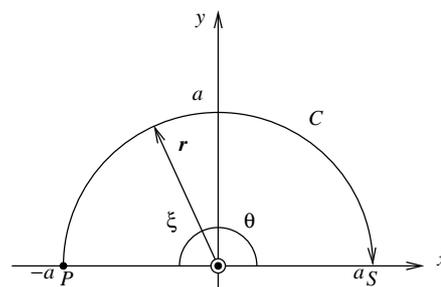


図 2.24: 例 3 の半円周の経路

例 4. 実際への応用例 … 電界中で電荷を移動するときの仕事: 原点に 1 C の電荷があるとき、 $z = 0$ の面内では電界 $E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{x} + y\hat{y}}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ができる。この電界中で電荷 $q\text{ [C]}$ を、経路 $\mathbf{r} = s\hat{x} + (1 + 2s)\hat{y}$, $0 \leq s \leq 1$ に沿って動かすときに要する仕事を考える。

[考え方] 力学で勉強した仕事の定義として、「仕事は、質量をもつ物体に力を加えて移動させたときの、“移動方向距離”と“力の移動方向成分”の積」となります。力の方向が変わったりしたら、それぞれの合計をとります。そこで、電界中の電荷にはどれだけ力をかける必要があるかを考えます。

電荷は電界によって力を受けますので、支えてあげないと飛んでいってしまいます。一方で、静止している電荷に、受ける力と逆向きに同じ力をかければ合力は0となりますので、静止したままです。あとは力は必要ありません(仕事をしなくてよい)ので、そのまま移動すればOKです。

[定式化 = 解析] 今、動かしている電荷が、経路 C 上のある位置にあり、その位置を表すパラメタを s とします。このとき、位置ベクトルは一例として $\mathbf{r}(s) = x(s)\hat{x} + y(s)\hat{y} = s\hat{x} + (1+2s)\hat{y}$ と書けます。この位置ベクトルで表される点の電界は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}(s)) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x(s)\hat{x} + y(s)\hat{y}}{[\{x(s)\}^2 + \{y(s)\}^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{s\hat{x} + (1+2s)\hat{y}}{\{s^2 + (1+2s)^2\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{s\hat{x} + (1+2s)\hat{y}}{(5s^2 + 4s + 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.34)$$

となります。この点では電界に $q\mathbf{E}(\mathbf{r}(s))$ だけの力がかかるので、 $-q\mathbf{E}(\mathbf{r}(s))$ の力をかけながら動かす必要があります。

この点から、経路上に微小な距離だけ動かすベクトルは線素ベクトル $d\mathbf{r}$ で表すことができますので、 $d\mathbf{r} = \left\{ \frac{dx(s)}{ds}\hat{x} + \frac{dy(s)}{ds}\hat{y} \right\} ds = (\hat{x} + 2\hat{y})ds$ となります。この距離だけ動かしたときの微小な仕事 dW は

$$dW = -q\mathbf{E}(\mathbf{r}(s)) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{s\hat{x} + (1+2s)\hat{y}}{(5s^2 + 4s + 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot (\hat{x} + 2\hat{y})ds = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{5s + 2}{(5s^2 + 4s + 1)^{\frac{3}{2}}} ds \quad (2.35)$$

経路全体で動かしたときの仕事は、上記の微小仕事 dW を経路全体 ($0 \leq s \leq 1$) にわたって集めればよいので

$$W = \int dW = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \frac{5s + 2}{(5s^2 + 4s + 1)^{\frac{3}{2}}} ds \quad (2.36)$$

という積分を行えばよいこととなります(定式化終了。これ以降は数学、というより単なる計算です)。

$t = 5s^2 + 4s + 1$ と積分変換すると、 $dt = 2(5s + 2)ds$ であり、 $s: 0 \rightarrow 1$ において、 $t: 1 \rightarrow 10$ より、

$$-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \frac{5s + 2}{(5s^2 + 4s + 1)^{\frac{3}{2}}} ds = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_1^{10} \frac{1}{2} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{10}} \right) \quad (2.37)$$

従って、 $W = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{10}} \right)$ を得ます。

2.4.3 ベクトルの法線方向成分の面積分

二つのパラメタ u, v を持つ位置ベクトル関数 $\mathbf{r}(u, v)$ が、 u, v がある範囲を動くことで面 S を表しているものとします。

この面 S について、あるベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ を以下の式で面積分することを考えます。

$$\iint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.38)$$

面素ベクトル dS

式(2.38)の最後の dS を面素ベクトルと呼びます。面素ベクトル dS は、積分する面上において、微小面積を大きさに持ち、その向きは面に直角です。

ある u において、 v を動かさずに u を微小に増やしたときの変位ベクトルは $\partial_u r = \frac{\partial r}{\partial u} du$ となります。逆に u を動かさずに v を微小に増やしたときは変位ベクトルは $\partial_v r = \frac{\partial r}{\partial v} dv$ となります。 dS はこれらの外積を用いて以下のように書けます (図 2.25 参照)。

$$dS = \partial_u r \times \partial_v r = \frac{\partial r}{\partial u} du \times \frac{\partial r}{\partial v} dv = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} du dv \quad (2.39)$$

例: $r(\theta, \phi) = a \cos \phi \sin \theta \hat{x} + a \sin \phi \sin \theta \hat{y} + a \cos \theta \hat{z}$ とする (θ, ϕ は何らかの範囲を持っている)。

$$dS = \partial_\theta r \times \partial_\phi r = a^2 \sin \theta d\theta d\phi (\sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) = a^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}(\theta, \phi).$$

注意: ここで、外積の順序と面積分したい向きに注意して下さい。逆の場合は $dS = \frac{\partial r}{\partial v} \times \frac{\partial r}{\partial u} du dv$ とすれば OK です。

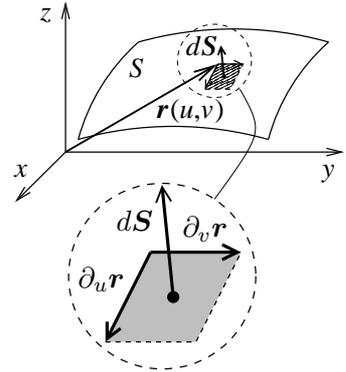


図 2.25: 面素ベクトル

面積分

面積分 $\iint_S A(r) \cdot dS$ は、面積分する表面を表すベクトル関数 $r(u, v)$ と、それによってできた面素ベクトル $dS = \partial_u r \times \partial_v r$ によって、以下で計算できます。

$$\iint_S A \cdot dS = \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} A(r(u, v)) \cdot \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} du dv \quad (2.40)$$

例 1. 図 2.26 に示す影 S を表すベクトル関数とその範囲を求め、ベクトル場 $A(r) = x\hat{x} + y\hat{y} + x^2yz\hat{z}$ に対して、 $\iint_S A \cdot dS$ を求めよ。ただし、 dS の向きは $+z$ 方向とする。

(解) 面 S は、 $r(x, y) = x\hat{x} + y\hat{y} + \hat{z}$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ と表現できます。このとき、 $\partial_x r = dx\hat{x}$, $\partial_y r = dy\hat{y}$ となりますので、 $dS = \partial_x r \times \partial_y r = dx dy \hat{x} \times \hat{y} = dx dy \hat{z}$ を得ます。また、ベクトル関数で表される $r(x, y)$ の点におけるベクトル場は $(x, y, 1)$ を代入して $A(r(x, y)) = x\hat{x} + y\hat{y} + x^2y\hat{z}$ となります。従って、

$$\iint_S A \cdot dS = \int_0^1 \int_0^1 (x\hat{x} + y\hat{y} + x^2y\hat{z}) \cdot \hat{z} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 x^2y dx dy = \frac{1}{6} \quad (2.41)$$

例 2. 図 2.27(a) に示す影の面 S を表すベクトル関数とその範囲を求め、ベクトル場 $A(r) = x\hat{x} + y\hat{y} + x^2yz\hat{z}$ に対して、 $\iint_S A \cdot dS$ を求めよ。ただし、 dS の向きは $+z$ 方向とする。

☞ 積分する面は例 1 の半分となっているが、積分結果は $\frac{1}{2}$ となりますでしょうか？予想を立ててから次を読んでみて下さい。

(解) 面 S を表すベクトル関数は $r(x, y) = x\hat{x} + y\hat{y} + \hat{z}$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$ と表現できます。ここで、 y の範囲が x に依存することに注意して下さい。図を見ればわかる通り、ある x を考えたとき、 y の範囲は x によって変わることが分かります (図 2.27(b))。また、この際には、 y を先に積分してから x について積分する必要があります。従って、

$$\iint_S A \cdot dS = \int_0^1 \int_0^x (x\hat{x} + y\hat{y} + x^2y\hat{z}) \cdot \hat{z} dy dx = \int_0^1 \int_0^x x^2y dy dx = \frac{1}{2} \quad (2.42)$$

例3. 上の例2において、「先に x について積分する」ことを考えます。このとき、ある y についての x の積分範囲を考えますと、面 S を表すベクトル関数とそのパラメタの範囲は $\mathbf{r}(x, y) = x\hat{x} + y\hat{y} + \hat{z}$, $y \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ と表現できます (図 2.27(c))。従って、

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_y^1 (x\hat{x} + y\hat{y} + x^2y\hat{z}) \cdot \hat{z} dx dy = \int_0^1 \int_y^1 x^2y dx dy = \frac{1}{10} \quad (2.43)$$

となり、同じ積分値が得られていることが分かります。

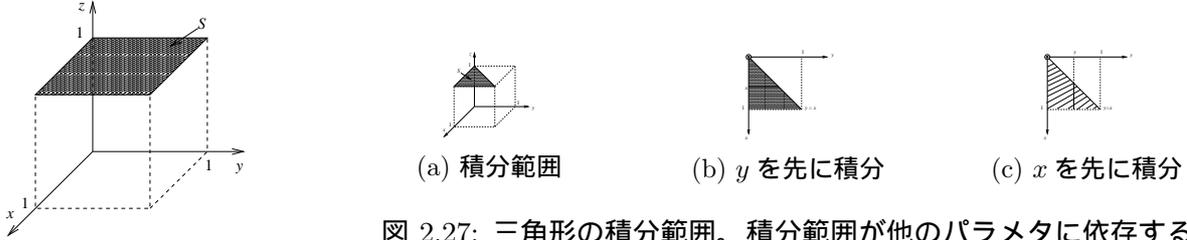


図 2.27: 三角形の積分範囲。積分範囲が他のパラメタに依存する。

図 2.26: 例1の積分範囲

例4. 電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ が出来ている空間を考える。この電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ に対し、半径 a の球面 S 上で $\oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$ を計算せよ。

(解) 半径 a の球面 S は $\mathbf{r}(\theta, \phi) = a \cos \phi \sin \theta \hat{x} + a \sin \phi \sin \theta \hat{y} + a \cos \theta \hat{z}$, $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ で表せます。したがって、面素ベクトル $d\mathbf{S}$ は $d\mathbf{S} = a^2 \sin \theta d\theta d\phi (\sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z})$ となります。また、パラメタ (θ, ϕ) のときの位置 $\mathbf{r}(\theta, \phi)$ における電界は、 $x(\theta, \phi) = a \cos \phi \sin \theta, y(\theta, \phi) = a \sin \phi \sin \theta, z(\theta, \phi) = a \cos \theta$ となりますので、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos \phi \sin \theta \hat{x} + a \sin \phi \sin \theta \hat{y} + a \cos \theta \hat{z}}{(\{a \cos \phi \sin \theta\}^2 + \{a \sin \phi \sin \theta\}^2 + \{a \cos \theta\}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^2} \{\cos \phi \sin \theta \hat{x} + \sin \phi \sin \theta \hat{y} + \cos \theta \hat{z}\} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^2} \{\cos \phi \sin \theta \hat{x} + \sin \phi \sin \theta \hat{y} + \cos \theta \hat{z}\} \cdot a^2 \sin \theta d\theta d\phi (\sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) \\ &= \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} d\theta d\phi \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} d\theta d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \cdot 2 = \frac{1}{\epsilon_0} \quad (2.46)$$

上の計算結果は、のちに勉強する「ガウスの法則」の確認になります。ガウスの法則は、「真空中では、 $\oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$ の積分結果は、その表面 S 内の領域に含まれる電荷 Q の $1/\epsilon_0$ 倍となる」ということです。今回は半径 a [m] の球内には 1 C の電荷が存在していますので、積分結果が $\frac{1}{\epsilon_0}$ になりました。もちろん、閉曲面 S の形がどんなもので、電荷のある点 (今回は原点) を含みさえすれば、同じ積分結果となります。

2.4.4 体積積分

三つのパラメタ u, v, w を持つ位置ベクトル関数 $\mathbf{r}(u, v, w)$ において、各パラメタがある範囲を動くことで領域 V を表しているものとします。このとき、スカラー場 $\varphi(\mathbf{r})$ に対して、次式の領域 V での体積積分を考えます。

$$\iiint_V \varphi(\mathbf{r}) dV \quad (2.47)$$

体積要素 dV

式 (2.47) の最後にある dV を体積要素と呼びます。

体積要素 dV は各パラメタ u, v, w を微小に増加させたときの、微小変位ベクトル $\partial_u \mathbf{r}, \partial_v \mathbf{r}, \partial_w \mathbf{r}$ のスカラー三重積で表せます:

$$dV = \partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r} \bullet \partial_w \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} du dv dw \quad (2.48)$$

ここで、ベクトル三重積の結果が負とならないように選ぶ必要があります。あるいは絶対値をとっても OK でしょう。

例: $\mathbf{r}(r, \theta, \phi) = r \cos \phi \sin \theta \hat{x} + r \sin \phi \sin \theta \hat{y} + r \cos \theta \hat{z}$ とすると、体積要素は次のようにして求められます。

$$\partial_r \mathbf{r} = (\cos \phi \sin \theta \hat{x} + \sin \phi \sin \theta \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) dr \quad (2.49)$$

$$\partial_\theta \mathbf{r} = (\cos \phi \cos \theta \hat{x} + \sin \phi \cos \theta \hat{y} - \sin \theta \hat{z}) r d\theta \quad (2.50)$$

$$\partial_\phi \mathbf{r} = (-\sin \phi \sin \theta \hat{x} + \cos \phi \sin \theta \hat{y}) r d\phi \quad (2.51)$$

$$\partial_r \mathbf{r} \times \partial_\theta \mathbf{r} = (-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}) r dr d\theta \quad (2.52)$$

$$\partial_r \mathbf{r} \times \partial_\theta \mathbf{r} \bullet \partial_\phi \mathbf{r} = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (2.53)$$

体積積分

三つのパラメタ (u, v, w) で表現した体積領域 $\mathbf{r}(u, v, w)$, $u_1 \leq u \leq u_2, v_1 \leq v \leq v_2, w_1 \leq w \leq w_2$ と、体積要素 $dV = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} du dv dw$ によって体積積分が評価できる。

$$\iiint_V \phi dV = \int_{w_1}^{w_2} \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \phi(\mathbf{r}(u, v, w)) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} du dv dw \quad (2.54)$$

被積分関数がベクトル場でも同じです。

$$\iiint_V \mathbf{A} dV = \int_{w_1}^{w_2} \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v, w)) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} du dv dw \quad (2.55)$$

2.5 テイラー (級数) 展開

2.5.1 一変数関数のテイラー展開

「任意の関数を、ある点の周囲において多項式を用いて近似する」ことを考えます。

例えば、 $\sin x$ でもよいし、 $\cos(\sin x^2)$ でもよいのですが、それを $f(x)$ とします。「ある点の周囲」の「ある点」を $x = 0$ としましょう。このとき、

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (2.56)$$

という形で表すことができるものとします。右辺が $f(x)$ と近くなれば、 a_0, a_1, a_2, \dots が求められた、ということになります。

それでは、係数 a_0, a_1, a_2, \dots をどのように選べばよいか、について考えますが、この係数を求めるには前提が必要で、それは「ある点 (今回の場合は $x = 0$) での関数値や微分値が分かっているが分かっている」ということです。つまり、私達は $f(0)$ や、 $f'(0), f''(0), \dots$ を知っているものとします。ここで、 $f'(0)$ は、 $f(x)$ を x で微分した導関数 $\frac{df}{dx}$ に $x = 0$ を代入したものです。その他も同様です。

さて、両辺を x で微分すると、 $\frac{df}{dx}(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$ となりますが、これに $x = 0$ を代入すれば $\frac{df}{dx}(0) = a_1$ を得ます。

以下同様に、さらに微分すれば $\frac{d^2f}{dx^2}(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \dots 3a_4x^2 + \dots$ となりますが、これに $x = 0$ を代入すれば $\frac{d^2f}{dx^2}(0) = 2a_2$ を得ます。

このようにすれば各係数が得られますので、結局、

$$f(x) = f(0) + \frac{df}{dx}(0)x + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dx^2}(0)x^2 + \frac{1}{3 \cdot 2} \frac{d^3f}{dx^3}(0)x^3 + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} \frac{d^4f}{dx^4}(0)x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(0)x^n \quad (2.57)$$

というふうに展開できます。この展開を「 $x = 0$ のまわりでのテイラー (級数) 展開」と呼びます。

勉強のポイント： 式 (2.57) の一番右の辺は一見すると難しそうに見えます。これは、真ん中の辺のように書くと長くなってしましますが、「なるべく短く記述しよう」と色々な記号を定義したため、一見すると難しく見えてしまうためです。

例えば、 $1 + 2 + 3 + \dots$ と書けば易しいですが、 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ と書くと難しく見えるのと同じです。

数学では、このような「短く書くために難しく見える」ことが非常に多くあります。これは慣れれば易しくなりますので、“パツと見” が難しいからと言って読むことを止める (思考を停止する) ようなことはしないで欲しいと思います。

一方で、易しく書くために長く書いているとダラダラと長くなってしまい、見通しも悪く、逆に分かりづらくなってしまいます。初学者にとっては $1 + 2 + \dots$ と書いた方が分かり易いかも知れませんが、全ての式をそう書くわけにはいきません。

この短く書く方法が色々と発明されていますが、この発明がなかったら、今の数学を含む科学・技術の発展はなかったでしょう。

次節で出てくる $\nabla \cdot \mathbf{A}$ もよい例です。これらは、この電磁気学の授業を通してかなりの頻度で出てきます。分からないときは、それに慣れるまでは自分で展開するなどをして下さい。

例 1. e^x を $x = 0$ の周囲で展開すると、 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$

例 2. $\sin x$ を $x = 0$ の周囲で展開すると、 $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$ (図 2.28 参照)

さて、このテイラー展開をしたことで、何が嬉しいのでしょうか？

それは、「今まで出来なかった計算が、出来るようになった」ということです。

例えば、 $f(x) = \sin x$ としたとき、 $x = 0.1$ rad のときの値はいくらでしょうか？これは、ふつうは電卓で計算しないと分かりません。(実際に、電卓で計算してみてください。計算したときは、電卓で計算した値が間違えていないか、確認しましょう。特に、関数電卓で三角関数を計算するときは、入力した値が弧度法の radian なのか、degree(度) なのかを気にして下さい)

テイラー展開の計算ができれば、それに値を入れて

$$\sin 0.1 \approx 0.1 - \frac{1}{3!}0.1^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots = 0.1 - \frac{0.001}{6} + \frac{0.00001}{120} - \dots \approx 0.09983341667 \quad (2.58)$$

となり、かなり良い近似になっていないでしょうか？

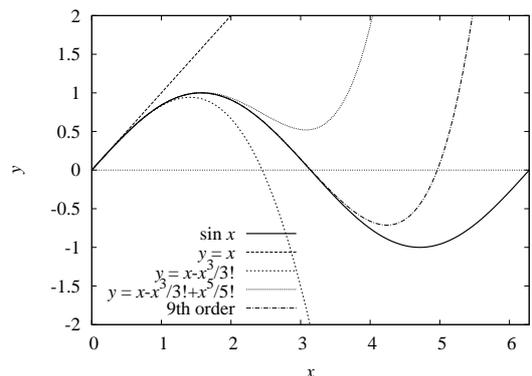


図 2.28: $\sin x$ のテイラー展開。1, 3, 5, 9 次までの展開

つまり、私達は、高校のときから慣れ親しんでいる(?) $\sin x$ ですら、その関数の値として $x = 0.1$ のときも $x = 0.2$ のときも $x = 1$ のときも計算できません。結局、よく分かっていないのです。(値がよく分からないから、“sin” という記号を使っているのです)

一方で、多項式は良く分かっています。複雑な場合はたいへんですが、計算することはできます。つまり、テイラー展開をすることで、「計算できなかった関数値が計算できるようになった」ということが言えます。

さて、式 (2.57) の展開ですが、無限に計算することはできませんので、どこかの有限項で打ち切る必要があります。例えば、 $f(x) = \sin x$ を $x = 0$ の点のまわりでテイラー展開した式で、展開を $N = 1, 3, 5, 11$ の次数までで打ち切ったときの、 $x = 0.1, 0.3, 1.0$ の値を見ていきましょう (表 2.1)。

表 2.1: $\sin x$ のテイラー展開の値

	$x = 0.1$	$x = 0.3$	$x = 1$
$N = 1$	0.10000000	0.30000000	1.00000000
$N = 3$	0.09983333	0.29550000	0.83333333
$N = 5$	0.09983342	0.29552025	0.84166667
$N = 11$	0.09983342	0.29552021	0.84147098
$\sin x$	0.09983342	0.29552021	0.84147098

これを見ますと、 $x = 0.1$ のときは $N = 5$ までの展開で、小数点以下 8 ケタまで正確な値が得られています。 $x = 0.3$ のときは、 $N = 5$ までの展開では小数点以下 7 ケタまで数字は同じですが、7 ケタで丸める (打ち切る) と四捨五入で 0.2955203 になってしまいますので、6 ケタまで正確と言ったところでしょうか。また、 $x = 1$ ですと $N = 5$ までの展開では小数点以下 2 ケタまでしか合わず、 $N = 11$ まで展開すると 8 ケタまで正確な値が出ました。

つまり、展開の項数が少ないとき (低次項までの展開、と言います) は、展開する点 (今回は $x = 0$) のごく近傍のみの近似ができます。また、項数を増やすことでその点から遠い点も近似できるようになります。

$x = 0$ でなく、他の点 (例えば $x = x_0$ とする) の周りでテイラー展開するときは、上記の式を平行移動すれば OK です。次式のように展開できます。

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dx^2}(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3f}{dx^3}(x_0)(x - x_0)^3 + \dots \quad (2.59)$$

例 3. $\sin x$ を $x = \frac{\pi}{4}$ の周囲で展開すると $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{3! \sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})^3 + \dots$

☞ 勉強のポイント: 色々な関数を、色々な点のまわりで展開してみましょう。

例えば、 $\sin x$ を $x = 0$ のまわりで展開したとき、 $x = 1$ のときの値をよく近似するには多くの項が必要でした。 $\sin x$ を $x = \frac{\pi}{3}$ のまわりで展開した式をつかうと、 $x = 1$ のときの値をよく近似するにはどのくらいの項数が必要でしょうか。

2.5.2 多変数関数のテイラー展開

今度はだいぶややこしくなりますので、結果だけを書きます。

関数 $f(x, y, z) = f(\mathbf{r})$ を、点 $\mathbf{r}_0 = x_0\hat{x} + y_0\hat{y} + z_0\hat{z}$ の周囲でテイラー展開することを考えます。結果は

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}) &= f(\mathbf{r}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{r}_0)(z - z_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{r}_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{r}_0)(y - y_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\mathbf{r}_0)(z - z_0)^2 \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{r}_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\mathbf{r}_0)(y - y_0)(z - z_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(\mathbf{r}_0)(z - z_0)(x - x_0) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{D^n f\}(\mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (2.60)$$

となります。ここで、第一項目は0次の項、第二～四項目は1次の項、第五～十項目は2次の項と呼びます。いずれも「 x, y, z で合計何回微分したものか」で数えて下さい。

最右辺にある D ですが、以下の演算子を省略したものです。

$$D = (x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} + (z - z_0) \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.61)$$

これを普通の多項式と思って展開すると、ちょうどその上の式のように展開されます。

上の式の導出の仕方ですが、まず $f(x, y, z)$ を x のみの関数と思ってテイラー展開し、その結果の各項を y の関数と思ってテイラー展開し、最後にその結果の各項を z の関数と思ってテイラー展開することで得られます。

2.6 多変数関数の微分

一変数の関数 $f(x)$ の微分は、よく知られている通り

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \frac{\Delta x}{2}) - f(x - \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.62)$$

となる演算です。

変数が二つ以上の多変数関数の場合、例えば $f(x, y)$ であれば $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ などがありますが、選んだ座標以外の方向の微分(傾き)は考えられないでしょうか。

例えば、 $\hat{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$ 方向の微分として、 \mathbf{r} の点と、 \hat{a} 方向に Δa だけ移動した点との傾きは、

$$\frac{f(\mathbf{r} + \Delta a \hat{a}) - f(\mathbf{r})}{\Delta a} = \frac{f(x + \Delta a a_x, y + \Delta a a_y) - f(x, y)}{\Delta a} \quad (2.63)$$

で定義できます。そこで、 $\Delta a \rightarrow 0$ の極限をとったものを \hat{a} 方向の微分 $\frac{\partial f}{\partial a}$ とします。

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{r} + \Delta a \hat{a}) - f(\mathbf{r})}{\Delta a} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta a a_x, y + \Delta a a_y) - f(x, y)}{\Delta a} \quad (2.64)$$

ここで、

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta a a_x, y + \Delta a a_y) - f(x, y)}{\Delta a} \\ &= \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta a a_x, y + \Delta a a_y) - f(x + \Delta a a_x, y) + f(x + \Delta a a_x, y) - f(x, y)}{\Delta a} \\ &= \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta a a_x, y + \Delta a a_y) - f(x, y + \Delta a a_y)}{\Delta a a_x} a_x + \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta a a_y) - f(x, y)}{\Delta a a_y} a_y \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} a_x + \frac{\partial f}{\partial y} a_y \end{aligned} \quad (2.65)$$

より、

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial x} a_x + \frac{\partial f}{\partial y} a_y \quad (2.66)$$

と書けます。右辺は

$$\frac{\partial f}{\partial x} a_x + \frac{\partial f}{\partial y} a_y = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} \right) \cdot \hat{a} \quad (2.67)$$

と書けます。そこで、

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} \quad (2.68)$$

という記号を導入します。このとき、

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \nabla f \cdot \hat{a} \quad (2.69)$$

と表せます。 ∇f は「グラディエント f 」とか「 f の勾配」とか呼ばれるベクトルであり、任意方向の単位ベクトルとの内積が、その方向の傾きを表すようなベクトルです。¹

三次元の場合は、

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \quad (2.70)$$

となります。

∇f の向き ∇f は、どの方向を向いているのでしょうか。

単位ベクトル \hat{a} の方向をさまざまに変えたとき、 $\nabla f \cdot \hat{a} = \frac{df}{da}$ が最大値を示すのは ∇f と \hat{a} の方向が同じときです。

方向微分 $\frac{df}{da}$ が最大ということは、そのときの \hat{a} が f が最も急に増える方向のときです。このことから、 ∇f は常に f が最大の勾配を示す方向を向いている、ということが言えます。

例題: r を原点との距離としたとき、 $f(r) = \frac{1}{r}$ となるスカラー場 $f(r)$ を考えます。このとき、 ∇f はいくらになるのでしょうか。また、 $f(r)$ の最も急に大きくなる方向はどちらでしょうか、 ∇f の方向と同じとなるか、比べてみましょう。

2.7 無限小領域の積分の密度

この節は少し変な数学を勉強します。こういう導出の仕方はどこの本にも載っていないので、この授業・演習でよく勉強して下さい。

この節では、何を求めるのかと言うと、あるものの“密度”を求めることになります。これは、前節では微分を求めましたが、微分は「値の変化」に対する「距離」の割合(密度)です。この節では、距離の密度ではなく、面積の密度、体積の密度といった、二次元以上の量に対する密度になります。

2.7.1 無限小領域の体積積分の密度

小さな領域 ΔV において、あるスカラー場 $f(\mathbf{r})$ を体積積分し、その体積密度:

$$\frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} f(\mathbf{r}) dV \quad (2.71)$$

を考えます。小さな領域 ΔV を r の点を含むように無限に小さくした極限がどうなるか、という話をします。

¹ ∇f を、 $\text{grad} f$ と書く教科書もあります。

ΔV を小さくすると、積分する領域は小さくなりますので $\iiint_{\Delta V} f(\mathbf{r})dV$ は小さくなります。また、もちろん ΔV も小さくなりますので、 $\frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} f(\mathbf{r})dV$ はどういう値に収束するか、というのが問題になります。答えから言いますと、この積分の密度は $f(\mathbf{r})$ に収束します。つまり式で書くと次のようになります。

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} f(\mathbf{r})dV = f(\mathbf{r}) \quad (2.72)$$

さて、どうして上式のようになるのか、二つの方法で考えます。

一つ目は、だいたい「ざっくばらん」で大雑把な方法です。点 $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = (x, y, z)$ を中心とした微小領域 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ について考えます。その領域で $f(\mathbf{r})$ は一定とみなせ、

$$\frac{1}{\Delta V} \iiint_V f(\mathbf{r})dV = \frac{1}{\Delta V} f(\mathbf{r}) \Delta x \Delta y \Delta z = f(\mathbf{r}) \quad (2.73)$$

とできます。これが一つの導出の仕方です。

次は、より詳細な解析のやり方として、テイラー展開を使って考えましょう。

$f(\mathbf{r})$ は \mathbf{r}' を変数とする関数として ($f(\mathbf{r}')$ として)、 \mathbf{r} の点の周囲でテイラー展開をします。式 (2.60) を参考にすると、

$$\begin{aligned} f(x', y', z') &= f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)(x' - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)(y' - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)(z' - z) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z)(x' - x)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z)(y' - y)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z)(z' - z)^2 \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z)(x' - x)(y' - y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z)(y' - y)(z' - z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z)(z' - z)(x' - x) \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (2.74)$$

と書けます²。

この式の両辺を、 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を中心とする、 $\Delta V = \Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ の領域で体積積分します。

右辺第一項は次のようになります。

$$\begin{aligned} &\int_{z-\frac{1}{2}\Delta z}^{z+\frac{1}{2}\Delta z} \int_{y-\frac{1}{2}\Delta y}^{y+\frac{1}{2}\Delta y} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} f(x, y, z) dx' dy' dz' \\ &= f(x, y, z) \int_{z-\frac{1}{2}\Delta z}^{z+\frac{1}{2}\Delta z} \int_{y-\frac{1}{2}\Delta y}^{y+\frac{1}{2}\Delta y} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} dx' dy' dz' = f(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (2.75)$$

右辺第二項は、

$$\begin{aligned} &\int_{z-\frac{1}{2}\Delta z}^{z+\frac{1}{2}\Delta z} \int_{y-\frac{1}{2}\Delta y}^{y+\frac{1}{2}\Delta y} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)(x' - x) dx' dy' dz' \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \int_{z-\frac{1}{2}\Delta z}^{z+\frac{1}{2}\Delta z} \int_{y-\frac{1}{2}\Delta y}^{y+\frac{1}{2}\Delta y} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} (x' - x) dx' dy' dz' = 0 \end{aligned} \quad (2.76)$$

となります (x' に関する積分で 0 になります)。同様に、第三項目と四項目も 0 となります。

²ここで、右辺第二項は $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$ となっていますが、「 $\frac{\partial f}{\partial x'}(x, y, z)$ と書くべきではないか」と思われるかも知れません。これはどちらも同じ結果です。例えば簡単に一変数で述べると、 $f(x) = x^2$ について、「 x で微分した結果に対して、変数 x を x' で置き換える」と、微分した結果は $\frac{df}{dx}(x) = 2x$ 、置き換えると $\frac{df}{dx}(x') = 2x'$ となります。また「変数 x を x' で置き換えて、 x' で微分する」と、置き換えて $f(x') = 2x'^2$ 、微分して $\frac{df}{dx'}(x') = 2x'$ となり、同じ結果 ($\frac{df}{dx}(x') = \frac{df}{dx'}(x')$) となります。

右辺第五項は、

$$\begin{aligned} & \int_{z-\frac{1}{2}\Delta z}^{z+\frac{1}{2}\Delta z} \int_{y-\frac{1}{2}\Delta y}^{y+\frac{1}{2}\Delta y} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z)(x' - x)^2 dx' dy' dz' \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) \int_{z-\frac{1}{2}\Delta z}^{z+\frac{1}{2}\Delta z} \int_{y-\frac{1}{2}\Delta y}^{y+\frac{1}{2}\Delta y} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} (x' - x)^2 dx' dy' dz' = \frac{1}{24} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) \Delta x^3 \Delta y \Delta z \quad (2.77) \end{aligned}$$

となります。同様に、第六項は $\frac{1}{24} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) \Delta y^3 \Delta z \Delta x$ 、第七項は $\frac{1}{24} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \Delta z^3 \Delta x \Delta y$ となります。また、第八～十項目は 0 となります。

結局、積分結果は

$$\begin{aligned} & \int_{z-\frac{1}{2}\Delta z}^{z+\frac{1}{2}\Delta z} \int_{y-\frac{1}{2}\Delta y}^{y+\frac{1}{2}\Delta y} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} f(x', y', z') dx' dy' dz' = f(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z \\ & + \frac{1}{24} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) \Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) \Delta y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \Delta z^2 \right\} \Delta x \Delta y \Delta z + \dots \quad (2.78) \end{aligned}$$

となります。

この両辺について、 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ で割ってから $\Delta V \rightarrow 0$ の極限をとると、

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} f(\mathbf{r}') dV' &= \lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \int_{z-\frac{1}{2}\Delta z}^{z+\frac{1}{2}\Delta z} \int_{y-\frac{1}{2}\Delta y}^{y+\frac{1}{2}\Delta y} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} f(x', y', z') dx' dy' dz' \\ &= \lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0} \left[f(x, y, z) + \frac{1}{24} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) \Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) \Delta y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \Delta z^2 \right\} + \dots \right] \\ &= f(x, y, z) \quad (2.79) \end{aligned}$$

となり、最初の項のみ残ります。

最後の \dots の部分は、 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ のいずれかが残りますので、 $\Delta V \rightarrow 0$ の極限をとると 0 になってしまいます。

2.7.2 無限小の閉曲面における面積分

次は、小さな領域 ΔV の表面である閉曲面 ΔS において、あるベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ を、閉曲面の外向きを正として面積分をし、その体積密度:

$$\frac{1}{\Delta V} \oiint_{\Delta S} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.80)$$

を考えます³。

³ここでは「ざっくばらん」な手法で説明します。きちんとテイラー展開を使う手法は、自分でやってみてください。例えば式(2.81)であれば、 x は $x \pm \frac{\Delta x}{2}$ で固定ですので、 y, z についてテイラー展開して積分します。

小さな領域 ΔV を r の点を含むように無限に小さくした極限 (当然、 ΔS も無限に小さい閉曲面となる) において、この積分の密度は以下ようになります。

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.81)$$

微小体積を r を中心とする、 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ の領域を考えます。まず $x + \frac{\Delta x}{2}$ 、及び $x - \frac{\Delta x}{2}$ の2面について考えます。このとき、外向きの単位法線ベクトル \hat{n} は、それぞれ \hat{x} 、 $-\hat{x}$ となります。従って、この2面に関して以下となります。

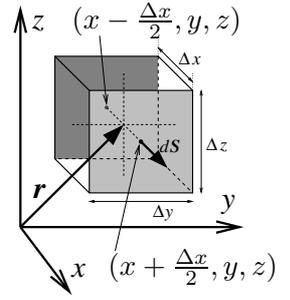


図 2.29: 微小な直方体

$$\iint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{A}(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) \cdot \hat{x} \Delta y \Delta z + \mathbf{A}(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z) \cdot (-\hat{x}) \Delta y \Delta z \quad (2.82)$$

同様にして計算することで、6面全部についての積分は以下ようになります。

$$\begin{aligned} & \iint_{\Delta S} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \mathbf{A}(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) \cdot \hat{x} \Delta y \Delta z + \mathbf{A}(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z) \cdot (-\hat{x}) \Delta y \Delta z \\ & \quad + \mathbf{A}(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) \cdot \hat{y} \Delta z \Delta x + \mathbf{A}(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z) \cdot (-\hat{y}) \Delta z \Delta x \\ & \quad + \mathbf{A}(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}) \cdot \hat{z} \Delta x \Delta y + \mathbf{A}(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}) \cdot (-\hat{z}) \Delta x \Delta y \\ &= \left\{ \frac{A_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) - A_x(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)}{\Delta x} + \frac{A_y(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) - A_y(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)}{\Delta y} \right. \\ & \quad \left. + \frac{A_z(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}) - A_z(x, y, z - \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} \right\} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (2.83)$$

両辺を $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ で割って、 $\Delta V \rightarrow 0$ とすると、

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.84)$$

となります。これで計算ができました。

さて、ここで右辺のちょっと面倒な微分はよく出てくるので、簡単に記述するという目的で

$$\frac{\partial A_x(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\mathbf{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\mathbf{r})}{\partial z} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (2.85)$$

という記号を導入しましょう。 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ は「ダイバージェンス \mathbf{A} ; \mathbf{A} の発散 (をとる)」と読みます。div \mathbf{A} と書いてある本もあります。難しそうに見えますが、単に式 (2.84) の右辺の微分を意味する、省略のための記号です。

2.7.3 無限小面積の開曲面における面積分

$+x$ 軸に垂直な小さい開曲面 ΔS_x において、あるベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ を $+x$ 方向を正として面積分をし、その面積密度:

$$\frac{1}{\Delta S_x} \iint_{\Delta S_x} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.86)$$

を考えます。

面積 ΔS_x を \mathbf{r} の点を中心に無限に小さくした極限において、この積分の密度は $A_x(\mathbf{r})$ となります。

$$\lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_x} \iint_{\Delta S_x} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = A_x(\mathbf{r}) \quad (2.87)$$

ΔS_x を、 $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}$ とする、面積 $\Delta y \Delta z$ の微小面積で考えます (図 2.30 参照)。

$$\frac{1}{\Delta S_x} \iint_{\Delta S_x} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\Delta S_x} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} \Delta y \Delta z = A_x \quad (2.88)$$

$+y, +z$ 軸に垂直な面 $\Delta S_y, \Delta S_z$ における面積分の密度の極限も同様に得られます。

$$\lim_{\Delta S_y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_y} \iint_{\Delta S_y} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = A_y(\mathbf{r}) \quad (2.89)$$

$$\lim_{\Delta S_z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_z} \iint_{\Delta S_z} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = A_z(\mathbf{r}) \quad (2.90)$$

2.7.4 無限小の周回積分路における周回積分

$+x$ 軸に垂直な小さい開曲面 ΔS_x を考え、その曲面の周囲を周回積分路 ΔC_x とします。積分の周回方向は $+x$ 軸を右ねじの進む方向としたときのねじの回転方向と決めます。あるベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ をこの周回路で積分して、その面積密度:

$$\frac{1}{\Delta S_x} \oint_{\Delta C_x} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (2.91)$$

を考えます。

面積 ΔS_x を \mathbf{r} の点を中心に無限に小さくした (即ち、周回積分の経路も無限に小さくなる) 極限において、この積分の密度は以下となる。

$$\lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_x} \oint_{\Delta C_x} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (2.92)$$

図 2.30 に示す面積 $\Delta y \Delta z$ の微小面積で考えます。このとき $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}$ とする、 \mathbf{A} の周回積分は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta S_x} \oint_{\Delta C_x} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \frac{1}{\Delta y \Delta z} \left\{ \mathbf{A}(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) \cdot \hat{\mathbf{z}} \Delta z + \mathbf{A}(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z) \cdot (-\hat{\mathbf{z}} \Delta z) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{A}(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}) \cdot (-\hat{\mathbf{y}}) \Delta y + \mathbf{A}(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}) \cdot \hat{\mathbf{y}} \Delta y \right\} \\ &= \frac{A_z(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) - A_z(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)}{\Delta y} - \frac{A_y(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}) - A_y(x, y, z - \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} \end{aligned} \quad (2.93)$$

$\Delta S_x \rightarrow 0$ の極限をとると以下を得ます。

$$\lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_x} \oint_{\Delta C_x} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (2.94)$$

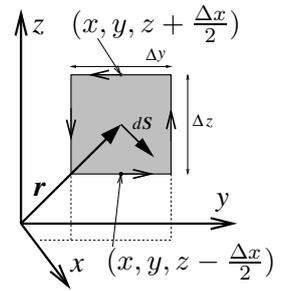


図 2.30: 微小面積

$+y, +z$ 軸に垂直な面 $\Delta S_y, \Delta S_z$ の周囲 $\Delta C_y, \Delta C_z$ における周回積分の面積密度の極限も同様に得られます。

$$\lim_{\Delta S_y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_y} \oint_{\Delta C_y} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (2.95)$$

$$\lim_{\Delta S_z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_z} \oint_{\Delta C_z} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (2.96)$$

式 (2.94), (2.95), (2.96) をそれぞれ x, y, z 成分としたベクトルを $\nabla \times \mathbf{A}$ をいう記号で定義します。

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.97)$$

これは物理学でよく出てくる演算ですので、このような記号で定義されています。 $\nabla \times \mathbf{A}$ を「ローテーション \mathbf{A} 」とか「 \mathbf{A} の回転」とか呼びます。

2.8 公式集: 各座標系における計算式

∇ の記号に関するものをまとめます。導出はデカルト座標系しか説明しませんでした。他の座標系でも同じです。

2.8.1 デカルト座標系

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (2.98)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.99)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (2.100)$$

2.8.2 円筒座標系

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (2.101)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.102)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (2.103)$$

2.8.3 球座標系

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\hat{\phi} \quad (2.104)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right)\hat{\theta} \\ &\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{\phi} \end{aligned} \quad (2.106)$$

2.9 公式集: 恒等式

任意のスカラー場 $\varphi(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r})$ 、および任意のベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r}), \mathbf{B}(\mathbf{r})$ に対して、以下が成立します。

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0 \quad (2.107)$$

$$\nabla\times(\nabla\varphi) = \mathbf{0} \quad (2.108)$$

$$\nabla(\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi \quad (2.109)$$

$$\nabla\cdot(\varphi\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\nabla\varphi + \varphi\nabla\cdot\mathbf{A} \quad (2.110)$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} - (\nabla\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{A} \quad (2.111)$$

$$\nabla\times(\varphi\mathbf{A}) = \nabla\varphi\times\mathbf{A} + \varphi\nabla\times\mathbf{A} \quad (2.112)$$

デカルト座標系などで、本当にそうなるか確認しておくといよいと思います。

2.10 公式集: 積分定理

1. ガウスの定理 (発散定理)

任意の領域 V と、その領域境界の閉曲面 S に対して、以下が成立します。

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A} dV = \oiint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} \quad (2.113)$$

ただし、 $d\mathbf{S}$ の向きは、 V の外向き (V 内から V 外へ向かう方向) です。

2. ストークスの定理

任意の開曲面 S と、その縁の周回路 C に対して、以下が成立します。

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} \quad (2.114)$$

ただし、 $d\mathbf{S}$ の向きと、周回路 C の方向は、右ねじの関係があります (周回路 C の方向にまわしたとき、右ねじが進む方向が $d\mathbf{S}$ の方向)。

3. グリーンの第一恒等式

任意の領域 V と、その領域境界の閉曲面 S に対して、以下が成立します。

$$\iiint_V (\nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \varphi\nabla^2\psi)dV = \iint_S \varphi\nabla\psi \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} dS \quad (2.115)$$

最後の $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ とは、 $d\mathbf{S} = \hat{n}dS$ の法線方向微分を意味します。一般に、 $\nabla\varphi \cdot \hat{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}$ が言えます。

導出) $\nabla \cdot (\varphi\nabla\psi) = \nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \varphi\nabla^2\psi$ より、両辺を領域 V で体積積分して、

$$\iiint_V \nabla \cdot (\varphi\nabla\psi)dV = \iint_S \varphi\nabla\psi \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \varphi\nabla^2\psi)dV$$

4. グリーンの第二恒等式

任意の領域 V と、その領域境界の閉曲面 S に対して、以下が成立します。

$$\iiint_V (\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi)dV = \iint_S (\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \left(\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) dS \quad (2.116)$$

導出) 第一恒等式と、 φ と ψ を入れ替えた式の差を取る。

第3章 真空中の静電界の法則

電気現象の根源は電荷 (電気量) です。電荷には正負が存在します。正負のつけ方は、下の二種の物質を摩擦をして帯電させたとき、

毛皮, ガラス, 雲母, 絹, 綿布, 木材, 琥珀, 樹脂, 金属, 硫黄, セルロイド, …

の左の方の物質に帯電した電荷を正、右の方を負としています。

電荷が存在すると周囲には電場と呼ばれる電氣的な作用を及ぼす状態が空間におこります。この状態が時間的に変化しない状態を静電場 (静電界) と呼びます。また、電場中の電荷は力を受けることが知られています。

電荷の基本単位として C (クーロン) を用います。陽子一つは正電荷 (positive charge)、電子一つは負電荷 (negative charge) で、電荷量は 1.602×10^{-19} C です (非常に小さい量と感ずるかも知れませんが、これは C の単位を大きく設定し過ぎたことも原因があるようです)。

なお本講義において、座標は全て [m] の単位を持つものとして話をします。

3.1 静電気現象を起こす源: 電荷

電荷: 電気を担うもので、電気現象の源となる要素です。電子や陽子が担っており、正負と量が存在します。

「電荷がある」という言葉は、何もない真空中に電荷がある状態だけでなく、正負の電荷が異なる量ある状態を言います。正負の電荷が異なる量ある場合、正負のキャンセル分は除き、正負どちらかに偏った分を「ある」と言います。逆に、「電荷がない」ということは、電荷も何もない状態でもありますが、正負の電荷が同位置に等量ある状態も「ない」と言います。

電荷の基本単位として C (クーロン; $C = A \cdot s$) を用います。

電荷密度 (分布): 一般的には、「単位体積当たり」の電荷を電荷密度と呼びます。

広い意味では、各点での電荷密度が定義できます (つまり、電荷密度は広い意味でスカラー場です)。このときの電荷密度の定義は次のようになります。 r の位置を含む微小体積 ΔV [m^3] を考え、この ΔV に含まれる電荷を ΔQ [C] とします。このとき電荷密度分布 $\rho(r)$ [C/m^3] は以下となります。

$$\rho(r) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad [C/m^3] \quad (3.1)$$

つまり、 r を常に含むよう ΔV を限りなく小さくした極限における、「単位体積当たりの電荷」として定義します。

点電荷: ある電荷量を持つが、極めて体積が小さく点と見なせる電荷を点電荷と呼びます。人間の寸法で物事を扱う場合は、上記の電子や陽子は十分小さな大きさですので点電荷と見なせます。

線電荷: ある電荷量を持つが、極めて細く線と見なせる電荷の分布状態を線電荷と呼びます。

線電荷は「単位長さ当たりの電荷」として表現され、線電荷密度 λ [C/m] で表現されます。

面電荷: ある電荷量を持つが、極めて厚さが薄く面と見なせる電荷の分布状態を面電荷と呼びます。完全導体表面に現れる電荷は面電荷です。

面電荷は単位面積当たりの電荷として、面電荷密度 σ [C/m^2] で表現されます。

導体: 電子が自由に移動できる (自由電子がある) 物質です。物質である以上、多数の原子から構成され、従って電荷は多量に持っていますが、正負等量のため、電気的には中性です。まったく抵抗が存在しない理想的な導体を完全導体と呼びます。

誘電体: 電子が束縛されて移動できない (束縛電子がある) 物質です。電気的には中性です。

静電場 (静電界): 時間的に電気現象が変化しない状態のことを言います。ある量 (スカラー、ベクトル、スカラー場、ベクトル場の全てを含む) の時間微分は必ず 0 となります。これを $\partial/\partial t \rightarrow 0$ と書きます。

静電場は静止した電荷によって発生します。

3.2 クーロンの法則

3.2.1 点電荷間のクーロンの法則

クーロンの法則は電荷間に働く力についての法則です。

電荷間には力が働く。力の大きさは電荷間の距離の 2 乗に反比例し、それぞれの電荷量に比例する。力の方向は 2 つの電荷を結んだ方向であり、2 つの電荷が同符号であれば斥力、異符号であれば引力となる。この力をクーロン力と呼ぶ。

距離の 2 乗に反比例しますので、電荷間の距離が 2 倍になると力の大きさは 1/4 になります¹。また、一方の電荷が 2 倍になると力の大きさは 2 倍になります。

位置 r_0 に Q [C]、位置 r に q [C] の点電荷があるとすると、 q に働く力は

$$F = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (3.2)$$

と書けます。ここで、 $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ は SI 単位系を採用したときの比例係数です。 ϵ_0 は真空の誘電率と呼ばれ、 $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \times 10^{-7} c_0^2} \approx 8.854 \times 10^{-12}$ [F/m] という値と単位を持っています。ここで、 c_0 は真空中の光速であり、およそ $c_0 = 2.998 \times 10^8$ [m/s] です。だいたい、 $c = 3 \times 10^8$ [m/s] です。これを使うと、 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$ です。

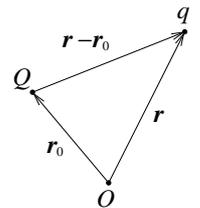


図 3.1: 2 つの点電荷と位置ベクトル

3.2.2 クーロン力の重ね合わせ (線形性)

3 つ以上の電荷があったとき (q, Q_1, Q_2, \dots, Q_N [C] とする)、 q が他の Q_1, Q_2, \dots, Q_N から受けるクーロン力は、それぞれの電荷から受ける各クーロン力の (ベクトル) 和に等しい。

これを重ね合わせと呼びます。また、現象が線形であると言います。2 つ以上のことが、1 つ 1 つの単純な合計のとき、線形と呼びます²。

¹余談: “力の大きさは電荷間の距離の 2 乗に反比例” と述べましたが、距離の 2 乗に反比例は実験的な観測結果であり、厳密に 2 乗とは言い切れません。ただし“(2+ δ) 乗に反比例”としたとき、1772 年にキャベンディッシュは $|\delta| \leq 0.02$ という上限を導き、その 100 年後にマクスウェルの実験で $|\delta| \leq 5 \times 10^{-5}$ と示しました。100 年以上前にこのような実験が行われているのは驚くべきことだと思います (皆さんは実験をしようと思っできませんでしょうか?)。

また 1936 年に Plimpton と Lawton は $|\delta| < 10^{-9}$ ということを示す実験を行ったそうです。1971 年に行われた実験では $\delta = (2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}$ という結果が得られています。即ち、実験によれば“極めて 2 乗に反比例に近い”と言えます。(以上は Jackson, *Classical Electrodynamics* より引用)

²線形でないケースは非線形と言います。例えば、フックの法則 (フックのスペルは Hooke です。Newton と同時代の人物です) は、バネの伸びに対して力が比例する、ということですが、バネが伸びきってしまうと力は比例しません。ここでは線形が成立しません。

クーロン力の重ね合わせを式で書けば以下ようになります。 q が r の位置にあり、 Q_1, Q_2, \dots, Q_N が r_1, r_2, \dots, r_N の位置にあるとき、

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots = \frac{qQ_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{qQ_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} + \dots = \sum_{n=1}^N \frac{qQ_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3} \quad (3.3)$$

3.3 電界

3.3.1 電界の定義

クーロンの法則は「直接2つの電荷間に力が働く」という記述になっていますが(遠隔作用; action at distance)、現在の電磁気学では「片方の電荷により空間に電界 (electric field) が発生し、その電界中にもう一方の電荷があることで力を受ける」という解釈を採用しています(近接作用; action through medium といいます)。また、この解釈でないと電磁波の伝搬の説明ができないことになります。

近接作用の解釈は式としては次のようになります。まず、式(3.2)を次のように分けます。

$$\mathbf{F} = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.4)$$

右辺の意味は「 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は、 r_0 にある点電荷 Q によって位置 r にできた電界であり、そこに点電荷 q があることで $\mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ の力を受ける」となります。

遠隔作用の場合は、二つの電荷があって初めて「力」が発生します。一方で、近接作用の場合は、電荷 q があるがなかろうが、電荷 Q があればその周囲の空間に「電界」が発生している、という解釈です(でも、電界ができていることを確認するには、そこに電荷を置いて力が働くかで判断する必要があります)。

r が任意の位置を表す位置ベクトルとすると、電界は位置ベクトルの関数となります(即ち、電界はベクトル場です)。 r_0 にある点電荷 Q によってできる電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は以下で与えられます。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (3.5)$$

電界の単位は式(3.4)から [N/C] となりますが、電磁気学では別の表記である [V/m] を通常用います。もちろんどちらも同じ次元の単位です。

3.3.2 電界の重ね合わせ

重ね合わせの理: 2つ以上の電荷によってできる電界は、それぞれの電荷によってできる電界のベクトル和で表される。

位置 r_1, r_2, \dots, r_N にある電荷量 Q_1, Q_2, \dots, Q_N の N 個の点電荷がつくる電界は、式(3.3)からも分かるように以下となります。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3} \quad (3.6)$$

電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ による電界: 電荷が点電荷としてでなく、領域 V_0 内に連続な電荷として電荷密度分布 $\rho(\mathbf{r})$ [C/m³] で分布しているときを考えましょう。領域 V_0 は三つのパラメタをもつベクトル関数 r_0 で表されるものとします。この分布した電荷がつくる電界は次のように与えられます。位置 r_0 における微小体積 dV_0 中に含まれる電荷 dQ は

$$dQ = \rho(\mathbf{r}_0) dV_0$$

ですので、この電荷が位置 r につくる電界 $dE(r)$ は

$$dE(r) = \frac{dQ(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = \frac{\rho(\mathbf{r}_0)dV_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}$$

となります。連続的に分布した電荷の場合、これを全て重ね合わせて(積分して)以下となります。

$$E(r) = \int dE(r) = \iiint_{V_0} \frac{\rho(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dV_0 \quad (3.7)$$

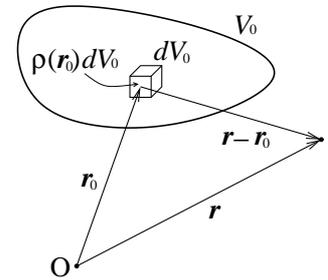


図 3.2: 体積状に分布する電荷のつくる電界

面電荷による電界 曲面 S_0 上に面電荷密度 $\sigma(\mathbf{r}_0)$ [C/m²] で面電荷が分布しているとき、この面電荷がつくる電界を求めます。曲面 S_0 は二つのパラメタをもつベクトル関数 r_0 で表されるものとします。

r_0 における微小面積 $dS_0 = |dS_0|$ に含まれる電荷 $dQ = \sigma(\mathbf{r}_0)dS_0$ が r につくる電界 $dE(r)$ は

$$dE(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(\mathbf{r}_0)dS_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (3.8)$$

ですので、面全体の電荷がつくる電界は以下となります。

$$E(r) = \int dE(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_0} \frac{\sigma(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dS_0 \quad (3.9)$$

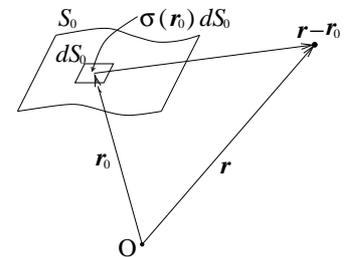


図 3.3: 面状に分布する電荷のつくる電界

線電荷による電界 線電荷が経路 C_0 上に存在しているものとします。経路 C_0 は一つのパラメタをもつ位置ベクトル r_0 で表されるものとします。線電荷密度 $\lambda(\mathbf{r}_0)$ が与えられたとき、この線上に分布した電荷がつくる電界を求めます。

r_0 における微小部分 $dr_0 = |dr_0|$ が r につくる電界 $dE(r)$ は

$$dE(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(\mathbf{r}_0)dr_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (3.10)$$

となりますので、 C_0 に分布した線電荷全体がつくる電界はこれらを合わせ、以下となります。

$$E(r) = \int dE(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{C_0} \frac{\lambda(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dr_0 \quad (3.11)$$

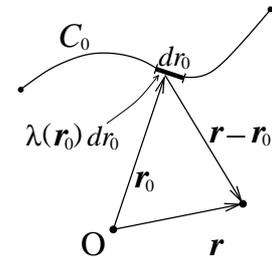


図 3.4: 線状に分布する電荷のつくる電界

問 3.3-1. $q = 20\mu$ C, $Q = -300\mu$ C で、 q は $(x, y, z) = (0, 1, 2)$ m に、 Q は $(x, y, z) = (2, 0, 0)$ m にあるとき、 q に働く力(ベクトル)と、力の大きさを求めよ。(μ は 10^{-6})

問 3.3-2. 図 3.5 のように、半径 a [m] の円形の細い線電荷(全電荷が Q [C])が一様に分布しているとき、その中心軸上において中心からの距離 x [m] における電界を求めよ。

問 3.3-3. 図 3.6 のように、半径 a [m] の円板上に一様な面密度 σ [C/m²] の電荷が分布しているとき、その中心軸上において中心からの距離 x [m] における電界を求めよ。

問 3.3-4. 無限平板状に一様な面密度 σ [C/m²] の電荷が分布しているとき、平板からの距離 x [m] における電

界を求めよ。

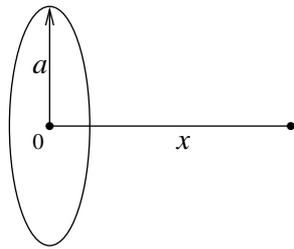


図 3.5: 円形の細い線電荷

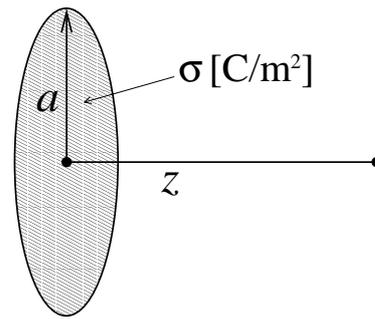


図 3.6: 円盤状の面電荷

3.3.3 電界の様子

電界は3次元ベクトル場であり、3次元空間中の全ての各点にベクトル量が割り当たっている物理量です。これを平面に表現するのは極めて困難で、実際にはどこかの特徴的な一面のみを表現せざるを得ません。また、その一面においても、スカラー場ならよいのですが、ベクトル場の表示はたいへん困難です。ですから教科書に電界の様子を書くことは難しいものがあり、これが皆さんに電界などの「場」のイメージをつかみにくくしている理由の一つです。

よく用いられるベクトル場の表示方法は、“流線”によるものと、直接に離散的な位置での“ベクトル”をプロットする手法があります。以下に、次の3つのケースの場合の、流線とベクトルによる表示方法を示します。

(1) ケース A: 正電荷が一つある場合、(2) ケース B: 正負等量の電荷が一つずつある場合、(3) ケース C: 等量の正電荷が二つある場合

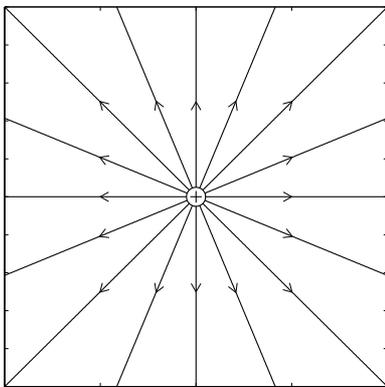


図 3.7: ケース A の流線表示

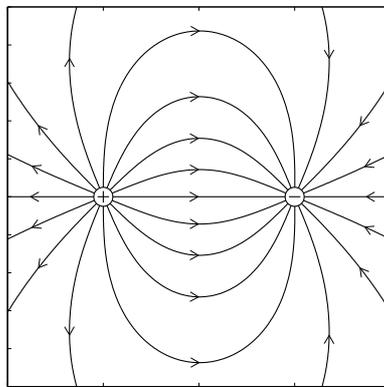


図 3.8: ケース B の流線表示

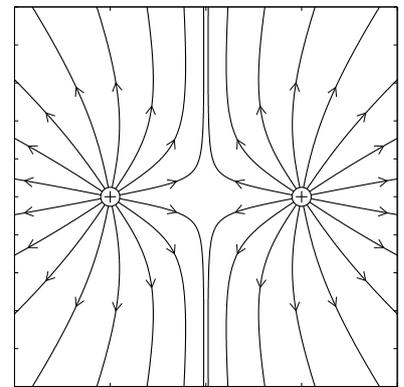


図 3.9: ケース C の流線表示

流線による表示は、各位置のベクトルの向いた方向をつなぎ合わせて一本の線とする手法です。各点のベクトルの向きは流線の接線方向から推測する必要があります。また、ベクトルの大きさ(電界なら強さ)は、線の密度から推測する必要があります(線が密集しているところは電界が強い)。向きはともかく、大きさは目分量の推測ではかなりアバウトになってしまいます。ただ、電界の向きについてはだいぶ分かり易いというのが利

点です。

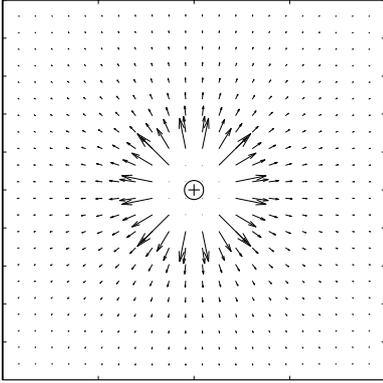


図 3.10: ケース A のベクトル表示

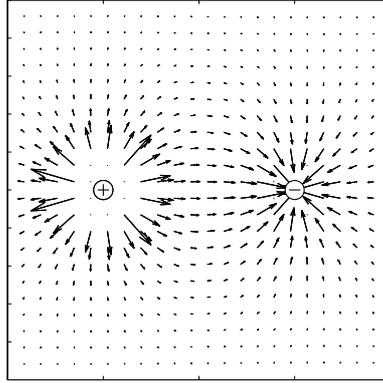


図 3.11: ケース B のベクトル表示

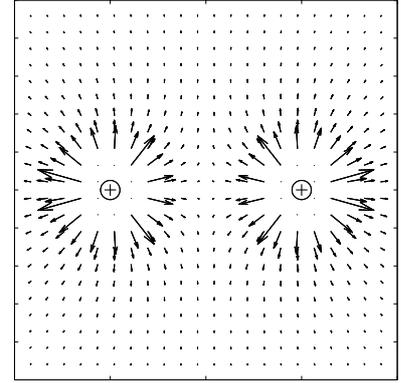


図 3.12: ケース C のベクトル表示

ベクトルで表示したとき、矢印がきちんと見えるところでは、各点のベクトル量は大きさ、方向ともに分かりやすいと思います³。しかし、電界の強さが距離の2乗に反比例するため、電荷周辺と少し離れたところで矢印の大きさが大きく異なっていて、離れた点では矢印が小さ過ぎて分かりにくいと思います(さらに、上の図では電荷の極近傍のベクトルは大き過ぎて、図をはみ出してしまうので、描いていません)。

図 3.7 から 3.12 は電荷を含む「平面」の場を表したものですが、実際にはこれが3次元空間に分布しています。これを紙面に書くことは困難なことが分かるかと思います。訓練によって頭の中で想像するしかありません。

3.4 静電界の法則

電荷分布を変えれば様々な(ベクトル場である)電界が形成されます。しかし、どのようなベクトル場の電界を形成しても電界が必ず持っている性質が二つあって、それは「電界の性質」=「法則」としてまとめられています。

電界の法則の二つのうちの 하나가、ガウスの法則です。もう一つの法則は名前がありませんが、“電界を任意の周回積分路で周回積分した結果は0”という法則です。この講義では便宜上、“静電界渦なしの法則”と名付けることにします⁴。この名前の理由は次の通りです。流線が渦をまいて始点と終点を持たないとき、渦に沿った周回積分は0ではありません。ところが、静電界においては周回積分は常に0で、つまり「渦をまいていない」こととなります。このような理由で「渦なしの法則」としました⁵。

³ベクトル表示ではベクトルの大きさは電界の単位であるのに対し、描いているところは長さの単位を持つ空間です。従って、電界の大きさと同じ長さのベクトルを描く必要はありません(長さが絶対的な電界の大きさを表さない)。適当にスケール化して、見易い長さで描いてよいことになります。

⁴この法則が名前を持たない理由ですが、これはファラデーの電磁誘導の法則の、一つの特異な形(静止した場)に過ぎないからです。

⁵静電界とは逆に、後で勉強する磁場は、「全て渦」という場です

3.4.1 ガウスの法則

真空中の任意の領域 V に対し、その周囲の閉曲面 S を貫く電界の総量は、その領域 V に含まれる電荷を Q [C] とすると、 $\frac{Q}{\epsilon_0}$ に等しい。

$$\oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (3.12)$$

Q を電荷密度分布 $\rho(\mathbf{r})$ [C/m³] を用いて表すと以下となる。

$$\oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{r}) dV \quad (3.13)$$

この法則は、どのような電界にも必ず共通する性質です。つまり、どの領域 V をとって、どのような電荷分布であっても (結果として、どのような静電界の分布であっても)、常に成立している法則です (法則ですので、「証明」されているわけではありません。証明は不可能で、単に、これまでこの法則に反する事実が見つかっていない、ということです)。

領域 V の外側に電荷があった場合、できる電界 $E(\mathbf{r})$ は異なりますが、不思議なことに、積分した結果は同じままで、領域 V 内の電荷だけで決まります。

ガウスの法則は、クーロンの法則から得られる静電界の式を使って導出することができます。クーロンの法則より導出する手法はいくつかの教科書に載っていますので、ここでは解説しません (面倒な割に、あまり意味がありません)。このガウスの法則は、クーロンの法則と同様に、電界を調べることで導き出された法則と思ってもらえれば OK です。

また式 (3.13) において、領域を微小にし、体積当たりの密度とするため、両辺をその微小な体積 ΔV で割って $\Delta V \rightarrow 0$ の極限をとります。

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{\Delta S} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} \rho(\mathbf{r}) dV \quad (3.14)$$

この極限を、以前に講義した「無限小領域の積分の密度」を使って計算することで、次式のガウスの法則の微分形が得られます。

ガウスの法則の微分形

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (3.15)$$

この式で分かりづらいことは、両辺とも「位置の関数」ということです。 $E(\mathbf{r})$ はもちろん位置の関数 (つまり、場) ですが、その発散をとった $\nabla \cdot E(\mathbf{r})$ も位置の関数です。だから正確には、発散をとった $\nabla \cdot E$ が r の関数という意味で、 $\{\nabla \cdot E\}(r)$ と書いてよいと思います (そういう書き方をする教科書もごく稀にあります)。

しかも、 $E(\mathbf{r})$ はベクトル場だったのに、発散をとった $\nabla \cdot E(\mathbf{r})$ はスカラー場です。発散をとった $\nabla \cdot E(\mathbf{r})$ が、 $\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$ というスカラー場に等しい、ということを言っています。

それに対して、式 (3.13) は V で積分をしてしまった後ですので、積分した後の値になっています。「値=値」という式です。

微分形は、任意の位置の一点において常に両辺が等しい、ということでもありますし、それと同時に、全ての点で両辺が等しくなる、ということも言っています。

例題: 点電荷 Q [C] が原点に存在している。原点を中心とした半径 a [m] の球領域 V に関して、ガウスの法則が成立していることを確認せよ。

方針: (問題が与えられたとき、何を問われているのか、何を示せばよいのか、それへの手立ては何か、を考えましょう)

原点を中心とする半径 a [m] の球面 S に対して、電界を面積分した結果が、 $\frac{Q}{\epsilon_0}$ になることを確認すればよい。
電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は以下で与えられる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.16)$$

計算: 球面 S は、パラメタ θ, ϕ を持つベクトル関数 $\mathbf{r}(\theta, \phi) = a(\cos\phi\sin\theta\hat{x} + \sin\phi\sin\theta\hat{y} + \cos\theta\hat{z}) = a\hat{r}$ であり、パラメタの範囲は $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$ となる。

球面外向きの面素ベクトルは

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}d\theta \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi}d\phi = a^2(\cos\phi\sin\theta\hat{x} + \sin\phi\sin\theta\hat{y} + \cos\theta\hat{z})\sin\theta d\theta d\phi = a^2\hat{r}\sin\theta d\theta d\phi \quad (3.17)$$

となります。 $\mathbf{r}(\theta, \phi)$ における電界は

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a(\cos\phi\sin\theta\hat{x} + \sin\phi\sin\theta\hat{y} + \cos\theta\hat{z})}{(a^2\cos^2\phi\sin^2\theta + a^2\sin^2\phi\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{a^2} \quad (3.18)$$

となりますので、

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\hat{r}}{a^2} \cdot a^2\hat{r}\sin\theta d\theta d\phi = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (3.19)$$

を得ます。即ち、電界の S 上の閉曲面積分は、 V 内の総電荷量の $\frac{1}{\epsilon_0}$ 倍に等しいことが得られたこととなります。

問 3.4-1. 点電荷 Q [C] が原点に存在している。 z 軸を中心軸とする円筒 (中心が原点、高さ h [m]、半径 a [m]) の領域 V に関して、ガウスの法則が成立していることを確認せよ。

3.4.2 ガウスの法則の応用 (?)

電荷が“ある対称性”をもって存在し、それによって電界が空間中对称性をもって生成されるとき、ガウスの法則を利用することで簡単に電界が求められる場合があります。ただ、注意してもらいたいのは、一般にはガウスの法則は電荷と電界を積分した量の関係でしかなく、一点における電界を求められるものではない、ということです⁶。

たいへん限定された、数少ない、実際には何の役にも立たないような電荷分布のときのみ、ガウスの法則を使って電界が求められると言ってよいでしょう。

ガウスの法則を適用するには、対称性を持った電荷がつくる電界の方向、および強度分布の対称性を (感覚的に) 知る必要があります。

例題 1. 図 3.13 のように半径 a [m] の球内に電荷 Q [C] が一様に分布している場合を考えます。

この場合、球内に電荷が一様に分布しているので、電界は球の中心から放射状に分布し、大きさは中心からの距離 r のみに依存するように分布します。従って、図のように、半径 r における同心球面 S でガウスの法則を適用すると、

⁶下線を引いた「一般には」は、初回の講義で述べた意味での「一般」で、「何にでも当てはまる」という意味です。

$r > a$ において、

$$\begin{aligned} \oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} &= \oiint_S E_r(r) \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dS = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ E_r(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \end{aligned} \quad (3.20)$$

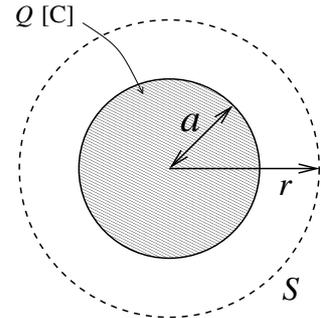


図 3.13: 半径 a の球状に分布する電荷

$r \leq a$ において、 $\rho(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi a^3/3}$, ($r \leq a$) より、

$$\begin{aligned} \oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} &= 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{4\pi a^3/3} \frac{4\pi r^3}{3} \\ E_r(r) &= \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \mathbf{r} \end{aligned} \quad (3.21)$$

例題 2. 無限平板状に電荷が一様な面電荷密度 σ [C/m²] で分布しているときの電界について考えます。対称性から、電界は平板に垂直にでき、平板からの距離 d が等しければ大きさは同じになるように分布します。また電界の様子は平板に対して面对称で、面の片側にできた電界分布の鏡写しのような分布が反対側にできます。

また、ここでは面電荷分布なので、 V 内の総電荷量は面積分で得られることに注意して下さい。

上面と下面が無限平板と平行となる筒型の領域 (底面積 S , 高さ $2d$) でガウスの法則を適用すると、

$$\oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 2S \cdot E(d) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iint \sigma dS = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}, \quad E(d) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (3.22)$$

となります。

この結果には興味深い点の一つあり、それは強度は d に依存していないことです。面に近かろうが遠かろうが、面が無限大だと電界強度は同じになる、ということです。

問 3.4-2. 図 3.14 のように半径 a の無限長円筒内に電荷が一様に分布している場合を考える。単位長さあたり λ [C/m] で分布としたとき、中心軸から距離 ρ [m] における電界を求めよ。

問 3.4-3. 図 3.15 のような半径 a_1 の導体球と、同心球である中空導体球 (内半径 a_2 , 外半径 a'_2) がある。以下の場合について、電界を求めよ。

- (1) 内側の導体球にのみ、 Q [C] の電荷を与えたとき。
- (2) 外側の中空導体球にのみ、 Q [C] の電荷を与えたとき。

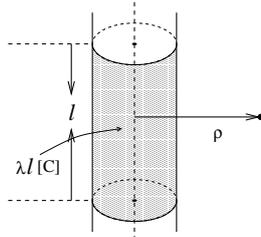


図 3.14: 無限長円筒電荷

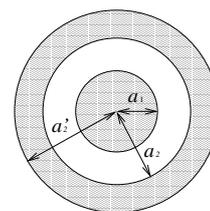


図 3.15: 同心 2 導体球

3.4.3 静電界渦なし (?) の法則

どのような周回積分路 C をとっても、静電界の周回積分は常に 0 となる。

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (3.23)$$

これをこの授業内では静電界渦なしの法則と名付けます⁷。これは、静電界のベクトル場を描くと、渦をまくような分布にはならず、それを式(3.23)が示しているためです。

もし仮に渦を巻いたような分布の場合、式(3.23)の左辺の値は、 C を渦に沿った積分路を選んだときに、0にはなりません。

式(3.23)は、その積分路が作る面積で割った密度について、積分路(がつくる面積)を無限に小さくした極限を考えると、2.7.4節で説明したように、面の向いている方向によって次の3つの式が得られます。

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (3.24)$$

従って、微分形の渦なしの法則は以下となります。

$$\text{微分形の渦なしの法則:} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.25)$$

さて、静電界渦なしの法則から、いくつかの性質が導けます。

静電界の線積分は経路によらず一定 静電界渦なしの法則から、閉じていない経路に沿って静電界を線積分したとき、始点と終点と同じであればどのような経路でも積分値は一定であることが導き出せます。

[説明] 図に示すように任意の周回積分路 C 上の2点 P, Q とその間にある A, B を考えます。周回積分路 C を2つの積分路 ($C_1: P \rightarrow A \rightarrow Q$ と $C_2: Q \rightarrow B \rightarrow P$) に分けます。このとき、渦なしの法則より

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (3.26)$$

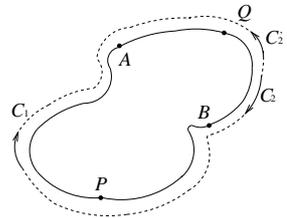
が言えます。

C_2 の積分路を逆にした積分路 $C'_2: P \rightarrow B \rightarrow Q$ を考えると、

$$\int_{C_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{C'_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (3.27)$$

$$\therefore \int_{C_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \int_{C'_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{C_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (3.28)$$



が言えます。周回積分路 C は任意ですので、この式は始点 P と終点 Q が同じであれば、静電界の線積分

$$\int_{P \rightarrow Q} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

は、経路によらず常に値が一定であることを示していることとなります。

3.5 電位

3.5.1 静電場中で電荷を移動させたときになした仕事

電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 内で、位置 r_A から r_B まで、ある経路 C に沿って電荷 q [C] を移動させたときになした仕事を求めましょう。

⁷この法則の名前は、この講義で便宜上つけているだけということを気を付けて下さい。授業の外で「静電界渦なしの法則」とは言わないようにしましょう。

なんでそんな紛らわしいことをしているのかと言うと、この法則は静電界を説明する上で、ガウスの法則と並んで大事な二大法則の一つなのですが、名前がありませんので、皆さんが理解しやすいような名前であえて命名している、という意図があるためです。

まず、経路 C を一つのパラメタのベクトル関数 r で表現します。経路 C 中の一点 r において、経路に沿う微小線素ベクトル dr 分だけ電荷を移動させたときを考えます。

その点の電界は $E(r)$ であり、電荷には $qE(r)$ の力が働きます。そこで、その反対の力 $-qE(r)$ をかけないと電荷は移動してしまうことになります。その力をかけながら、ベクトル dr 分だけ移動するので、なした仕事 dW は $dW = -qE(r) \cdot dr$ となります。

経路全体にわたって動かしたときの仕事 W [J] は、全ての経路にわたる寄与から以下で与えられます。

$$W = \int_C dW = -q \int_C E(r) \cdot dr \quad (3.29)$$

問 3.5-1. 電荷 Q [C] が原点におかれている。これによってできる電界 $E(r)$ 中を、図 3.16 に示す 2 つの経路で電荷 q [C] を移動する。(2 つの経路は始点と終点は \hat{y} , $3\hat{y}$ である。 C_2 は $2\hat{y}$ を中心とする半円周。図は $z = 0$ の面内)

- (a) 2 つの経路 C_1, C_2 を表すベクトル関数をそれぞれ求めよ。また、パラメタの範囲も示せ。
 (b) 2 つの経路 C_1, C_2 で移動したときに要する仕事 W_1, W_2 を求め、 $W_1 = W_2$ となることを示せ。

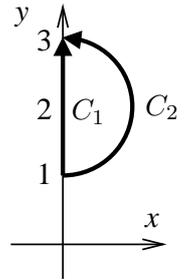


図 3.16: 経路

3.5.2 電位 (静電ポテンシャル) の定義

静電界中で電荷を移動したときの仕事は、電界の線積分で求められます。また、静電界の線積分が経路によらず一定ですので、始点と終点さえ決まれば仕事は決定できることになります。

そこで、適当に基準点 r_Z を定め、基準点 r_Z から任意の点 r までの単位電荷を移動させたときの仕事:

$$\varphi(r) = - \int_{r_Z}^r E(r) \cdot dr \quad (3.30)$$

を定めておくと、仕事を求める際に都合がよいことになります。 $\varphi(r)$ を点 r_Z に対する点 r の電位と呼ぶことにします。電位の単位は [J/C]=[V] です。

例えば、 $r_P \rightarrow r_Q$ へ電荷 q [C] を移動したときは、どのような経路を選んでも良いので、一旦基準点 r_Z を通るような経路を選べば、

$$\begin{aligned} -q \int_{r_P}^{r_Q} E(r) \cdot dr &= -q \int_{r_P}^{r_Z} E(r) \cdot dr - q \int_{r_Z}^{r_Q} E(r) \cdot dr \\ &= -q \int_{r_Z}^{r_Q} E(r) \cdot dr - q \left(- \int_{r_Z}^{r_P} E(r) \cdot dr \right) = q \{ \varphi(r_Q) - \varphi(r_P) \} \end{aligned} \quad (3.31)$$

となり、 P, Q 点の電位の差 (=電位差) を用いて表すことが出来ます。通常は、基準点は無限遠にとることが多いです。

静電界中で電荷を移動させたときの仕事は、移動する前後の電位の差に、電荷量かけたものに等しい。

これまでの話の流れを、もう一度まとめます。

- 静電界渦なしの法則が成立しているので、電界の線積分は始点と終点が決まれば (経路によらず) 値が決まる、
- 電界中で電荷を移動させたときの仕事は、電界の線積分に関係しているので、始点と終点が決まれば仕事が決まる、

- 仕事は移動する電荷に比例するので、単位電荷あたりの仕事に分かれればよく、それを電位と定義する、
- どこかに基準点を定めて、その基準点に対し、空間の全ての点の電位を定義する、
- 結局、電荷 q [C] をある点から別の点に移動したときの仕事は、二点間の電位差に q をかけたものに等しい、

となります。上の事項は論理的につながっていますので、別々に覚えるのではなく、上から下に順に(頭の中で)導き出せるように理解して下さい。

あとは「通常、基準点は無限遠にとることが多い」ということだけ気を付ければ OK です。

「何で無限遠？」と思われるかと思えます。これは次のような理由によります。電荷から離れば電界は小さくなってゆき、無限遠では電界は 0 に十分近付きます。電界が強い点でなく、そのような電界がほぼ 0 となる点を基準にとる、というのが理由です。

3.5.3 点電荷がつくる電位分布

まず、原点におかれた電荷量 Q の点電荷が、位置 $\mathbf{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$ につくる電位について求めましょう(基準点は無限遠にします)。

まず、この電荷がつくる電界は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{(r')^3} \quad (3.32)$$

となります。

途中の経路には依らないので、原点から \mathbf{r}' への放射方向に、無限遠から直線上に沿って \mathbf{r}' まで移動するものとします。このときの経路はパラメタ s を用いて、

$$\mathbf{r}(s) = -s(\sin\theta\cos\phi\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z}) = -s\hat{r}', \quad -\infty \leq s \leq -r' \quad (3.33)$$

と表せます。ここで、 θ, ϕ は \mathbf{r}' の方向で、 $\mathbf{r}' = r'(\sin\theta\cos\phi\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z})$ です。また、負符号はパラメタの範囲について、始点から終点までパラメタ s が増えるように設定するためです。このとき、 $d\mathbf{r} = -\hat{r}'ds$ となります。 $\mathbf{r}(s)$ における電界は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}(s)) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-s\hat{r}'}{|-s\hat{r}'|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-s\hat{r}'}{-s^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}'}{s^2} \quad (\because s < 0) \quad (3.34)$$

となります。ここで、 s は負の値を常にとりますので、 $|-s^3| = -s^3$ であることに注意して下さい。

従って、電位は単位電荷を移動したときの仕事になりますので、

$$\varphi(\mathbf{r}') = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{-r'} \frac{\hat{r}'}{s^2} \cdot (-\hat{r}'ds) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{-r'} \frac{1}{s^2} ds = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}'|} \quad (3.35)$$

を得ます。一般に、原点にある点電荷 Q [C] が \mathbf{r} につくる電位は

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|} \quad (3.36)$$

で与えられることとなります。原点でなく、位置 \mathbf{r}_0 に点電荷があるときは、平行移動により、電位は以下となります。

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (3.37)$$

3.5.4 各種電荷のつくる電位

線電荷 $\lambda(r)$ [C/m]、面電荷 $\sigma(r)$ [C/m²]、体積電荷分布 $\rho(r)$ [C/m³] がつくる電位は、重ね合わせの原理より、積分によって得られます。

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_C \frac{\lambda(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (3.38)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \iint_S \frac{\sigma(\mathbf{r}_0) dS_0}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (3.39)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}_0) dV_0}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (3.40)$$

クーロンの法則から電界を求めるときと考え方は同じですので、ここでは詳しい説明は省略します。

問 3.5-2. 長さ $2l$ の直線線分状に電荷が線密度 λ [C/m] で分布しているとき、線分の中心から直角に距離 r 離れた点での電位を求めよ。

問 3.5-3. 図 3.17 のように、半径 a [m] の円形の線電荷 (全電荷 Q [C]) が一様に分布しているとき、その中心軸上において中心からの距離 x における電位を求めよ。

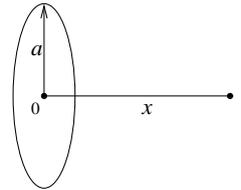


図 3.17: 円形の線電荷

3.5.5 電界と電位の関係

電界 $E(\mathbf{r})$ が与えられたとき、電位 $\varphi(\mathbf{r})$ は上述のように積分によって求められます。

$$\varphi(\mathbf{r}) = - \int_{r_z}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (3.41)$$

逆に、電位 $\varphi(\mathbf{r})$ が与えられたときに電界 $E(\mathbf{r})$ は求めることができるでしょうか？

この答えは「イエス」で、電位 $\varphi(\mathbf{r})$ が分かれば、電界 $E(\mathbf{r})$ は分かります。

そのやり方は、上記の積分を移動距離当たりの密度にして、積分範囲を限りなく小さくしたときの極限として求めることができます。実際に計算してみましょう。

任意の点 $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ を中心に $+x$ 方向に微小距離 Δx だけ移動することを考えます。つまり、 $(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)$ から $(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z)$ まで移動することになります。

この経路を表すベクトルは $\mathbf{r}' = x'\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ となり (この際 y, z は定数と思って下さい)、 $d\mathbf{r}' = dx'\hat{x}$ より、

$$- \int_{r - \frac{\Delta x}{2}\hat{x}}^{r + \frac{\Delta x}{2}\hat{x}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = - \int_{x - \frac{\Delta x}{2}}^{x + \frac{\Delta x}{2}} \mathbf{E}(x', y, z) \cdot \hat{x} dx' = - \int_{x - \frac{\Delta x}{2}}^{x + \frac{\Delta x}{2}} E_x(x', y, z) dx' \quad (3.42)$$

ここで、 Δx の範囲は十分小さいものとし、関数 $E_x(x', y, z)$ の点 x における変化は一次関数で近似できます。即ち、

$$E_x(x', y, z) \approx E_x(x, y, z) + \frac{\partial E_x}{\partial x}(x, y, z)(x' - x) \quad (3.43)$$

となります^{8,9}。従って、積分は

$$\begin{aligned} & - \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} E_x(x', y, z) dx' \approx - \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \left\{ E_x(x, y, z) + \frac{\partial E_x}{\partial x}(x, y, z)(x' - x) \right\} dx' \\ & = - \left\{ E_x(x, y, z) \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} dx' + \frac{\partial E_x}{\partial x}(x, y, z) \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} (x' - x) dx' \right\} \\ & = -E_x(x, y, z) \Delta x = \varphi(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) - \varphi(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z) \end{aligned} \quad (3.44)$$

となります¹⁰。式変形すると

$$E_x(\mathbf{r}) \approx - \frac{\varphi(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) - \varphi(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)}{\Delta x} \quad (3.45)$$

となります。 $\Delta x \rightarrow 0$ の極限をとれば近似でなくなりますので、

$$E_x(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{r-\frac{\Delta x}{2}\hat{x}}^{r+\frac{\Delta x}{2}\hat{x}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = - \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x} \quad (3.46)$$

を得ます。

同様に、それぞれ y, z 方向に $\Delta y, \Delta z$ だけ移動したときを計算し、 $\Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ の極限をとることで

$$E_y(\mathbf{r}) = - \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial y}, \quad E_z(\mathbf{r}) = - \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial z} \quad (3.47)$$

を得ます。即ち電位 $\varphi(\mathbf{r})$ を x, y, z で偏微分して負の符号をつけたものは、その点の電界の x, y, z 成分となります。 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ をベクトルで表現すると

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_x(\mathbf{r})\hat{x} + E_y(\mathbf{r})\hat{y} + E_z(\mathbf{r})\hat{z} = - \left\{ \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial z} \hat{z} \right\} \quad (3.48)$$

となります。上式右辺は2.6節で説明した勾配なので、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi(\mathbf{r}) \quad (3.49)$$

と言えます。つまり、電位 $\varphi(\mathbf{r})$ が分かったときに、電界はこの式で計算ができることとなります。

これは式(3.41)の積分領域を極めて小さくして、 \mathbf{r} の一点に関する法則に直したものです。式(3.41)と等価であり、空間の一点に関する表現と言えます。

問3.5-4. 式(3.37)の静電ポテンシャル $\varphi(\mathbf{r})$ に対して、 $-\nabla \varphi(\mathbf{r})$ を計算せよ。これが、 r_0 に点電荷 Q [C]があるときの \mathbf{r} における電界となっているか確認せよ。

電位の存在意義: 一般に、ある電荷分布に対して電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ を求めたいとき、直接クーロンの法則から求めるときは、3成分 (x, y, z 成分)の積分をそれぞれ実行する必要があります。

一方で、電位 $\varphi(\mathbf{r})$ はスカラー場ですので、電位を求める作業は、積分は一回で済むこととなります。

そこで電界を直接求める代わりに、一旦電位を求め、電位が得られたらその勾配から電界を求めることで比較的簡単に電界を導出することができます。この方法は二回の手続きが必要であるが、各手続きが簡単なため、結果として容易な方法と言えます。

工学では、問題を解く際にこのような「回り道」が多く存在します。つまり、直接解こうとするのではなく、一旦別の形にして、それについて解き、最後に元の形に戻して解を得るという方法です。この方法の例として、フーリエ変換やラプラス変換などの積分変換があります。

⁸正確には $\frac{\partial E_x}{\partial x}(x, y, z)$ でなく、 $\frac{\partial E_x}{\partial x'}(x, y, z)$ であるが、「 x' を変数とする関数を x' で微分して x 代入」は、同じ関数を x の変数として微分したものに等しいですね。

⁹二次以上の項を考慮してもよいが、最後の $\Delta x \rightarrow 0$ の極限操作時には0となります。ぜひ、一度は手を使って確認してみてください。

¹⁰結局、0次関数で近似して、 $E_x(x', y, z) \approx E_x(x, y, z)$ としたのと同じ結果となってしまいます。

電気双極子 (電気ダイポール) がつくる電位分布 電荷量が等しく、正負の符号が逆の 2 つの電荷が十分近い距離に存在するとき、その 2 つの電荷をひとまとめに見て、「双極子 (dipole; ダイポール)」と呼びます。

“十分近い”とは、ダイポールの作る電界に着目するとき、着目している電界の位置とダイポール間の距離が、2 つの電荷間の距離に比べて十分大きいという意味です (図 3.18 参照)。つまり、 $|r| \gg d$ と言えます。逆に言えば、ダイポールの電荷間の距離が十分に小さい、という意味です。

座標系を適当にとり、原点にダイポールの中心、正負の電荷 $\pm q$ [C] はそれぞれ $+\frac{d}{2}\hat{z}$, $-\frac{d}{2}\hat{z}$ [m] に位置するものとします。

$|r| \gg d$ となるような位置 r の電位 $\varphi(r)$ [V] は次のようにして求めることができます。

こういう場合 (記号 \gg や \ll が現れる場合) は、「近似」をします。どういう近似をするかと言いますと、 $|r| \gg d \Leftrightarrow \frac{d}{|r|} \ll 1$ ですので、 $\zeta = \frac{d}{|r|} \ll 1$ という変数 ζ がほぼ 0 であり、 ζ を変数とする関数を $\zeta = 0$ のまわりでテイラー展開して、適当な有限の項数で打ち切ることが可能、というわけです。

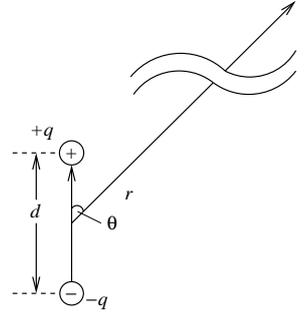


図 3.18: ダイポール

さて、実際に計算をしましょう。計算に先立ち、 r と z 軸のなす角を θ とします。このとき、 $+\frac{d}{2}\hat{z}$ に位置する $+q$ [C] の電荷による r の電位を求めます。電荷から、求める電位の位置までの距離は

$$\begin{aligned} \left| r - \frac{d}{2}\hat{z} \right| &= \left\{ \left(r \cos \theta - \frac{d}{2} \right)^2 + (r \sin \theta)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ r^2 - rd \cos \theta + \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= r \left\{ 1 - \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{r} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = r \left\{ 1 - \zeta \cos \theta + \frac{1}{4} \zeta^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.50)$$

となります。ここまでは近似はなく、厳密に計算しています。

ここから近似をしましょう。電位は距離の反比例、即ち $\frac{1}{|r - \frac{d}{2}\hat{z}|}$ が関係しますので、関数 $\{1 - \zeta \cos \theta + \frac{1}{4}\zeta^2\}^{-\frac{1}{2}}$ を $\zeta = 0$ のまわりでテイラー展開します。

$$\left(1 - \zeta \cos \theta + \frac{\zeta^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\zeta}{2} \cos \theta + \frac{\zeta^2}{8} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (3.51)$$

ここでは、 ζ の 1 次の項までで打ち切りましょう。2 次以上は十分に小さいので無視できる、と考えます。

従って、 $+\frac{d}{2}\hat{z}$ に位置する $+q$ [C] の電荷による r の電位は

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |r - \frac{d}{2}\hat{z}|} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \quad (3.52)$$

と近似的に計算できるものとします。

また、同様にして $-\frac{d}{2}\hat{z}$ に位置する $-q$ [C] の電荷による r の電位は

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 |r + \frac{d}{2}\hat{z}|} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \quad (3.53)$$

と近似できます。

結局、 r における電位 $\varphi(r)$ は、この二つの重ね合わせより、

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right) = \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.54)$$

となります。

少し表記を変えましょう。

ダイポールの負電荷の位置から正電荷の位置を表すベクトル d (この場合は $d = d\hat{z}$) を定義します。これを用いて、ダイポールモーメント $p = qd$ [C·m] というものを定義します。ダイポールモーメント p を用いると電位 $\varphi(\mathbf{r})$ は以下と書けます。

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (3.55)$$

上の式から分かることは、点電荷の作る電位分布は、点電荷からの距離 r に反比例しますが、ダイポールの作る電位分布は距離 r の2乗に反比例しますので、ダイポールから遠くなると急に電位は低くなる、ということです。

これは正負の電荷が近くに存在しているために、遠くから見るとほぼ電荷がないように見えるためです。また、ダイポールモーメント向きによって電位が異なることにも気を付けて下さい。

問 3.5-5. ダイポールが作る電界 $E(\mathbf{r})$ を、式 (3.55) の静電ポテンシャルの勾配をとることで求めよ。

等電位面と電界の向き 電位が等しい点の集合は面になります。これを等電位面と呼びます。電位の等高線のようなものです。図 3.19 から 3.21 は、3.3 節のケース A, B, C のときの等電位面です。点線で電界の流線表示も示しています。

この図ではある一面しか示していませんので、等電位「線」となっていますが、3次元的に見ると等電位面となります。

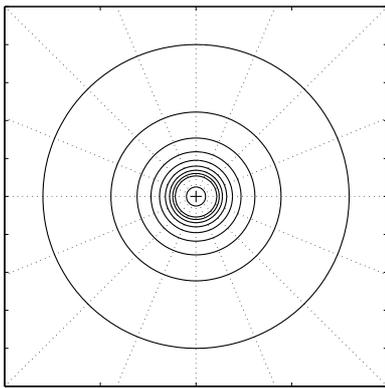


図 3.19: ケース A の等電位面

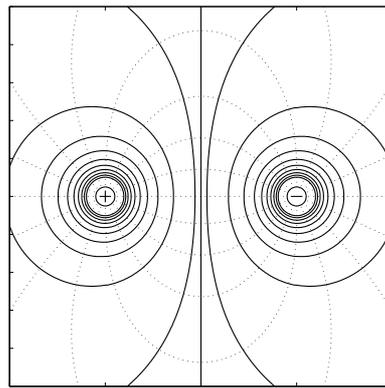


図 3.20: ケース B の等電位面

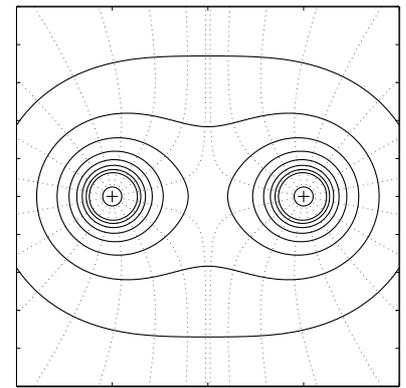


図 3.21: ケース C の等電位面

等電位面については次のことが言えます。

同じ等電位面上にある、ごく近傍の2点 A, B について、A 点から B 点を表すベクトルを $\Delta \mathbf{r}$ とします。ある点電荷 (Q [C]) を A から B まで移動させたとき、なした仕事 $W = -QE \cdot \Delta \mathbf{r}$ は A, B の2点の電位が等しいので $W = 0$ となります。従って、

$$\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{r} = 0 \quad (3.56)$$

であることが分かります。この式は、ある点での等電位面 ($\Delta \mathbf{r}$ の方向) に対し、電界ベクトル (E の方向) は垂直の方向を向いていることを意味しています。図 3.19 から 3.21 の実線 (等電位面) と点線 (電界の向き) は常に垂直に交わっています。

3.6 ポアソンの方程式とラプラスの方程式

電荷が与えられたとき、電界を直接求めるのではなく、電位を求める方が簡単と述べました。

電荷が与えられたときに電位を求めるには、式 (3.37), (3.38), (3.39), (3.40) でも求められますが、微分形の式もあります。ここではそれを求めましょう。

これまで得られた微分形の式で、「電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ と電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 」を関係付ける式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (3.57)$$

でした。また、「電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ と電位 $\varphi(\mathbf{r})$ 」を関係付ける式は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) \quad (3.58)$$

です。

式 (3.58) を (3.57) に代入すると、

$$\nabla \cdot \{-\nabla\varphi(\mathbf{r})\} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \nabla\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (3.59)$$

となります。

式 (3.59) の $\nabla \cdot \nabla\varphi(\mathbf{r})$ はどんな式なのか、検討しましょう。 $\nabla\varphi$ は

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z} \quad (3.60)$$

の省略形でした。また、 $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$ であれば、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (3.61)$$

の省略形です。ここでは $\nabla \cdot \nabla\varphi(\mathbf{r})$ ですので、上の $\nabla \cdot \mathbf{A}$ の A_x が $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ に、 A_y が $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ に、 A_z が $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ に相当することになります。従って、

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad (3.62)$$

となります。

従って、微分形の電位と電荷の関係式は

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.63)$$

となります。

左辺の式は、物理でよく現れますので、また省略形を導入します。次の通りです。

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad (3.64)$$

この演算子をラプラシアン (Laplacian) と呼びます。

この省略形を使うと、微分形の電位と電荷の関係式は

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.65)$$

と書けます。これをポアソン (Poisson) の方程式と呼びます。

電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ が 0 の場所では

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad (3.66)$$

となります。これをラプラス (Laplace) の方程式と呼びます。

ポアソンの方程式、ラプラスの方程式は電位を求めるのによく用いられます。特に、電荷でなく電位が分かっているときに各点での電位や電界を求めたいときもあり、その場合はこれらの方程式を解くことで得られます (境界値問題と呼びます)。

問 3.6-1. 原点に点電荷 Q [C] があるときの電位は式 (3.36) で与えられる。これは原点以外では電荷がないので、原点以外でラプラスの方程式を満たす。このことを $\nabla^2\varphi(\mathbf{r})$ を計算して確認せよ。

3.7 ベクトル解析からのアプローチ

ベクトル解析から

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (3.67)$$

が言えます。このことを用いれば、静電界の式

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dV_0 \quad (3.68)$$

は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dV_0 = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) \quad (3.69)$$

と言えます。ここで、

$$\varphi(\mathbf{r}) = \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dV_0 \quad (3.70)$$

です。

また、任意のスカラー場 $f(\mathbf{r})$ に対して、 $\nabla \times \nabla f(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ が言えますので、

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla \times \{-\nabla\varphi(\mathbf{r})\} = \mathbf{0} \quad (3.71)$$

が導けます。つまり、静電界渦なしの法則は、静電界の式から数学的に導き出せることが分かります。

第4章 導体と静電容量

4.1 導体の性質

導体とは、それを構成している原子内の電子の一部が自由に移動できる物質です。一般には、金属をイメージすれば十分です。自由に電子が移動できますので、電界をかけると電子が移動して「電流が流れる」こととなります。

自由電子の存在から、導体について以下の電氣的性質が言えます。

- 導体自体は正負の電荷が等量であり、周囲に電界がないとき正負の電荷は均一に存在します (これを「電荷がない」と言います)。
- 導体内では電界は常に 0 になります。なぜなら、電界があればそれによって電荷が移動しますので、移動し終わったときは電界が 0 になっています (逆に言えば、電界が 0 になるまで移動します)。
また、内部で電界が 0 なので、電位差が存在せず、金属内は等電位です。
- 導体には正または負の電荷を外から与えることができます。このとき、導体全体での正負の電荷は偏った状態となります。
- 導体に電荷を与えたとき、偏った分の電荷 (与えた分の電荷) は、導体表面に存在します。なぜなら、仮に導体内部にあったとすると、その周囲に電界ができ、電荷が移動するからです。結局、偏った電荷が導体表面に行くまで移動することになります¹。
- 導体表面の電界は 0 ではありませんが、その向きは常に導体表面に垂直 (法線方向) になります。なぜなら、表面に平行な成分 (接線成分) があると、表面の二点間で電位差が生じ、それに沿って電流が流れるからです。つまり、接線成分が 0 になるまで電流が流れます。
- 一つの導体の表面の電位はどこでも等しくなります。異なっていれば、等しくなるまで電荷が移動するからです (導体表面は等電位面である、と言えます)。

導体の周囲に電界があると、導体表面に電荷が発生し (それまで正負が同じ位置にあって中和していた電荷が、電界によって正負が異なる位置に現れる、という意味です)、導体内の電界が 0 となって、導体表面に電荷が現れます。この現象を静電誘導と呼びます。

導体を「絶対に電位 0」の場所に導線でつなぐことを接地と言います。「絶対に電位 0」というのは、例えば地球のように十分大きな物体のことで、電荷が多少増えたり減ったりしても電位は変わらず、影響ないほど大きい、ということを意味します。接地のことを「グランドにつなぐ、グランドをとる」とか「アースにつなぐ」と言います。

接地した導体に静電誘導を起こさせると、偏った電荷だけを導体に誘導させることができます。その状態でグランドから絶縁することで電荷を取り出すことができます。

¹ 「偏った電荷と等しい電荷量が導体表面に現れる」というのが正しい表現です。例えば導体の中心の方に電荷を与えたとき、その電荷そのものが表面まで移動するわけではありません。偏った電荷は少し移動し、またその周囲の中和していた電荷も移動し、ということが各場所で起きて、最終的に表面に現れると思って下さい。



図 4.1: 二導体間に電位差を与えたとき。実際には導体 1 の電荷が導体 2 に移動するのではなく、導体 1 の電荷はちょっと移動し、導線内の電荷がまたちょっと移動し...、と玉突きで、導体 2 に電荷が蓄えられる。

4.2 静電容量

4.2.1 静電容量とコンデンサ

二つの導体に電源で電位差 V [V] を与えることを考えます (図 4.1)。片方の導体には正の電荷 $+Q$ [C] が、もう一方の導体には負の電荷 $-Q$ [C] が生じます (電源が、一方の導体から電荷を取り去って、もう一方の導体へと移すということをしていることとなります。つまり電源は仕事をしています)。

与える電位差 V と生じる電荷 Q は比例します。その比例係数、即ち電位差 1 V 当たりに生じる電荷の量を静電容量と呼びます。

静電容量が大きいほど、同じ電位差で大きな量の電荷が生じます。二導体間の電位差を V [V]、それぞれの導体に $\pm Q$ [C] の電荷が現れたとき、静電容量 C との関係は

$$Q = CV \quad (4.1)$$

と表されます。静電容量 C の単位は [F](Farad; ファラッド) = [C/V] です。

効率よく電荷が蓄えられるよう二導体を構成した回路素子をコンデンサと呼びます。コンデンサは様々な形状、材質で作られています。そして二導体間には様々な電界分布ができますが、電気回路的には静電容量というパラメタだけ分かれば、どう電界ができていいるかは関係ありません (電気回路の授業では「静電容量 C [F] のコンデンサがあり…」とだけ書かれます)。しかし電磁気学ですと、二導体の構成に対して、その間にどのような電界ができるか、というのを取り扱うことが問題となってきます。

4.2.2 静電容量の求め方

静電容量を求めるには、二導体の一方に $+Q$ [C]、他方に $-Q$ [C] 与えたときの導体間の電位差 を、与えた電荷によって生じた電界から求め、 Q/V から静電容量 C を計算します。

- (1) 平行平板間の静電容量: 二枚の十分に広く (面積 S [m²])、間隔 d [m] が十分に狭い平行導体平板を考えます。それぞれに $\pm Q$ [C] 与えたとき、平板に電荷が $\pm Q/S$ の面電荷密度で分布し、平板間では均一な電界ができます。平板は無限に広いとみなすことにします。このとき出来る電界は平板間では一定で $\mathbf{E} = -\frac{Q}{\epsilon_0 S} \hat{z}$ となります。従って、電位差は平板間を積分して

$$V = - \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^d \frac{Q}{\epsilon_0 S} \hat{z} \cdot \hat{z} dz = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}, \quad \therefore C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (4.2)$$

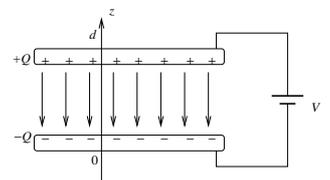


図 4.2: 平行平板

- (2) 同心球導体間の静電容量: 内導体半径を a_1 [m]、外導体の内半径を a_2 [m]、外半径を a_3 [m] とする、同心球の二導体間の静電容量は以下のようにして求められます。内導体に $+Q$ [C]、外導体に $-Q$ [C] を与えたとき、両導体間のできる電界は中心からの距離 r [m] のみに依存し、 $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$ となります (球の中心を原点にしています)。積分経路を $\mathbf{r}(s) = (a_2 - s)\hat{r}, 0 \leq s \leq (a_2 - a_1)$ とすると、電位差は

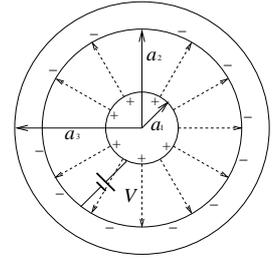


図 4.3: 同心球導体

$$V = - \int_0^{a_2 - a_1} \frac{Q(a_2 - s)\hat{r}}{4\pi\epsilon_0(a_2 - s)^3} \cdot (-\hat{r}ds) = - \int_{a_2}^{a_1} \frac{Qr\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \hat{r}dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_{a_2}^{a_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right)$$

$$\therefore C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}} \quad (4.3)$$

となります ($a_2 - s = r$ の積分変数の変換を途中で用いました)。

- (3) 孤立導体球の静電容量: 孤立導体球の静電容量というのがときどき問題に出てきます。これは、空中に導体球が一つだけあるときの静電容量になります (大きな静電容量は得られないので、コンデンサとしては役に立ちません)。

これまでと同様、電荷 $+Q$ [C] を与えたときの電位 V [V] を計算して、その比から求めます。 $-Q$ [C] はどこにあるのかというと、「無限の遠くにある」ことになります。電位 V が無限の遠くから電荷を持ってきたときを基準にしているからです。

半径 a_1 [m] の孤立導体球に電荷 $+Q$ [C] を与えたときの導体表面の電位は $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a_1}$ [V] となります。従って、静電容量は $C = 4\pi\epsilon_0 a_1$ [F] になります。

これは、式 (4.3) において、 $a_2 \rightarrow \infty$ としたときに (外部導体を無限の遠くに持っていったときに) 等しくなることが分かります。

- (4) 同軸円筒導体間の静電容量: 内導体半径を a_1 [m]、外導体の内半径を a_2 [m] とする、二つの同軸の円筒導体が平行に置かれているとき、二導体間の単位長さ当たりの静電容量は以下ようになります²。電荷密度として、内導体に $+\lambda$ [C/m]、外導体に $-\lambda$ [C/m] を与えたとき、両導体間のできる電界は中心からの距離 ρ [m] のみに依存し、 $E(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho} \hat{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho^2} \boldsymbol{\rho}$ となります。積分経路を $\boldsymbol{\rho} = (a_2 - s)\hat{\rho}, 0 \leq s \leq (a_2 - a_1)$ とすると、電位差は

$$V = - \int_0^{a_2 - a_1} \frac{\lambda(a_2 - s)\hat{\rho}}{2\pi\epsilon_0(a_2 - s)^2} \cdot (-\hat{\rho}ds) = - \int_{a_2}^{a_1} \frac{\lambda\rho\hat{\rho}}{2\pi\epsilon_0\rho^2} \cdot \hat{\rho}d\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{a_2}{a_1} \quad (4.4)$$

となります。長さ l [m] あたりに $l\lambda$ [C] たまるので、長さ l における静電容量は

$$C = \frac{l\lambda}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\log \frac{a_2}{a_1}} \quad [\text{F}] \quad (4.5)$$

となり、単位長さあたりは以下となります。

$$C = \frac{\lambda}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\log \frac{a_2}{a_1}} \quad [\text{F/m}] \quad (4.6)$$

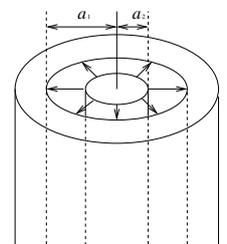


図 4.4: 同心円筒導体

²長さが無限ですので、静電容量は無限になってしまいます。そこで、ここでは単位長さ当たりの静電容量について考えています。

4.3 静電エネルギー

4.3.1 コンデンサに蓄えられるエネルギー

コンデンサは電氣的なエネルギーが蓄えられています。

電源が仕事をして、二導体の間で電荷を移動させましたので、その仕事の分だけのエネルギーが蓄えられます。

このエネルギーは、コンデンサを充電したのち (電荷 Q [C] を蓄えたのち)、電源から離して別の回路につなげば取り出すことができます。

コンデンサに蓄えられているエネルギーは以下のようにして求められます。静電容量 C [F] のコンデンサに、全く電荷がない状態 (電荷 0 [C], 電位差 0 [V]) から、一方の電極から徐々に電荷を他方の電極へと移します。途中の段階として、電荷 q [C] が現れ、電位差が v [V] になっているものとします ($q = Cv$)。ここから微小な電荷 dq [C] を移したときに要する仕事 dW [J] は $dW = vdq = \frac{q}{C}dq$ となります。 q が 0 [C] のときから Q [C] になるまでこれを繰り返しますので、全体でなした仕事は

$$W = \int dW = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 \quad [\text{J}] \quad (4.7)$$

となり、これだけのエネルギーがコンデンサに蓄えられていることとなります。

4.3.2 電磁場に蓄えられるエネルギー

コンデンサに蓄えられているエネルギーは、コンデンサの電極間にできている電界に蓄えられているとも言えます。単位体積あたりに蓄えられる電界のエネルギー w [J/m³] は次式で与えられます。

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 \quad [\text{J/m}^3] \quad (4.8)$$

このことを、平行平板コンデンサの場合について考えましょう。面積 S [m²]、電極間の距離 d [m] のコンデンサの静電容量は $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ 、電界の大きさ E と電位差 V との関係は $V = Ed$ なので、コンデンサに蓄えられるエネルギー W は

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d} E^2 d^2 = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 (Sd) \quad (4.9)$$

となります。ここで、 Sd は電極間の空間の体積ですので、単位体積あたり $\frac{\epsilon_0}{2} E^2$ のエネルギーがその体積にわたって蓄えられている、というふうに見ることができます。

☞ 他のコンデンサについても成立するか、確かめてみましょう。

4.4 三導体以上への拡張 (導体系の解析)

導体に与えた電荷と、それによる導体の電位の関係は、三導体以上へと拡張できます。それには、電位係数や容量係数といったものを用いて表現をします。

4.4.1 電位係数

導体が N 個ある場合を考え、それぞれ導体 1 から導体 N までの番号がついているものとします。

1 番目の導体に電荷 Q_1 [C] を与えたときに、各導体の電位が V_1, V_2, \dots, V_N [V] になったとき、

$$V_1 = p_{11}Q_1, \quad V_2 = p_{21}Q_1, \quad \dots, \quad V_N = p_{N1}Q_1 \quad (4.10)$$

のように表現します。

また、2番目の導体に電荷 Q_2 [C] を与えたときに、各導体の電位が V'_1, V'_2, \dots, V'_N になったとき、同様に

$$V'_1 = p_{12}Q_2, \quad V'_2 = p_{22}Q_2, \quad \dots, \quad V'_N = p_{N2}Q_2 \quad (4.11)$$

と表現できます。

それでは、「1番目の導体に電荷 Q_1 [C] を与えて、2番目の導体に Q_2 [C] 与えたとき」の各導体の電位 $V''_1, V''_2, \dots, V''_N$ はいくらになるでしょうか。

この答えは、先の結果を合計したものになります。つまり、

$$V''_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2, \quad V''_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2, \quad \dots, \quad V''_N = p_{N1}Q_1 + p_{N2}Q_2 \quad (4.12)$$

となります。

これは(当たり前のようですが)大事なことで、これを拡張すると、各導体に Q_1, Q_2, \dots, Q_N を与えたときの、各導体の電位 V_1, V_2, \dots, V_N は

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

となります。この p_{ij} [F^{-1}] を電位係数と呼びます。

p_{ij} は、 j 番目の導体だけに単位正電荷 (1 C) を与えたときの、 i 番目の導体の電位と等しいこととなります。

電位係数の性質: 電位係数にはいくつかの性質があります。

- (1) j 番目の導体に正電荷を与えたとき、各導体の電位が上がりますが、 j 番目の導体が一番電位が高くなることは予想できるかと思えます。これは式で言うと

$$p_{jj} \geq p_{ij} \quad (4.14)$$

となります。

- (2) どこかの導体に正電荷を与えたとき、各導体の電位は負にならないことが予想できるかと思えます。 j 番目の導体に 1 C 与えたときの i 番目の導体の電位は電位係数 p_{ij} そのものです。従って、一般に

$$p_{ij} \geq 0 \quad (4.15)$$

であることが言えます。

- (3) これはなかなか説明が難しいですが、

$$p_{ij} = p_{ji} \quad (4.16)$$

という性質があります (j 番目の導体に、ある電荷を与えたときの i 番目の導体の電位と、 i 番目の導体に同じ電荷を与えたときの j 番目の導体の電位は等しい)。これを説明するは Green の相反定理³ を用いるのが良いのですが、ちょっと長くなりますので、この講義からは省きます。知りたい人は文献⁴ を参照して下さい。

³G. Green はイギリスの物理学者

⁴卯本, 電磁気学, 昭晃堂 (初版) の p. 68 など

例題. 図 4.3 の内部導体を導体 1、外部導体を導体 2 とする。このときの電位係数を導け。

(解) まず、外導体 2 のみに電荷 Q [C] を与えたとき、内導体の電荷は 0 C のままで、外導体の表面内は全て等電位で $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a_3}$ になります。従って、 $Q_2 = Q, Q_1 = 0, V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a_3} = V_1$ より、

$$\begin{bmatrix} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a_3} \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ Q \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

ここから、 $p_{12} = p_{22} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a_3}$ を得ます。

次に、内導体 1 のみに電荷 Q [C] を与えたとき、外導体の内側表面に $-Q$ [C]、外側表面に $+Q$ [C] が現れます。外導体の電位は $V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a_3}$ であり、内導体の電位はそれより $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right)$ だけ高くなります。従って、

$$\begin{bmatrix} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

より、 $p_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right)$ 、 $p_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a_3}$ となります。まとめると次式になります。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right) & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a_3} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a_3} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

例題⁵. 電位係数行列が既知の二つの導体系 (導体 1, 導体 2) がある。導体 1 だけ電荷 Q [C] を帯電させ、その後細い導線で導体 1, 2 間をつないだとき⁶、導体 1, 2 に蓄えられる電荷 Q_1, Q_2 を、電位係数を用いて表しなさい。

(解) 電位係数 p_{ij} とします。導線で接続したとき、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

となります。

導線でつないでいるので、両導体は同電位となりますので $V_1 = V_2$ です。従って、

$$p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 \quad (4.21)$$

が言えます。また、電荷保存則より、 $Q = Q_1 + Q_2$ ですので、この二式を連立して解けば

$$Q_1 = \frac{p_{22} - p_{12}}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}} Q \quad (4.22)$$

$$Q_2 = \frac{p_{11} - p_{21}}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}} Q \quad (4.23)$$

4.4.2 容量係数と誘導係数

前節とは逆に、各導体を基準電位から V_1, V_2, \dots, V_N [V] だけ上昇させたときに、各導体に蓄えられる電荷を Q_1, Q_2, \dots, Q_N [C] とします。この関係は

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1N} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{N1} & q_{N2} & \cdots & q_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

⁵東工大 OCW の小田先生・浅田先生「電磁気学 I」講義ノートの問題からの引用です。

⁶「細い導線」というのは、その導線を用いることで電位係数に影響を与えない、という意味です。

と表現できます。ここで、 q_{ii} を容量係数、 q_{ij} ($i \neq j$) を誘導係数と呼びます。

q_{ij} の値を知るには、 j 番目の導体の電位を 1 V とします (無限遠と細い導線をつないで、 1 V の電源をつけます)。また、 j 番目以外の導体は 0 V とするため、無限遠と細い導線をつないで接地します。このとき、 i 番目の導体にある電荷を測ることで q_{ij} が得られます (図 4.5)。

容量係数、誘導係数の性質: 以下のような性質があります。

- 電位係数行列の逆行列が、容量係数・誘導係数の行列になります。
- j 番目の導体を 1 V にしたとき、正電荷が j 番目の導体に無限遠から運ばれますので、

$$q_{jj} > 0 \quad (4.25)$$

と言えます (容量係数は正)。

- j 番目の導体を 1 V にしたとき、接地している他の導体には静電誘導で負電荷が現れますので、

$$q_{ij} \leq 0 \quad (4.26)$$

と言えます (誘導係数は負)。

- j 番目の導体を 1 V にしたとき、接地している他の導体には静電誘導で負電荷が現れますが、 j 番目の導体にある正電荷以上には静電誘導されません。従って、

$$q_{jj} \geq - \sum_{i=1(i \neq j)}^N q_{ij} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N q_{ij} \geq 0 \quad (4.27)$$

と言えます。

- 電位係数のときと同様、

$$q_{ij} = q_{ji} \quad (4.28)$$

と言えます。

例題⁷. 図 4.6 のように静電遮蔽をしたとき、導体 1 と導体 3 が互いに関係がなくなります。このときの容量係数・誘導係数行列を導出せよ。

(解) 三導体系ですので、一般的に以下のように書けます。

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

導体 1 のみ電位 V_1 としましょう。このとき導体 1 に Q [C] の電荷が生じたとします。

導体 2 は接地されているので 0 V 、導体 2 の外側は 0 V の等電位面であり、その外側には電界はできませんので、導体 3 も 0 V となります。また、導体 2 の内側には静電誘導によって $-Q$ [C] の電荷が生じ、導体 3 は電界がなく電位も 0 であり電荷は生じません。従って、

⁷東工大 OCW の小田先生・浅田先生「電磁気学 I」講義ノートの問題からの引用です。

$$\begin{bmatrix} Q \\ -Q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}V_1 \\ C_{21}V_1 \\ C_{31}V_1 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

となります。ここから、

$$C_{11} = -C_{21}, \quad C_{31} = 0 \quad (4.31)$$

が導けます。

逆に導体3に電位1Vを与えたときを考えれば、同様の考察から

$$C_{33} = -C_{23} \quad (4.32)$$

が言えます。

結局、 $C_{ij} = C_{ji}$ という性質も用いれば、

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & -C_{11} & 0 \\ -C_{11} & C_{22} & -C_{33} \\ 0 & -C_{33} & C_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

と言えます。

この式は、 $Q_1 = C_{11}V_1 - C_{11}V_2$ より、 Q_1 は V_3 とは関係なく、また Q_3 も V_1 とは関係ないことを言っています。

例題. 二導体を考え、二導体間の静電容量 C [F] と容量係数・誘導係数との関係を導け。

(解) 二導体のときの式は

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

で与られます。コンデンサを考えたとき、 $Q_1 = Q, Q_2 = -Q, V_1 = V_2 + V$ となりますので、これを代入して V_2 を削除すると、

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{q_{11}q_{22} - q_{12}^2}{q_{11} + 2q_{12} + q_{22}} \quad (4.35)$$

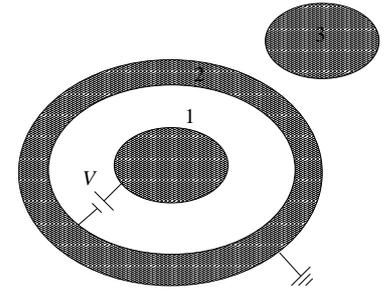


図 4.6: 静電遮蔽のときの導体系

第5章 誘電体

5.1 誘電体と電界との相互作用 …… 分極

ファラデーは、コンデンサの電極間を絶縁体（誘電体）で満たすと静電容量が増加することを実験的に発見しました。

また静電容量の増加は、物質が同じなら増加の割合も同じであること、コンデンサの形状には依存しないことが発見されました。

静電容量が増加する、ということは、同じ電位差でも電荷を多く蓄えられるということであり、また同じ電荷を蓄えた場合は電極間の電位差は小さくなるということです。

静電容量が増加する原因は、電界が加わると誘電体内に多くの電気双極子ができるためです。

誘電体とは、その物質を構成している原子や分子内の電子が、原子核の周囲から離れて移動できないような物質を言います。原子核の周囲に電子が束縛されている状態なので、このような電子のことを束縛電子と呼びます。

この誘電体に電界を加えると、束縛電子などは動けないながらも、以下のような機構で小さな双極子を構成します。

- (1) 電界が印加されることで束縛電子や正の電荷を持つ原子核が電界による力を受け、わずかながら位置が変わる（変位する）。
- (2) 物質を構成する分子が極性を持っており、電界がかからないときは無秩序な方向を向いていることで、全体としては電荷が現れていないが、電界が印加されることで向きを揃える。

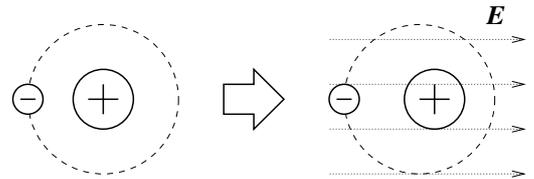


図 5.1: 誘電体内の原子モデルと、印加電界が存在したとき

この変化の現象を誘電分極と呼びます。

誘電分極が生じても、誘電体内の原子核や電子が均一であれば、原子や分子は非常に密に存在しているので、移動した電荷どうしが打ち消し合い、結果として特に変化は生じません。

しかし、誘電体表面については、隣合う原子が存在しないため、打ち消し合うことができません。そこでは、ずれた分だけ正負どちらかの電荷が現れてしまいます。

結局、電界が印加することで、誘電体表面には見かけ上の電荷が生じるようになります。この電荷を分極電荷と呼びます、それに対して実際の電界を発生させる電荷を真電荷と呼びます。

例えば、図 5.2 に示す、極板間に誘電体を装荷した平行平板コンデンサ（面積 S [m²]、極板間の距離 d [m]）を考えましょう。まず、極板間が真空のとき、電圧をかけて電荷 $\pm Q$ [C] を蓄えます。電極の表面に現れる面電荷密度は $\pm\sigma = \pm\frac{Q}{S}$ [C/m²] となり、極板間の電界の強さは $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ [V/m] となります。電極にある電荷は真電荷です。

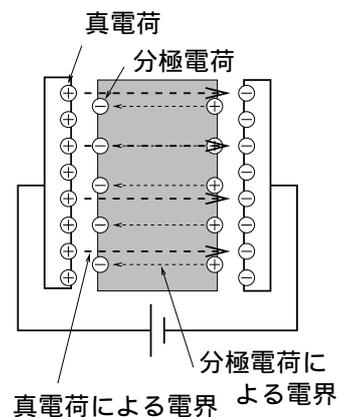


図 5.2: 誘電体を装荷したコンデンサ

次に電源を外しておいて、このコンデンサの電極間を誘電体で満たしたとき（誘電体を装荷する、と言いま

す)、誘電体表面に分極電荷が生じます。この分極電荷の面電荷密度を $\pm\sigma_p$ とおくと、結局 $\pm(\sigma - \sigma_p)$ の面電荷密度が生じているのに等しいので、電界の強さは $E = \frac{\sigma - \sigma_p}{\epsilon_0}$ [V/m] に小さくなります。

5.2 分極ベクトルと分極電荷

分極を定量的に表すには、分極ベクトル $P(\mathbf{r})$ [C/m²] と分極電荷密度 $\rho_p(\mathbf{r})$ [C/m³] を用います。

分極によって、一つの原子または分子が一つの双極子 (ダイポール) を作るようになります。このときのダイポール・モーメントを p [C·m] としましょう。

分極によって生じるダイポールは、もともと電界がないときにはそこに (正負打ち消し合って) 存在していた電荷です。従って、できるダイポール・モーメントの密度は、その (正負打ち消し合って 0 となっていた) 電荷密度 ρ [C/m³] と関係します。また、その電界の方向によって異なる方向のダイポールができます。

そこで、ダイポールの単位体積当たりの密度 (数密度) を $N(\mathbf{r})$ [1/m³] としたとき、

$$P(\mathbf{r}) = Np = \rho(\mathbf{r})d(\mathbf{r}) \quad [\text{C/m}^2] \quad (5.1)$$

となる量を位置 \mathbf{r} における分極ベクトルとして定義しましょう。ここで $d(\mathbf{r})$ [m] は電荷が移動した変位ベクトルです。分極ベクトルは「場」(ベクトル場) であることに注意して下さい。

次にこの分極ベクトルと、誘電体表面に現れる分極電荷の関係式を導出しましょう。

位置 \mathbf{r} における面素ベクトル dS を考えます。分極によってこの面素を通過した電荷量は $P(\mathbf{r}) \cdot dS$ と書けます。従って、ある体積 V (その表面 S) に分極で表れた総電荷量は $\oiint_S P \cdot dS$ となります。現れる分極電荷密度を ρ_p [C/m³] とおくと

$$\iiint_V \rho_p dV = - \oiint_S P \cdot dS \quad (5.2)$$

となります。右辺の負符号は dS の向きを V の外向きにとっているための現れる符号です。 V 内に現れる電荷ですので、 $-dS$ 方向に通過した総電荷量を求めたと考えて下さい。

また、微分形は

$$\rho_p(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot P \quad (5.3)$$

で与えられます。

さて、図 5.2 に示した誘電体を装荷したコンデンサについて考えましょう。誘電体は均質な媒質でできているとすると、 P は誘電体内で一様であり、 $\nabla \cdot P = 0$ となります。即ち、誘電体内部では分極電荷は生じていません。

また、誘電体表面を含む領域を V とすれば、面電荷密度が $\sigma_p = P \cdot \hat{n}$ となるような分極面電荷が誘電体表面に生じます。

5.3 電束密度と誘電率、ガウスの法則の修正

どこかに電荷を置いて電界を発生させたときに、電界がどのようにできているか知りたいときがあります。

電界を決定する法則としては、これまで出てきた「ガウスの法則」と「静電界渦なしの法則」を使うこととなります。

ガウスの法則の式の中には、電界を発生させる源となる電荷がありますが、誘電体が存在すると分極電荷も発生しますので、法則に分極電荷も現れることとなります。ところがその分極電荷自体も、もとの電荷によって発生した電界によって起こるものですから、厳密な「電界の発生源」ではありません。

そこで、通常は分極電荷を考慮しないで、それに代わる別の物理量を導入して電界を知る方法を用いられています。この節ではその物理量について説明します。

誘電体が装荷されたときのガウスの法則は、真電荷の電荷密度を $\rho(\mathbf{r})$ とし、分極電荷密度 $\rho_p(\mathbf{r})$ を考慮すると以下のようになります。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_p}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0} \quad (5.4)$$

$$\Leftrightarrow \nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho \quad (5.5)$$

そこで、 $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})$ [C/m²] なる量を考え、これを電束密度と呼ぶことにします。

電束密度を用いると、誘電体があるときのガウスの法則は以下のように書けます。

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \quad (5.6)$$

つまり、電束密度を用いることで、真電荷の分布のみで電磁場の法則を表現することができることとなります。

この法則の積分型は、次のようにして導出します。両辺を任意の体積 V (その表面の閉曲面 S) で体積分し、ガウスの定理を利用します。次のようになります。

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) dV = \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho(\mathbf{r}) dV \quad (5.7)$$

以上から、真電荷 (電荷密度分布 ρ [C/m³]) が与えられたとき、電界 \mathbf{E} [V/m] と電束密度 \mathbf{D} [C/m²] が発生する、というふうに考えることとなります。

次に、電界と電束密度の関係を表すパラメタとして、誘電率を導入しましょう。

分極ベクトル $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ [C/m²] は多くの物質の場合、電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ [V/m] と比例関係にあることが分かっています。このとき以下のように表すことができます。

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} = \chi_r \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (5.8)$$

ここで χ [F/m] を分極率、 χ_r を比分極率と呼びます。分極率は物質固有のパラメタで、物質が決まれば値が決まります。

このとき、電束密度と電界の関係は以下ようになります。

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi_r \varepsilon_0 \mathbf{E} = (1 + \chi_r) \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (5.9)$$

ここで、 ε [F/m] を誘電率、 ε_r を比誘電率と呼びます。

結局、電界 \mathbf{E} と電束密度 \mathbf{D} の関係として以下の式を得ます。

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (5.10)$$

分極率、誘電率ともに物質固有のパラメタです。その一方が分かれば他方はすぐに分かりますので、通常は物質を表す定数として比誘電率を利用します。比誘電率の例として、気体の多くはほぼ $\varepsilon_r = 1$ 、水は 93.9、ガラスは 3 ~ 5 程度、チタン酸バリウムでは 1000 以上となります。

5.4 誘電体を装荷したコンデンサの静電容量

第 5.1 節では、電源を外したコンデンサの電極間に誘電体を装荷することによって、電界が小さくなることを説明しました。

一方で、電源 V [V] をつないだ場合には、誘電体があろうがなかろうが極板間の電圧は V [V] となりますし、従って電界の強さは $E = \frac{V}{d}$ [V/m] となります。分極電荷の存在によって電界が弱められるのに、電源の存在で $E = \frac{V}{d}$ となるよう電源に強制されますので、この電界の値に保つためにはそれだけ極板間に電荷を多く蓄える必要があります。

誘電率 ϵ [F/m](比誘電率 ϵ_r) の誘電体を平行平板コンデンサに装荷し、電圧 V [V] をかけて、電荷 Q [C] が蓄えられたとします。

ガウスの法則より電束密度の強さ D は $D = \frac{Q}{S}$ となりますので、電界の強さ E は $E = \frac{Q}{\epsilon S} = \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0 S}$ となります。極板間の電位差は $V = Ed = \frac{Qd}{\epsilon S} = \frac{Qd}{\epsilon_r \epsilon_0 S}$ より、静電容量 C [F] は

$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon_r \frac{\epsilon_0 S}{d} = \epsilon_r C_0 \quad (5.11)$$

となります。 C_0 [F] は極板間が真空のときの静電容量です。

つまり、誘電体を装荷することで静電容量は ϵ_r 倍となったわけで、同じ電源電圧でも ϵ_r 倍の電荷を蓄えることができることとなります。

実際のコンデンサでは近接した電極を巻くなどして、電極面積を維持しながら素子のサイズを小さくし、さらに電極間に高い誘電率のものを満たすなどして静電容量を大きくしています。例えば、電解コンデンサはごく小さな素子でも $100\mu\text{F}$ の静電容量のものが安価で入手できます。一方、 $1\text{m} \times 1\text{m}$ の電極を 1mm で近接させた平行平板コンデンサ (電極間は真空) では、約 $9 \times 10^{-3}\mu\text{F}$ しか得られません。(最近では、電気二重層キャパシタも多く見られます。これは小さなサイズで数 F の静電容量を持っています。)

5.5 異なる誘電体境界での境界条件

5.5.1 境界条件

二つの誘電率の異なる媒質の境界において、電界と電束密度は“ある条件”を満たすこととなります。

結論から言いますと、その条件は 媒質境界面に対して、

- ①電界 E の接線成分は連続、
 - ②電束密度 D の法線成分は (媒質境界面に面電荷がないとき) 連続、面電荷があるときは面電荷密度の分だけ不連続、
- の二つです。

「連続」とはどういうことかと言いますと、それはグラフを書いたときに、その関数に「跳び」がない、ということになります。別の言い方をすると、「十分近い2つの変数のとき、関数値がとる値も十分に近い」ということとなります。

この二つの条件は静電界の式:

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV \quad (5.12)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (5.13)$$

から導出することができます。

図 5.3 に示すように、媒質 1 (ϵ_1, μ_1) と媒質 2 (ϵ_2, μ_2) の境界が z 軸に垂直に $z = z_0$ にあるものとします。このとき、各境界条件は、接線成分は x, y 成分、法線成分は z 成分ですので、

$$E_x(x, y, z_0+) = E_x(x, y, z_0-), \quad E_y(x, y, z_0+) = E_y(x, y, z_0-) \quad (5.14)$$

$$D_z(x, y, z_0+) = D_z(x, y, z_0-) \quad (5.15)$$

となります。ここで、 $E_x(x, y, z_0\pm)$ は、 $\delta > 0$ としたとき、

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} E_x(x, y, z_0 \pm \delta)$$

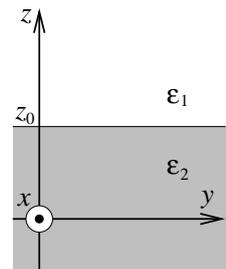


図 5.3: 媒質境界と座標系

の極限をとったものを意味します。これらの媒質境界における電磁界の各成分の連続性についての条件を、境界条件と呼びます。

逆に言うと、境界条件がない成分については、境界条件において値が不連続になることがあります。

5.5.2 境界条件の導出

①式 (5.15) について: ガウスの法則

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV \quad (5.16)$$

を、図 5.4 に示すような境界を含む薄い四角柱の領域 V (その表面 S) で適用します。 V 自体も十分に小さいものとし、 V の中心を $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z_0\hat{z}$ とします。

四角柱の上面、下面の面積を A 、高さを Δd とおくと、

$$\begin{aligned} \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \mathbf{D}(x, y, z_0 + \frac{\Delta d}{2}) \cdot \hat{z}A \\ &+ \mathbf{D}(x, y, z_0 - \frac{\Delta d}{2}) \cdot (-\hat{z}A) + \iint_{\text{側面}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (5.17)$$

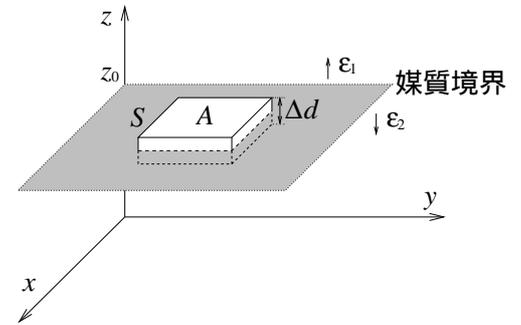


図 5.4: 媒質境界での領域のとり方

$\Delta d \rightarrow 0$ の極限をとると、式 (5.17) の第 3 項は (積分する面積が 0 に近づくので) 0 となります。

また、式 (5.16) の右辺は、媒質境界面に面電荷 (無限に薄い電荷) は存在していないものとする、 $\Delta d \rightarrow 0$ において $V \rightarrow 0$ となり、 $\iiint_V \rho dV = 0$ となります。従って、以下の境界条件を得ます。

$$D_z(x, y, z_0+) = D_z(x, y, z_0-) \quad (5.18)$$

一方、導体表面のように媒質境界面に面電荷が存在しているとき、 $\Delta d \rightarrow 0$ としても無限に薄い範囲で電荷が存在し、 $\iiint_V \rho dV = \sigma A$ となります。

ここで σ は面電荷密度です。従って、以下の境界条件を得ます。

$$D_z(x, y, z_0+) - D_z(x, y, z_0-) = \sigma \quad (5.19)$$

例えば、 $z < z_0$ が金属とすると、 $D_z(x, y, z_0+) = \sigma$ となり、導体表面の電荷密度が電束密度と等しいことが分かります (接線成分は 0 となる)。

②式 (5.14) について: 図 5.5 に示すように、媒質境界を横切るように微小な積分路 C をとり、それを縁とする面積を $S = hl$ とします (ここでは平面とします)。静電界渦なしの法則:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (5.20)$$

をこの積分路に適用すると、左辺は

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= \mathbf{E}(x, y, z_0 - \frac{h}{2}) \cdot (\hat{y}l) + \mathbf{E}(x, y + \frac{l}{2}, z_0) \cdot (\hat{z}h) \\ &+ \mathbf{E}(x, y, z_0 + \frac{h}{2}) \cdot (-\hat{y}l) + \mathbf{E}(x, y - \frac{l}{2}, z_0) \cdot (-\hat{z}h) \end{aligned} \quad (5.21)$$

となります。ここで、 $h \rightarrow 0$ の極限をとると、式 (5.21) の右辺第 2 項、第 4 項は 0 となります。また、式 (5.20) の右辺は常に 0 であるので、次式を得ます。

$$E_y(x, y, z_0-) = E_y(x, y, z_0+) \quad (5.22)$$

従って、電界の (媒質境界に対する) 接線成分は連続という条件が導出できます。

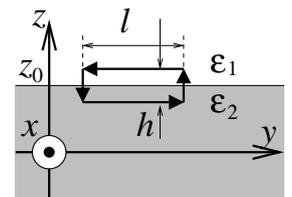


図 5.5: 媒質境界での積分路のとり方

5.6 誘電体があるときの電場のエネルギー

誘電体が存在するとき、誘電率 ε [F/m] (比誘電率 ε_r) の点における単位体積当たりの静電エネルギーは

$$w = \frac{1}{2}ED \text{ [J/m}^3\text{]} \quad (5.23)$$

となります。ここで、 E [V/m] はその点での電界の大きさ、 D [C/m²] は電束密度の大きさです。また、電界と電束密度は同じ方向を向いていることを仮定します。

例えば、平行平板コンデンサ (面積 S [m²]、極板間の距離 d [m]) の極板間に、誘電率 ε [F/m] (比誘電率 ε_r) の誘電体を装荷します。

このコンデンサに電圧 V [V] を与えたときにできる電界の大きさ E [V/m] と電束密度の大きさ D [C/m²] は

$$E = \frac{V}{d}, \quad D = \varepsilon E = \frac{\varepsilon V}{d}, \quad (5.24)$$

となります。

一方で、蓄えられるエネルギー W [J] は

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon S}{d} V^2 = \frac{1}{2} \frac{V \varepsilon V}{d} \cdot Sd = \frac{1}{2} ED \cdot V = w \cdot V \quad (5.25)$$

と書くことができ、最後の式から、単位体積当たりのエネルギー w が式 (5.23) で与えられることが分かります¹。

例題

例 1. 図 5.6 に示すように、平行平板コンデンサ (極板の面積 S [m²]、極板間の距離 d [m]) の極板間の半分の距離を誘電率 ε [F/m] (比誘電率 ε_r) で満たした時の静電容量 C_1 [F] を求めよ。また、誘電体表面に表われる分極電荷密度 σ_p [C/m²] を求めよ。

(解) 電界と電束密度は、誘電体と真空の境界面に垂直にできます。従って、電束密度は連続 (誘電体の内外で同じ値) となります。この電束密度の大きさを D [C/m²] とします。

電圧 V [V] をかけ、電荷 Q [C] が蓄えられているとすると、電束密度の大きさ D は (ガウスの法則より) $D = \frac{Q}{S}$ となります。

この時の電界は、誘電体の内部では $E_d = \frac{D}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}$ [V/m]、誘電体の外部 (真空の部分) では $E_0 = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$ [V/m] となります。

電圧 V と電界の関係は $V = E_d \frac{d}{2} + E_0 \frac{d}{2}$ となります。従って、

$$V = \frac{Q}{\varepsilon_r \varepsilon_0 S} \frac{d}{2} + \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \frac{d}{2} = Q \frac{d}{\varepsilon_0 S} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_r} + 1 \right), \quad \therefore C_1 = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \frac{2}{\frac{1}{\varepsilon_r} + 1} \quad (5.26)$$

となります。また、

$$V = \frac{Q}{\varepsilon_r \varepsilon_0 S} \frac{d}{2} + \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \frac{d}{2} = Q \left(\frac{1}{C_d} + \frac{1}{C_0} \right) \quad (5.27)$$

と書けます。ここで、 C_0 [F] は極板間距離 $\frac{d}{2}$ の、極板間が真空のコンデンサの静電容量、 C_d [F] は同じ極板間距離を持ち、極板間が誘電率 ε [F/m] の誘電体で満たされたコンデンサの静電容量です。ここから、

$$C_1 = \left(\frac{1}{C_d} + \frac{1}{C_0} \right)^{-1} \quad (5.28)$$

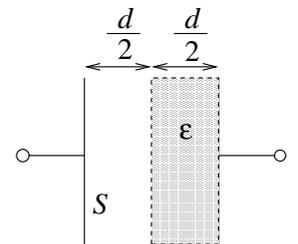


図 5.6: 誘電体を半分装荷したコンデンサ

¹もちろん、一例を示しただけで、式 (5.23) を証明したわけではありません。

と書けます。つまり、静電容量が C_0, C_d の2つのコンデンサを直列につないだ合成静電容量に等しいことが分かります。

分極電荷密度 σ_p は $\sigma_p = P \cdot \hat{n} = P$ であり、 $D = \epsilon_0 E_d + P$ より、

$$\sigma_p = P = D - \epsilon_0 E_d = \frac{Q}{S} - \epsilon_0 \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0 S} = \frac{Q}{S} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \quad (5.29)$$

例2. 図5.7に示すように、平行平板コンデンサ(極板の面積 S [m²]、極板間の距離 d [m])の、極板の面積の半分を誘電率 ϵ [F/m] (比誘電率 ϵ_r) で満たした時の静電容量 C_2 [F] を求めよ。

(解) 電圧 V [V] をかけた時にできる電界と電束密度は、誘電体と真空の境界面に平行となりますので、電界は誘電体の内外で同じとなります。この大きさを E [V/m] としますと $E = \frac{V}{d}$ となります。

電束密度はここから誘電率を用いて求められますので、真空中では $D_0 = \epsilon_0 E = \frac{\epsilon_0 V}{d}$ 、誘電体中では $D_d = \epsilon E = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 V}{d}$ となります。

極板に蓄えられている電荷ですが、真空に接している部分と誘電体に接している部分では面電荷密度が異なります。面電荷密度は電束密度と等しいので、真空に接している部分では $\sigma_0 = \frac{\epsilon_0 V}{d}$ [C/m²]、誘電体に接している部分では $\sigma_d = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 V}{d}$ [C/m²] となります。結局、全電荷 Q [C] は、

$$Q = \sigma_0 \frac{S}{2} + \sigma_d \frac{S}{2} = \frac{\epsilon_0 V S}{d} \frac{1}{2} + \frac{\epsilon_r \epsilon_0 V S}{d} \frac{1}{2} \quad (5.30)$$

となります。静電容量 C_2 は

$$C_2 = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \frac{1}{2} + \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d} \frac{1}{2} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \frac{1 + \epsilon_r}{2} \quad (5.31)$$

となります。これは、極板の面積 $\frac{S}{2}$ の、極板間が真空と誘電体のコンデンサを並列につないだ時の合成の静電容量に等しいことが分かります。

例3. 図5.8に示す同心球のコンデンサ(内導体の半径 a_1 [m]、外導体の内半径 a_2 [m])において、導体間に二種類の誘電体が装荷されている。誘電体の境界は、導体と同心の球面状であり、中心から距離 $\frac{a_2 + a_1}{2}$ [m] が境界となっている。中心からの距離を r [m] とすると、 $r < \frac{a_2 + a_1}{2}$ において誘電率は $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$ [F/m]、 $r > \frac{a_2 + a_1}{2}$ において誘電率は $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$ [F/m] とする。このコンデンサの静電容量 C [F] を求めよ。

(解) 誘電率が ϵ_1, ϵ_2 の領域における電束密度および電界をそれぞれ D_1, D_2, E_1, E_2 、内外導体間の電位差を V とする。とする。

$$D_1 = D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_1} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_1 r^2} \hat{r}, \quad E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_2 r^2} \hat{r},$$

$$\begin{aligned} V &= - \int_{\frac{a_1+a_2}{2}}^{a_2} \frac{Q}{4\pi \epsilon_1 r^2} \hat{r} \cdot (-\hat{r}) dr - \int_{a_1}^{\frac{a_1+a_2}{2}} \frac{Q}{4\pi \epsilon_2 r^2} \hat{r} \cdot (-\hat{r}) dr \\ &= \frac{Q}{4\pi \epsilon_1} \left(\frac{2}{a_1 + a_2} - \frac{1}{a_2} \right) + \frac{Q}{4\pi \epsilon_2} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{2}{a_1 + a_2} \right) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{1}{2(a_2 + a_1)} + \frac{1}{4a_1} - \frac{1}{2a_2} \right\} \quad (5.32) \end{aligned}$$

$$\therefore C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi \epsilon_0}{\frac{1}{2(a_2+a_1)} + \frac{1}{4a_1} - \frac{1}{2a_2}} \quad (5.33)$$

例4. 図5.5に示すように、 $z = z_0$ で媒質境界があり、誘電率が $z > z_0$ で $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$ 、 $z < z_0$ で $\epsilon_2 = 3\epsilon_0$ とする。

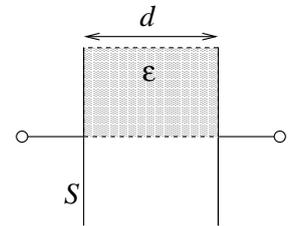


図 5.7: 誘電体を半分装荷したコンデンサ

z_0 に $z > z_0$ から近付けたときの電界 $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{E}(z_0 + \delta) = \mathbf{E}_1$ (ただし、 $\delta > 0$) が、 $\mathbf{E}_1 = 2\hat{y} + 3\hat{z}$ [V/m] であった。 $\mathbf{D}_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{D}(z_0 + \delta)$ 、 $\mathbf{E}_2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{E}(z_0 - \delta)$ 、 $\mathbf{D}_2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{D}(z_0 - \delta)$ を求めよ。

(解) $\mathbf{D}_1 = \epsilon_1 \mathbf{E}_1$ より、 $\mathbf{D}_1 = \epsilon_0(4\hat{y} + 6\hat{z})$ 。

媒質境界で \mathbf{D} の法線成分 (この座標系では z 成分)、 \mathbf{E} の接線成分 (この座標系では x, y 成分) が連続なので、 $\mathbf{D}_2 = D_{2y}\hat{y} + \epsilon_0 6\hat{z}$ 、 $\mathbf{E}_2 = 2\hat{y} + E_{2z}\hat{z}$ と書くことができます。 $D_{2y} = \epsilon_2 E_{2y}$ 、 $E_{2z} = \frac{D_{2z}}{\epsilon_2}$ より、 $\mathbf{D}_2 = \epsilon_0(6\hat{y} + 6\hat{z})$ 、 $\mathbf{E}_2 = 2\hat{y} + 2\hat{z}$ 。

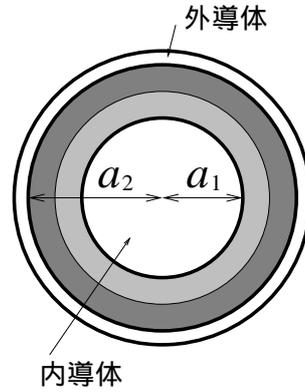


図 5.8: 二種の誘電体を装荷した同心球コンデンサ

第6章 真空中の静磁場の法則

電場とは別の種類の力を及ぼすものとして磁場が存在します。

磁場の研究は、天然に存在する磁石間に働く力の作用を調べることから始まりました。その長い研究を経て、磁力は“電流間に働く力”ということが分かりました。

さらに、これは直接電流間に働く力というよりも、“電流が周囲に磁場を起こし、その磁場中に置かれた別の電流が、磁場から力を受ける”と解釈した方が、より多くの現象を説明する際に好都合であることが明らかになりました。

そこで、ここではその結論を先取りして電流によってできる磁場を求めることから話を始めます。電流が時間的に変動しないとき(かつ、電場も時間的に変動しないとき)、できる磁場を静磁場と呼びます。

なお、ここで“磁場”というのは、“電流によってできた周囲に磁気的な変化が起きた状態”を示しており、磁界 $H(r)$ [A/m] と磁束密度 $B(r)$ [T] を含む概念です。このうち、磁束密度から述べています。

6.1 磁場

6.1.1 電流間に働く力と磁場の考え方

2つ以上の電流が置かれているとき、電流間に力が働き、互いに反対方向の力を受けます。これを、“直接電流間に力が働いている”と解釈するのではなく、“一方の電流が周囲に影響を与え、その影響下において別の電流があると力を受ける”と解釈するようにします。この電流周辺の、他の電流に力を及ぼす影響のことを磁場と呼びます。

基本的な磁場の量として、この講義では磁束密度 B を用います。単位は [T] (Tesla; テスラ) です。なお、電流周辺のどこでも力を受けるので、磁束密度は“場”です。そこで、 $B(r)$ と書くこととします。

6.1.2 磁場の方向と強さの定義

磁束密度はベクトル量ですので、方向と大きさがあります。そこで、最初に磁束密度の強さと方向をどう定義するか、について述べます。

電場(電界) E [V/m] の強さと方向は、試験電荷 q [C] を電場中において、その試験電荷に働く力(クーロン力)の大きさ F [N] と方向から定義できました(電界の強さ $|E|$ は $|E| = F/q$ で与えられ、その方向は力の方向と同じになります)。

これと同様に、磁束密度 B [T] の強さと方向を調べるには、“試験電流”を磁場中に置く必要があります。

試験電流は、一定の強さで流れる定常電流 I [A] であり、その一部の微小な Δr [m] の部分に働く力を調べます。

働く力に対し、この微小な電流の部分に垂直にします。この力に垂直な面内で電流を回転すると、どこかで力の大きさが最大になるところが見つかります。このときの力の大きさを F [N] とすると、磁束密度 B [T] の強さ $|B|$ は、

$$|B| = \frac{F}{I \Delta r} \quad (6.1)$$

で与えられます。従って、単位 [T](テスラ) は $[T] = [N/A \cdot m] = [kg/A \cdot s^2]$ です。

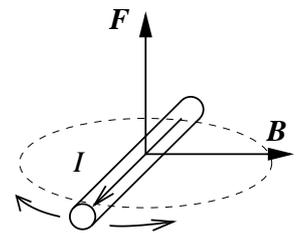


図 6.1: 試験電流を力と垂直な面内で回転し、力を最大にする

また、磁束密度の向きは電流が流れる向きと力の向きの両方に直角であり、“電流の方向から磁束密度の方向に右ねじを回したときに、ねじの進む方向が働く力の方向”となるような向きと定めます。

以上の事を、数式で表現すると、 $F = I \Delta r \hat{l} \times B$ となります (数式で述べるとたった一行の数式であり、いかに簡単に述べる事ができるかが分かると思います)。 \hat{l} は電流の流れる方向を表す単位ベクトルです。

この磁場中に電流を置くと働く力はアンペール力と呼ばれます。

6.2 直流電流がつくる静磁場 — ビオ＝サバールの法則

直流電流の周囲には静磁場ができます。静磁場の磁束密度 $B(\mathbf{r})$ [T] を求めるには、電流の微小部分 (電流素片) がつくる磁束密度を求め、それを全電流にわたって積分することで得られます。

電流がつくる磁束密度は、ビオ＝サバールの法則で求められます。

6.2.1 線電流のときのビオ＝サバールの法則

理想的に十分細い線状導体に電流 I [A] が流れているものとします。この電流の経路 C を、パラメタ s を持つベクトル関数 $\mathbf{r}_0(s)$ で表します (パラメタ s が増える方向を電流 I の正の方向とします)。このとき、線素ベクトル $d\mathbf{r}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{ds} ds$ にその電流値 I を乗じた $I d\mathbf{r}_0$ [A·m] を電流素片と呼びます。

この電流素片が位置 \mathbf{r} に作る磁束密度 $d\mathbf{B}(\mathbf{r})$ [T] は

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{r}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (6.2)$$

で与えられ、これをビオ＝サバールの法則 (Biot-Savart's law) と呼びます。 μ_0 は真空の透磁率と呼ばれ、SI 単位系では $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m が用いられます。ここで、[H] はヘンリー (Henry) と呼ばれる単位で、コイルのインダクタンスの単位です。

電流全体が作る磁束密度は、各電流素片の作る磁束密度の合計をとる (実際には無限小の磁束密度を、無限個の合計をとる = 積分する) ことで得られます。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_C d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_C \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{r}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (6.3)$$

電流分布が与えられたときの磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ の求め方 上記のビオ＝サバールの法則を用いることで、線電流がどのような形状をしていても、その線電流がつくる磁束密度を求めることができます。

- (1) 与えられた電流の流れる経路を、範囲を持つ一つのパラメタ (ここでは s とします) のベクトル関数 $\mathbf{r}_0(s) = x_0(s)\hat{x} + y_0(s)\hat{y} + z_0(s)\hat{z}$ で表現します。電流 I の正方向にパラメタが増えるように取ることが重要です。パラメタの範囲は無限遠 ($s \rightarrow \pm\infty$) となる場合があります。(ベクトル関数として \mathbf{r} でなく、 \mathbf{r}_0 を使っている理由は、 \mathbf{r} は求めたい磁束密度の位置を指すのに用いているためです)
- (2) 線素ベクトル $d\mathbf{r}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{ds} ds$ を求めます。結局、電流素片 $I d\mathbf{r}_0$ が得られます。
- (3) パラメタの範囲に渡って、ビオ＝サバールの法則で計算します。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{r}_0 \times \{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(s)\}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(s)|^3}$$

例 1: 無限長直線電流がつくる磁束密度: 線電流の一例として、無限長に伸びた直線電流が作る磁束密度を求めます。

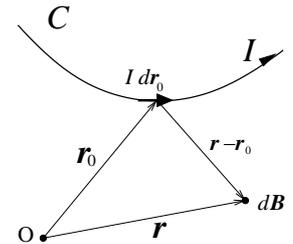


図 6.2: 電流素片 $I d\mathbf{r}_0$ が作る磁束密度 $d\mathbf{B}$

磁束密度を求めるための座標系として、デカルト座標系を考え、 z 軸に沿って $+z$ 方向に電流 I [A] が流れているものとします。 y 軸上の点 $\mathbf{r} = y\hat{\mathbf{y}}$ での磁束密度を求めます。

$\mathbf{r}_0(z_0) = z_0\hat{\mathbf{z}}$ における電流素片 $I d\mathbf{r}_0 = I \frac{d\mathbf{r}_0}{dz_0} dz_0 = I dz_0\hat{\mathbf{z}}$ が \mathbf{r} につくる磁束密度 $d\mathbf{B}(\mathbf{r})$ を求めます。

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = y\hat{\mathbf{y}} - z_0\hat{\mathbf{z}}, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = (y^2 + z_0^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$I d\mathbf{r}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = I dz_0\hat{\mathbf{z}} \times (y\hat{\mathbf{y}} - z_0\hat{\mathbf{z}}) = I dz_0y(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}}) = -Iy dz_0\hat{\mathbf{x}}$$

より、

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I d\mathbf{r}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = \frac{\mu_0 -Iy dz_0}{4\pi (y^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{x}} \quad (6.4)$$

となります。全電流素片からの寄与より、磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ が求められます。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 -Iy dz_0}{4\pi (y^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{x}} = -\frac{\mu_0 I y}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_0}{(y^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{\mathbf{x}} \quad (6.5)$$

この積分は、 $z_0 = y \tan \theta$ と積分変数変換することで計算できます。

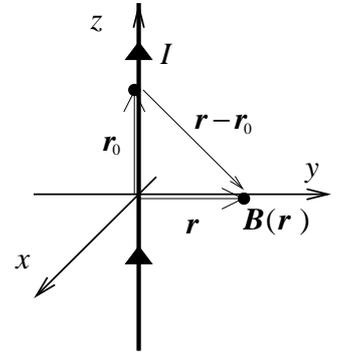


図 6.3: z 軸上に置かれた線電流のつくる磁束密度

6.2.2 面電流密度、体積電流密度として分布するときのビオ=サバールの法則

面電流密度として分布するときのビオ=サバールの法則は以下のようになります。位置 \mathbf{r}_0 (二つのパラメータを持つベクトル関数) における面電流密度 $\mathbf{J}_S(\mathbf{r}_0)$ [A/m] に関して、微小面素 dS_0 [m²] を考えたとき、電流素片は $\mathbf{J}_S(\mathbf{r}_0)dS_0$ [A·m] となります。従って、ビオ=サバールの法則は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \iint_S \frac{\mu_0 \mathbf{J}_S(\mathbf{r}_0)dS_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (6.6)$$

となります。MKSA 単位系において、面電流密度 \mathbf{J}_S は [A/m] の単位を持ちます。

金属ストリップ中を流れる電流が作る磁束密度 幅 w [m]、厚さは極めて薄い金属 (金属ストリップと呼ぶ) に一様に電流 I [A] が流れているものとします。 z 軸上の点における磁束密度 $\mathbf{B}(0, 0, z)$ を求めます。

電流が分布している面は $\mathbf{r}_0 = x_0\hat{\mathbf{x}} + y_0\hat{\mathbf{y}}$ ($-\infty \leq x_0 \leq \infty$, $-w \leq y_0 \leq w$) で与えられます。電流密度分布は、 $z = 0$ の面で $-w \leq y_0 \leq w$ の範囲にのみ $\mathbf{J}_S(\mathbf{r}_0) = \frac{I}{w}\hat{\mathbf{x}}$ [A/m] の面電流密度であり、他の点では $\mathbf{J}_S(\mathbf{r}_0) = \mathbf{0}$ です。微小面素は $dS_0 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x_0} \times \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial y_0} \right| dx_0 dy_0 = dx_0 dy_0$ となり、この面素領域の電流素片は $\mathbf{J}_S(\mathbf{r}_0)dS_0 = \frac{I}{w} dx_0 dy_0 \hat{\mathbf{x}}$ となります。観測点 (求めたい磁束密度の点=観測点) は $\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{z}}$ より、 $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = -x_0\hat{\mathbf{x}} - y_0\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ 、 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = (x_0^2 + y_0^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ 、

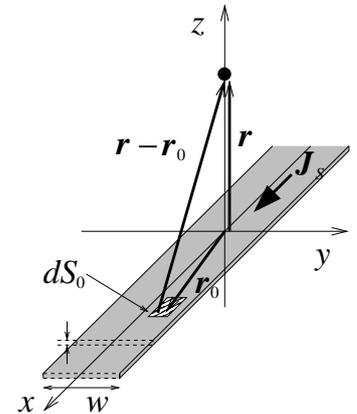


図 6.4: 金属ストリップ中の電流がつくる磁束密度

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(0, 0, z) &= \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 \frac{I}{w} \hat{\mathbf{x}} dx_0 dy_0 \times (-x_0\hat{\mathbf{x}} - y_0\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}})}{4\pi (x_0^2 + y_0^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi w} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} (-y_0\hat{\mathbf{z}} - z\hat{\mathbf{y}}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dy_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi w} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} (-y_0\hat{\mathbf{z}} - z\hat{\mathbf{y}}) \frac{2}{y_0^2 + z^2} dy_0 \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi w} (-\hat{\mathbf{z}}) \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{y_0}{y_0^2 + z^2} dy_0 - \frac{\mu_0 I}{2\pi w} z\hat{\mathbf{y}} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{1}{y_0^2 + z^2} dy_0 = 0 - \frac{\mu_0 I}{\pi w} \tan^{-1} \frac{w}{2z} \hat{\mathbf{y}} \quad (6.7) \end{aligned}$$

(体積) 電流密度として分布するときは以下ようになります。位置 r_0 にある電流密度 $J(r_0)$ [A/m²] に関して、微小体積 dV_0 [m³] を考えたとき、電流素片は $J(r_0)dV_0$ [A·m] となります。従って、ビオ=サバルの法則は

$$B(r) = \int d\mathbf{B}(r) = \iiint_V \frac{\mu_0 \mathbf{J}(r_0)dV_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \tag{6.8}$$

となります。

6.3 真空中の磁場の法則

ここでは、定常電流 (時間的に一定の電流) によってできる磁場がどのような性質を持っているか、どのような磁場でも必ず持っている性質について説明します。これを定量的に表したものが法則です。自然に存在する磁場に共通の性質を述べただけなので、これらの法則は直接的にかの役に立つわけではありません (役に立たせるためにつくった公式などとは異なります)。しかし、この法則に合わないような (定常電流によってできる) 磁場は存在しない、ということは理解しておいて下さい。

6.3.1 真空中のアンペールの法則

法則と数式による記述

真空中のアンペールの法則

磁束密度 B [T] の任意の周回路 C での周回積分は、その周 C の中を貫く電流 I [A] の μ_0 倍に等しい。ただし、周回積分の向きと電流の正の向きは右ねじの法則に従う。この法則を真空中のアンペールの法則という。数式で記述すると、

$$\oint_C \mathbf{B}(r) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_S \mathbf{J}(r) \cdot d\mathbf{S} \tag{6.9}$$

となる。ただし、 S は C を縁とする任意の開曲面である。周囲は真空とする。アンペールの法則は微分形を用いると次のように書ける。

$$\nabla \times \mathbf{B}(r) = \mu_0 \mathbf{J}(r) \tag{6.10}$$

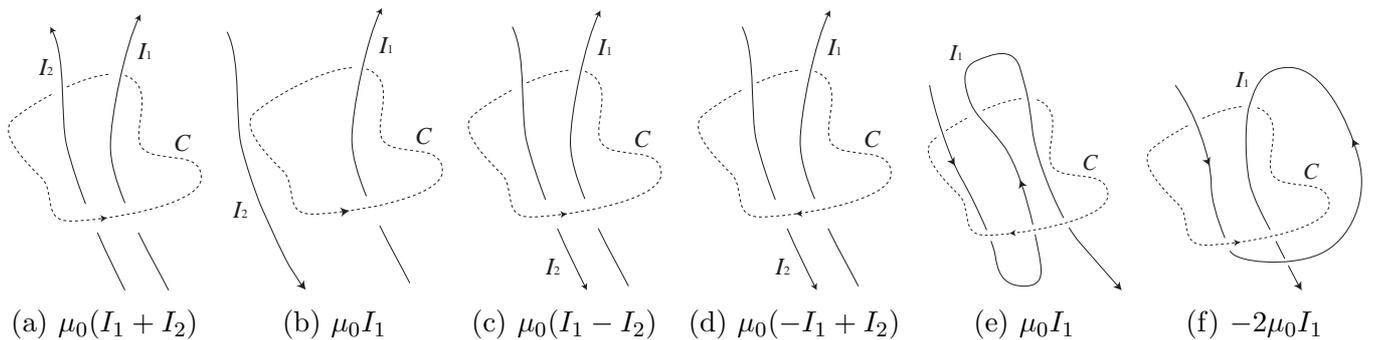


図 6.5: 周回積分路 C で $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$ を計算した結果。(線が途切れているように見えるのは立体を表しているとして解釈する)

(a) 左辺 $\oint_C \mathbf{B}(r) \cdot d\mathbf{r}$ の意味:

磁束密度 $B(r)$ [T] は空間のあらゆる点に存在する量であり、「場」です。その空間において、任意の (何でもよい) 一周するループ C を描くことを考えます。また、一周する方向を決めておきます。ループ C 上のある

点 r における接線方向を持ち、微小な長さを持つベクトル (向きは先に定義した一周する向き)、即ち線素ベクトルを dr とします。

その点における磁束密度 $B(r)$ と、そのベクトル dr の内積 $B(r) \cdot dr$ が計算できます (C 上の各点で $B(r)$ も dr も変化します)。この内積をループ C の一周に渡って合計、即ち積分を行います。それが $\oint_C B(r) \cdot dr$ です。

○のついた積分記号 \oint は「一周する積分」を意味します (始点と終点はどこでも構いません)。

(b) 右辺 $\mu_0 \iint_S J(r) \cdot dS$ の意味:

面積分 $\iint_S J(r) \cdot dS$ は、開曲面 S を貫く電流を意味します。ここで S は先に決めたループ C を縁とする任意の開曲面 S です。面 S には「正の方向 (dS の向き)」が定義され、それは先のループ C の向きに右ねじを回したときにねじが進む方向となります¹。

開曲面 S 上の点 r における微小な一部の微小面積 (面素) dS を考えます。 dS はほぼ平らとしてよく、 dS に垂直で正の方向を向いた単位ベクトルを $\hat{n}(r)$ とします (単位法線ベクトル。場所によって異なるので r の関数としました)。ここで面素ベクトル $dS = \hat{n}(r)dS$ が定義できます。面素ベクトルと r における電流密度 $J(r)$ [A/m^2] の内積 $J(r) \cdot dS$ が計算できますが、これは dS を通過する電流を表します。

全開曲面 S を通過する全電流 I [A] は $I = \iint_S J(r) \cdot dS$ で計算できます。この μ_0 倍が真空中のアンペールの法則の右辺です。なお、ループ C を縁とする開曲面は無限に定義することができますが、そのどれをとっても構いません。ループを通過した電流は、開曲面をどこにとっても必ず通過し、その電流に変化は生じないからです。

例) 真空中のアンペールの法則が成立していることの確認 無限に長い直線状電流がある場合に、その電流によってできる磁束密度 $B(r)$ に対して、 $\oint_C B \cdot dr$ を計算します。

$B(r)$ は $z = 0$ の xy 平面において、 $B(x, y, 0) = \frac{\mu_0 I (-y\hat{x} + x\hat{y})}{2\pi(x^2 + y^2)}$ で与えられます。周回積分路 C として、原点を中心にした $z = 0$ の xy 平面内での半径 a の円を考えます (向きとして、右ねじが $+z$ 方向に進む向きとします)。

周上の点 r と x 軸との角度を ϕ とすると、周上の点 r は ϕ をパラメタとするベクトル関数 $r(\phi) = a \cos \phi \hat{x} + a \sin \phi \hat{y} = x(\phi)\hat{x} + y(\phi)\hat{y}$ で表現でき、 ϕ の範囲は $0 \leq \phi < 2\pi$ です (周回積分なので始点はどこでもよく、例えば $\frac{\pi}{2} \leq \phi < \frac{5\pi}{2}$ などでも構いません)。

$r(\phi)$ における線素ベクトルは $dr = \frac{dr}{d\phi} d\phi = a d\phi (-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y})$ となります。従って、

$$B(r(\phi)) \cdot dr = \frac{\mu_0 I (-a \sin \phi \hat{x} + a \cos \phi \hat{y})}{2\pi a^2} \cdot a d\phi (-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\phi$$

より、

$$\oint_C B(r) \cdot dr = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = \mu_0 I \quad (6.11)$$

となり、 C の中心を流れる電流 I の μ_0 倍となっています。従って、この場合において、アンペールの法則が成立していることが確認できたと言えます。

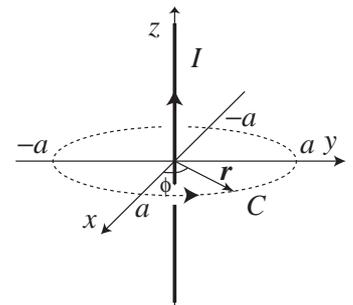


図 6.6: 無限長の電流と周回積分路

¹ C と S の関係のイメージ: C の形をした針金を想起して下さい。この針金をシャボン水に付けるとシャボンの膜が張られます。この膜が S です。弱く息を吹けば膜は変形してふくらむが縁の針金は変化しません。変形した膜を S としてもよく、いずれにせよ膜 S は針金 C を縁としています。これが「 S はループ C を縁とする任意の開曲面」のイメージです。

6.3.2 アンペールの法則の応用により、磁束密度 $B(r)$ を求める

真空中のアンペールの法則は、磁束密度の周回積分と電流の関係を表すものであり、空間の各点の磁束密度を求めるものではありません。しかし、電流が特殊な形状のとき、周回積分路 C を適切に選ぶことでアンペールの法則を応用して磁束密度を求めることができます。ただ、「アンペールの法則の理解の確認のため」に、このような問題が試験に出されることが多いので、そのために説明しておきたいと思います。

アンペールの法則の応用として磁束密度を求めることができる電流の形状は、電流密度分布が対称性を持っていて、従って磁束密度も対称である場合の、ほんの一部です。また、周回積分路 C は、磁束密度に平行または垂直(内積が0)であり、平行な部分では磁束密度の強さが一定となるような経路をとる必要があります。つまり、アンペールの法則を応用して磁束密度を求めることができるのは、たいへん限られたケースです。以下はその主なものについて説明します。

無限長直線電流: z 軸に沿って $+z$ 方向に流れる無限長直線電流 I [A] の場合、対称性より磁束密度は ϕ 成分のみを持ち ($B(\rho, \phi) = B_\phi(\rho)\hat{\phi}$)、その強度は電流からの距離のみに依存します。電流を中心とする半径 ρ の円を積分路 C にとると、

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = B_\phi 2\pi\rho = \mu_0 I \quad \therefore B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi} \quad (6.12)$$

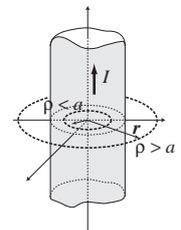


図 6.7: 円筒型電流

無限長円筒型電流: 半径 a [m] の円筒内に一様に電流 I [A] が流れているときを考えます。磁束密度は ϕ 成分のみでない値を持ちます ($B(\rho, \phi) = B_\phi(\rho)\hat{\phi}$) ので、半径 ρ [m] の円を積分路としますが、 $\rho < a$ のときは積分路内を貫く電流が異なるので分けて考えます。円筒の軸に垂直な面において、単位面積当たり $\frac{I}{\pi a^2}$ [A/m²] の密度で電流が流れていますので、

$$\oint \mathbf{B}(r) \cdot d\mathbf{r} = B_\phi 2\pi\rho = \begin{cases} \mu_0 \frac{I}{\pi a^2} \pi \rho^2, & \rho < a \\ \mu_0 I, & \rho \geq a \end{cases} \quad \therefore B_\phi(\rho) = \begin{cases} \frac{\mu_0 \rho I}{2\pi a^2}, & \rho < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}, & \rho \geq a \end{cases} \quad (6.13)$$

無限長ソレノイド 円筒状に導線を一様に密に巻いたコイルをソレノイドと呼びます。単位長さあたり N 回巻かれている無限長のソレノイドを考えます(電流は I [A])。ソレノイドが無限に長いので、磁束密度はソレノイドの軸方向成分のみ持ちます。

ソレノイド外部で A~D の積分路を考えます。AD、BC では磁束密度の寄与はありません。AB と CD にできる磁束密度で、電流はないので

$$B_{AB} \cdot l - B_{DC} \cdot l = 0 \quad \therefore B_{AB} = B_{DC} \quad (6.14)$$

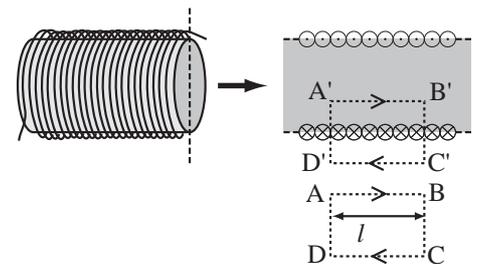


図 6.8: 無限長ソレノイドと断面図

CD を無限遠にとると $B_{DC} = 0$ 、従って $B_{AB} = 0$ となります。結局、ソレノイド外では $|B| = 0$ となります。A'B'C'D' の積分路を考えると

$$B_{A'B'} \cdot l - B_{D'C'} \cdot l = \mu_0 l N I$$

$B_{D'C'} = 0$ より、 $B_{A'B'} = \mu_0 N I$ を得ます。ソレノイド内はどこでも $|B| = \mu_0 N I$ となります。

無端ソレノイド 図 6.9 のように円形の断面を持つソレノイド(全 N 巻き)に電流 I を流したときを考えます。磁束密度は同心円方向にできます。中心からの半径 ρ の円を積分路とします。 ρ がソレノイド内部のとき、

$$B_\phi 2\pi\rho = \mu_0 N I \quad \therefore B_\phi = \frac{\mu_0 N I}{2\pi\rho} \quad (6.15)$$

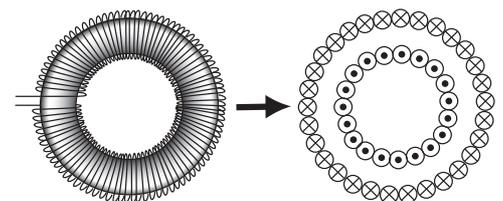


図 6.9: 無端ソレノイド

ソレノイド外部では電流は 0 なので $B_\phi = 0$ となります。

6.3.3 磁場のガウスの法則

磁束密度 $B(\mathbf{r})$ を任意の閉曲面 S で面積分した結果は 0 となります。式で書くと

$$\oiint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (6.16)$$

即ち、ある点から四方にベクトル場 $B(\mathbf{r})$ が放射状にできるような分布は存在しないということです。あるいは、ある閉曲面に出入りする磁力線について見たとき、閉曲面に入る磁力線の数と出てゆく磁力線の数は等しいということです。単磁荷が見つからないという事実もこの法則に反映しています。

磁場のガウスの法則は、微分形では次のように書けます。

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (6.17)$$

真空中の電場と磁場の法則の比較

	電場 (電界) $E(\mathbf{r})$	磁場 (磁束密度) $B(\mathbf{r})$
周回積分	$\oint \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$	$\oint \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I$
閉曲面積分	$\oiint \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho(\mathbf{r}) dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$	$\oiint \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$
源がつくる場	点電荷: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}_i ^3}$ 線状電荷: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 ^3}$ 面状電荷: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\mathbf{r}_0) dS_0 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 ^3}$ 体積状電荷: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}_0) dV_0 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 ^3}$	点磁荷は存在しない 線状電流: $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\mathbf{r}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 ^3}$ 面状電流: $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\mathbf{J}_s(\mathbf{r}_0) dS_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 ^3}$ 体積状電流: $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_0) dV_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 ^3}$

演習問題

- (1) 半径 a [m] の円の周上に電流 I [A] が流れている。この円の中心軸 (中心を通り、円の面に垂直な軸) 上の磁束密度を求めよ。

解) 円を xy 平面 (中心を原点) に置き、電流は $+x$ 方向から $+y$ 方向に測った角度 ϕ が増える方向に流れているものとする。中心軸上の点は $\mathbf{r} = z\hat{z}$ で表される。この電流の経路は $\mathbf{r}_0(\phi_0) = a \cos \phi_0 \hat{x} + a \sin \phi_0 \hat{y}$, $0 \leq \phi_0 \leq 2\pi$ とおける。

$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = -a \cos \phi_0 \hat{x} - a \sin \phi_0 \hat{y} + z\hat{z}$ となり、 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = (a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ である。電流素片は $I d\mathbf{r}_0 = Ia(-\sin \phi_0 \hat{x} + \cos \phi_0 \hat{y}) d\phi_0$ より、Biot-Savart の法則を適用して、

$$\begin{aligned} d\mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a(-\sin \phi_0 \hat{x} + \cos \phi_0 \hat{y}) d\phi_0 \times (-a \cos \phi_0 \hat{x} - a \sin \phi_0 \hat{y} + z\hat{z})}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{z(\cos \phi_0 \hat{x} + \sin \phi_0 \hat{y}) + a\hat{z}}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} a d\phi_0 \end{aligned}$$

円の周上の電流全ての寄与を評価することで磁束密度 $B(\mathbf{r}(z)) = B(z)$ [T] が求められる。

$$B(z) = \int d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \{z(\cos \phi_0 \hat{x} + \sin \phi_0 \hat{y}) + a\hat{z}\} d\phi_0 = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}$$

円筒座標系を用いると以下ようになる。 $\mathbf{r} = z\hat{z}$, $\mathbf{r}_0(\phi_0) = a\hat{\rho}(\phi_0)$, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\phi_0) = -a\hat{\rho} + z\hat{z}$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = (a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$, $I d\mathbf{r}_0 = I \frac{d\mathbf{r}_0}{d\phi_0} d\phi_0 = Ia\hat{\phi}(\phi_0) d\phi_0$,

$$B(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Ia\hat{\phi}(\phi_0) d\phi_0 \times (-a\hat{\rho}(\phi_0) + z\hat{z})}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} (z\hat{\rho} + a\hat{z}) d\phi_0 = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}$$

なお、ここで、 $\int_0^{2\pi} \hat{\rho}(\phi_0) d\phi_0 = 0$ を用いた。(電流は円筒座標系における対称性があるので、計算におけるベクトルの成分が少なくて済む)

(2) z 軸に沿って $+z$ 方向に、 $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$, $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$ の範囲に一樣に電流 I [A] が流れている。このとき、 $\mathbf{r} = x\hat{x}$ にできる磁束密度 $B(\mathbf{r})$ を求めよ。

$$(\text{Ans.}) : B(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi ab} \left\{ b \log \frac{\frac{b^2}{4} + (x + \frac{a}{2})^2}{\frac{b^2}{4} + (x - \frac{a}{2})^2} + 4(x + \frac{a}{2}) \tan^{-1} \frac{\frac{b}{2}}{x + \frac{a}{2}} - 4(x - \frac{a}{2}) \tan^{-1} \frac{\frac{b}{2}}{x - \frac{a}{2}} \right\} \hat{y}$$

6.4 磁場によって働く力

6.1 節で述べたように、磁場中におかれた電流、即ち運動する荷電粒子には力が働きます。その力を使って磁束密度を定義しました。

今回は、その静磁場によって働く力について、詳しく説明をします。

運動する荷電粒子に働く力と電流に働く力は同じですが、異なった形態をしていますので、話を整理して別々の形で述べます。

6.4.1 アンペール力

磁場中の電流には力が働きます。あるいはその磁場自体も別の電流が作るもので、**「二つの電流間には力が働く」**とすることもできます。

磁束密度 $B(\mathbf{r})$ があるとき、位置 \mathbf{r}_0 にある電流素片 $I d\mathbf{r}_0$ に働く力 $d\mathbf{F}$ は

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{r}_0 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) \text{ [N]} \tag{6.18}$$

で与えられます。この力をアンペール力と呼びます。

例 1. 2つの無限長直線電流間に働く力:

2つの直線電流 I [A] が平行に $+z$ 方向に流れており、一つは原点、もう一つは $\mathbf{r} = a\hat{y}$ の点を通るものとします。まずは $y = a$ にある電流の $-\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2}$ にかかる力を計算しましょう。

$y = a$ にある電流の $-\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2}$ の部分を表す位置ベクトルは、パラメタ z_0 を用いて $\mathbf{r}_0 = a\hat{y} + z_0\hat{z}$ ($-\frac{l}{2} \leq z_0 \leq \frac{l}{2}$) で表現できます。

このときの電流素片は $I d\mathbf{r}_0 = I dz_0\hat{z}$ となります。

原点を通る電流によって \mathbf{r} にできる磁束密度は $B(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I(-y\hat{x} + x\hat{y})}{2\pi(x^2 + y^2)}$ なので、

\mathbf{r}_0 において $B(\mathbf{r}_0) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{x}$ となります。

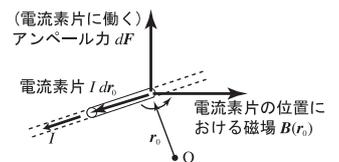


図 6.10: 電流素片 $I d\mathbf{r}_0$ に働くアンペール力

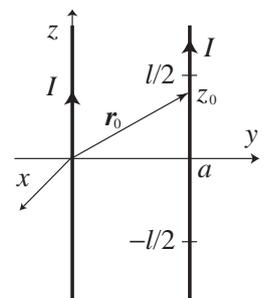


図 6.11: 2本の無限長直線電流

この磁束密度が電流素片に及ぼす力 $d\mathbf{F}$ は

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{r}_0 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = I dz_0 \hat{\mathbf{z}} \times \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{\mathbf{x}} \right) = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} dz_0 \hat{\mathbf{y}} \quad (6.19)$$

となります。従って、 $-\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2}$ の範囲では、それを積分して

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} dz_0 \hat{\mathbf{y}} = -\frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi a} \hat{\mathbf{y}} \quad (6.20)$$

となります。 $-y$ 方向ですので、「引き寄せられる」方向となります。無限長電流全体では力は無限大になってしまいますが、長さ l [m] の部分には、これだけの力が作用していることとなります。

補足: A(アンペア)の定義: SI 単位系において、A(アンペア)は7つの基本単位の一つです。

1 A は次のように定義されます。先の例において、 $l = 1$ m、 $I = 1$ A、 $y_0 = 1$ m とすると、 $|\mathbf{F}| = \frac{\mu_0}{2\pi} = 2 \times 10^{-7}$ N となりますが、これが 1 A の定義となります。つまり、「1 m 離れた平行な無限長電流に等しい電流を流したとき、1 m 当たり働く力が 2×10^{-7} N となる電流の大きさ」が 1 A です。

例 2. 一様磁場中のコイルに作用する力と力のモーメント:

図 6.12 に示すように、 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0 \hat{\mathbf{y}}$ の一様磁場中に、一辺が a, b の長方形コイルがあり、矢印の向きに電流 I が流れていることを考えます。このコイルの中心が固定されており x 軸から ϕ 傾いているときに、コイルに働く力とそのモーメントを求めます。

①の辺では、電流の経路を表すベクトル関数: $\mathbf{r}_0(z_0) = \frac{b}{2} \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \frac{b}{2} \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + z_0 \hat{\mathbf{z}}$ ($-\frac{a}{2} \leq z_0 \leq \frac{a}{2}$) となります。従って、電流素片は $I d\mathbf{r}_0 = I dz_0 \hat{\mathbf{z}}$ で与えられます。この電流素片に働くアンペール力は $d\mathbf{F}_1 = I dz_0 \hat{\mathbf{z}} \times B_0 \hat{\mathbf{y}} = -B_0 I dz_0 \hat{\mathbf{x}}$ となりますので、全アンペール力はそれを積分して、以下で与えられます。

$$\mathbf{F}_1 = -B_0 I \hat{\mathbf{x}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz_0 = -B_0 I a \hat{\mathbf{x}} \quad (6.21)$$

次に電流素片に働く力のモーメント $d\mathbf{N}_1$ を求めます。

$$d\mathbf{N}_1 = \mathbf{r}_0 \times d\mathbf{F}_1 = \left(\frac{b}{2} \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \frac{b}{2} \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + z_0 \hat{\mathbf{z}} \right) \times (-B_0 I dz_0 \hat{\mathbf{x}}) = \left(\frac{b}{2} \sin \phi \hat{\mathbf{z}} - z_0 \hat{\mathbf{y}} \right) B_0 I dz_0 \quad (6.22)$$

従って、①の辺全体では、これを合計すれば良いこととなります。

$$\mathbf{N}_1 = \int d\mathbf{N}_1 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} B_0 I \left(\frac{b}{2} \sin \phi \hat{\mathbf{z}} - z_0 \hat{\mathbf{y}} \right) dz_0 = B_0 I \frac{ab}{2} \sin \phi \hat{\mathbf{z}} \quad (6.23)$$

次に②の辺について求めます。やり方はまったく同様です。経路は、 $\mathbf{r}_0(s) = -\frac{b}{2} \cos \phi \hat{\mathbf{x}} - \frac{b}{2} \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - s \hat{\mathbf{z}}$, ($-\frac{a}{2} \leq s \leq \frac{a}{2}$) で与えられます。電流素片は $I d\mathbf{r}_0 = -I ds \hat{\mathbf{z}}$ となり、これにかかるアンペール力は $d\mathbf{F}_2 = -I ds \hat{\mathbf{z}} \times B_0 \hat{\mathbf{y}} = B_0 I ds \hat{\mathbf{x}}$ となりますので、辺全体ではこれを積分して $\mathbf{F}_2 = B_0 I a \hat{\mathbf{x}}$ を得ます。

力のモーメントについては、電流素片に対するモーメントが $d\mathbf{N}_2 = \mathbf{r}_0 \times d\mathbf{F}_2 = \left(\frac{b}{2} \sin \phi \hat{\mathbf{z}} - s \hat{\mathbf{y}} \right) B_0 I ds$ となりますので、全体では $\mathbf{N}_2 = \int d\mathbf{N}_2 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} B_0 I \left(\frac{b}{2} \sin \phi \hat{\mathbf{z}} - s \hat{\mathbf{y}} \right) ds = B_0 I \frac{ab}{2} \sin \phi \hat{\mathbf{z}}$ となります。

③の辺については、 $r_0(s) = (\frac{b}{2} - s) \cos \phi \hat{x} + (\frac{b}{2} - s) \sin \phi \hat{y} + \frac{a}{2} \hat{z}$, ($0 \leq s \leq b$) で経路が与えられますので、電流素片は $I dr_0 = -I ds(\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y})$ となります。この電流素片に作用する力は $dF_3 = -I ds(\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}) \times B_0 \hat{y} = -B_0 I ds \cos \phi \hat{z}$ となりますので、辺全体では $F_3 = -B_0 I b \cos \phi \hat{z}$ となります。

力のモーメントについては、電流素片に対するモーメントが $dN_3 = r_0 \times dF_3 = (\frac{b}{2} - s) \cos^2 \phi B_0 I ds \hat{y} - (\frac{b}{2} - s) \sin \phi \cos \phi B_0 I ds \hat{x}$ ですので、全体では以下ようになります。

$$N_3 = \int dN_3 = \int_0^b B_0 I (\cos^2 \phi \hat{y} - \sin \phi \cos \phi \hat{x}) \left(\frac{b}{2} - s\right) ds = 0 \tag{6.24}$$

④の辺については、経路は $r_0(s) = s \cos \phi \hat{x} + s \sin \phi \hat{y} - \frac{a}{2} \hat{z}$, ($-\frac{b}{2} \leq s \leq \frac{b}{2}$) となり、電流素片は $I dr_0 = I(\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}) ds$ で与えられます。電流素片に作用する力は $dF_4 = I dr_0 \times B = I(\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}) ds \times B_0 \hat{y} = B_0 I \cos \phi ds \hat{z}$ となりますので、辺全体に作用する力は $F_4 = B_0 I b \cos \phi \hat{z}$ となります。

力のモーメントについては、電流素片に対するモーメントは $dN_4 = r_0 \times dF_4 = (s \cos \phi \hat{x} + s \sin \phi \hat{y} - \frac{a}{2} \hat{z}) \times B_0 I \cos \phi ds \hat{z} = B_0 I s (-\cos^2 \phi \hat{y} + \sin \phi \cos \phi \hat{x}) ds$ となりますので、辺全体は $N_4 = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} B_0 I s (-\cos^2 \phi \hat{y} + \sin \phi \cos \phi \hat{x}) ds = 0$ となります。

結局、ループ全体はこれらを加えれば良いので、 $N = \sum_{i=1}^4 N_i = B_0 I a b \sin \phi \hat{z}$, $F = \sum_{i=1}^4 F_i = 0$ となります。つまり、力は働かない(移動はしない)が $\phi = 0$ となるように向きをかえる、ということになります。

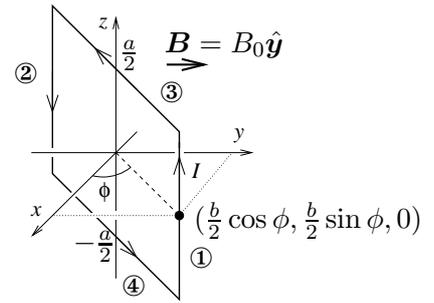


図 6.12: 磁場中のコイル

6.4.2 ローレンツ力

磁場中を運動する荷電粒子には力が働くことが知られています。磁束密度 B [T] 中を電荷 q [C] の荷電粒子が速度 v [m/s] で運動していたとき、この粒子に働く力 F [N] は

$$F = qv \times B(r) \tag{6.25}$$

で与えられます。 r は、この時刻における電荷 q の位置です。電荷が電荷密度分布 $\rho(r)$ で体積的に分布していたとき、位置 r において単位体積当たり

$$f(r) = \rho(r)v(r) \times B(r) \tag{6.26}$$

の力を受けます。ここで $v(r)$ は、位置 r にある電荷が移動する速度ベクトルです。この電荷が領域 V 内においてのみ $\rho(r) \neq 0$ とすると、全体で受ける力は

$$F = \iiint_V f(r) dV = \iiint_V \rho(r)v(r) \times B(r) dV \tag{6.27}$$

となります。

一様磁場中における荷電粒子の運動: 一様な磁束密度 $B(r) = B_0 \hat{z}$ [T] (B_0 [T] は定数) を考えます。この磁束密度中で $t = 0$ s において、正の電荷 q [C] の荷電粒子 (質量 m [kg]) が速度 $v = v_0 \hat{x}$ [m/s] で、位置 $r = 0$ にあるものとして、時刻 $t > 0$ における荷電粒子の位置 $r(t)$ と速度 $v(t)$ を求めます。

運動方程式は

$$m \frac{dv(t)}{dt} = qv(t) \times B_0 \hat{z} = qB_0 \{v_x(t)(-\hat{y}) + v_y(t)\hat{x}\} \tag{6.28}$$

となりますので、成分ごとに表示すると次のようになります。

$$m \frac{dv_x}{dt} = qB_0 v_y(t), \quad m \frac{dv_y}{dt} = -qB_0 v_x(t) \tag{6.29}$$

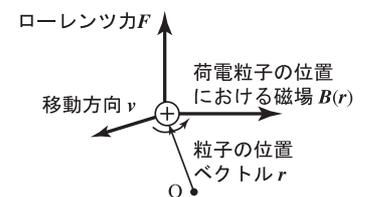


図 6.13: 荷電粒子に働くローレンツ力

初期条件 $v_x(0) = v_0, v_y(0) = 0$ を用いてこの連立微分方程式を解くと

$$v_x = v_0 \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right), \quad v_y = -v_0 \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) \quad (6.30)$$

となります。ベクトルで表記すると

$$\mathbf{v}(t) = v_0 \left\{ \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right) \hat{x} - \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) \hat{y} \right\} \quad (6.31)$$

となります。また、時刻 t における荷電粒子の位置 $\mathbf{r}(t)$ は、初期条件 $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ を用いて、

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t') dt' = \frac{mv_0}{qB_0} \left[\sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) \hat{x} + \left\{ \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right) - 1 \right\} \hat{y} \right] \quad (6.32)$$

となります。

ホール効果 導体や半導体に電界を印加し電流が流れます。このとき、電界によって正の電荷または負の電荷（キャリアと呼ぶ）が移動しています。

電界の向き（即ち、電流の流れている向き）に垂直に磁場を印加すると、キャリアはローレンツ力を受けます。このローレンツ力によって、キャリアは電界・磁場ともに垂直な方向のどちらかに多く存在することになり、この偏在による横方向（電流とも磁場とも垂直な）電界が生じるようになります。

キャリアはローレンツ力とキャリア自身が生じさせた電界が釣り合ったところで平衡状態となります。このように、横方向電界（あるいはそれによる電位差）が生じることをホール効果と呼びます。

力が、平衡した状態について考えましょう。キャリアが速度 v で移動しているものとします。磁束密度 B が印加されているとすれば、ローレンツ力

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.33)$$

が生じていることとなります（正のキャリアなら $q > 0$ 、負のキャリアなら $q < 0$ ）。また、このキャリアの移動によって生じている、“ホール効果による電界 E_h ” による力 $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}_h$ とローレンツ力 \mathbf{F}_L が釣り合っているので、次式が成立します。

$$q\mathbf{E}_h + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (6.34)$$

また、この材料中に N [m^{-3}] の密度でキャリアが存在しているとき、電流密度 \mathbf{J} は $\mathbf{J} = qN\mathbf{v}$ となりますので、式 (6.34) 中に N をかけると $qN\mathbf{E}_h + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ という式が得られます。ここから、ホール効果による電界は

$$\mathbf{E}_h = -\frac{1}{qN} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -R\mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (6.35)$$

となります。ここで

$$R = \frac{1}{qN} [\text{C}^{-1} \text{m}^{-3}] \quad (6.36)$$

はホール定数と呼ばれるものです。キャリアが正の場合、ホール定数は正、負のキャリアであればホール定数は負となります。

ホール効果は 19 世紀末に Hall によって発見されました。ホール効果の応用としては、半導体のキャリアの測定や、磁場のモニタ、電流のセンサ（クランプメータ）などに用いられています。

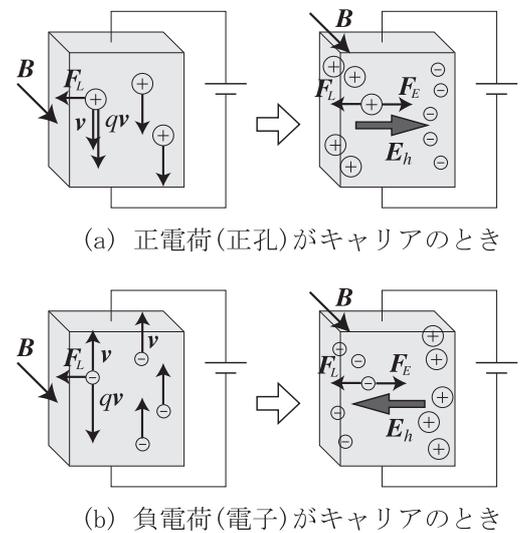


図 6.14: ホール効果

6.4.3 アンペール力とローレンツ力の関係

アンペール力とローレンツ力は磁場中で力を受ける電荷の形態が異なりますが、同じ力を表しています。ここでは同じ力であることを説明します。電流を移動する電荷群と表すことで両者を比較できます。

単位体積当たり N [m^{-3}] の q [C] の電荷が $v = v_0 \hat{l}$ [m/s] で移動しているものとします。 Δt [s] 間に、電荷の移動に垂直な、面積 ΔS [m^2] を通過した電荷 ΔQ [C] は

$$\Delta Q = qNv_0\Delta t \Delta S \quad (6.37)$$

となります。従って、電流 I [A] は以下で得られます。

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qNv_0\Delta S \quad (6.38)$$

この電流の微小部分 $\Delta r = \hat{l}\Delta r$ に働くアンペール力 F_A [N] は

$$\mathbf{F}_A = I \mathbf{dr} \times \mathbf{B} = \hat{l} \Delta r \times \mathbf{B} = qN\mathbf{v}\Delta S \Delta r \times \mathbf{B} = (N\Delta S \Delta r)q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.39)$$

となります。この右辺は $(N\Delta S \Delta r)$ 個の電荷が受けた全ローレンツ力の合計と等しいことが分かります。

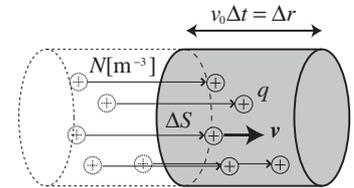


図 6.15: 移動する電荷群と電流

第7章 磁性体

これまでは真空中の磁場について述べてきました。本章では、真空だけでなく「磁場と相互作用する(=磁場に影響を与える)物質」がある場合について述べます。

ある種類の物質は、磁場中に置かれると周囲の磁場を変化させることが知られています。そのような物質を磁性体と呼びます。ここでは、磁性体があるときの電磁気学の法則の取り扱いについて述べてゆきます。

7.1 磁化現象

磁場中に物質を置くと、その磁場の分布を乱すような物質が存在しています。そのような物質を磁性体と呼びます。磁性体は磁場中で磁化して、図 7.1 のような磁場をつくります。図 7.1(a) のような磁場をつくる物質を常磁性体、(b) を反磁性体と呼びます。

また、非常に強い常磁性を示すものを強磁性体と呼びます。常磁性や強磁性であれば磁石に引き寄せられることとなります。一方で、反磁性は磁石から離れてゆく挙動を示します(が、実際には、自分の重量を動かすほど強い反磁性の物質はないようです)。

なぜ磁化する物質とそうでない物質があるのかと言いますと、磁化を示す物質は、構成する原子や分子において、電子の軌道運動やスピンによる電流が流れているためです。その電流が周囲に磁場をつくるのですが、それぞれがランダムな向きときはキャンセルし合って磁場が現われません。外部磁場を印加することによって、電流の向きがそろうことで磁性を示す、とされています。

物質の温度が変われば性質が変化し、その物質が示す磁性も変化することが知られています。常温で強磁性の元素は、鉄(Fe)、ニッケル(Ni)、コバルト(Co)、ガドリニウム(Gd)のみです。また化合物では多数存在します(ネオジム磁石など)。

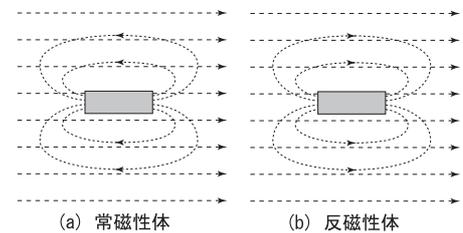


図 7.1: 磁性体と磁化

7.2 磁性体があるときの磁場の法則の修正

磁場の法則(微分形)は、真空中のときは磁束密度 $B(\boldsymbol{r})$ [T] を用いて

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad (7.1)$$

と表されました。この法則は磁性体があるときは磁界 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ [A/m] を導入して、次のような法則に修正されます。

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad (7.2)$$

磁束密度 \boldsymbol{B} と磁界 \boldsymbol{H} の関係は透磁率 μ [H/m] を用いて $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ と表されます。真空中においても真空の透磁率 μ_0 を用いれば \boldsymbol{H} も定義できますので、通常は式(7.2)を磁場の基本法則の式とします。

7.2.1 ベクトル・ポテンシャル

ベクトル解析の恒等式として、任意のベクトル場 $A(\mathbf{r})$ に対して $\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$ が成立します。

そこで磁場の法則 $\nabla \cdot B = 0$ から、 $B = \nabla \times A$ と表すこととします。この A [Wb/m = H·A/m] をベクトル・ポテンシャルと呼びます。

電流が存在したときに、磁束密度 B を求めることが困難だったり複雑だったりしたとき、その電流によるベクトル・ポテンシャル A を求め、その A の回転をとることで磁束密度 B を求める方が用意なケースがあります。

ベクトル・ポテンシャルは近年になり「観測できる物理量」として見直されていますが、本講義では「単なる磁束密度を求めるための補助関数」として扱います。

線電流があったときのベクトルポテンシャルは次式で与えられます。

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (7.3)$$

実際に、回転をとると

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \nabla \times \frac{I d\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \times I d\mathbf{r}_0 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C I d\mathbf{r}_0 \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = B(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (7.4)$$

となり、ビオ＝サバルの法則が得られます。

同様に体積状に分布する電流密度 $J(\mathbf{r})$ [A/m²] があったとは

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_0} \frac{J(\mathbf{r}_0) dV_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (7.5)$$

がベクトル・ポテンシャルを求める式となります。

7.2.2 磁気モーメント

原子、分子中の電子によるループ電流が磁性体の磁場となります。そこで微小なループ電流によるベクトル・ポテンシャルを求めます。

原点にある半径 a [m] の微小なループ電流が $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ につくるベクトル・ポテンシャルを求めます。微小とは、 $|\mathbf{r}| \gg a$ ということの意味します。

$$\mathbf{r}_0 = a \cos \phi_0 \hat{x} + a \sin \phi_0 \hat{y}, \quad I d\mathbf{r}_0 = Ia(-\sin \phi_0 \hat{x} + \cos \phi_0 \hat{y}) d\phi_0 \quad (7.6)$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - a \cos \phi_0) \hat{x} + (y - a \sin \phi_0) \hat{y} + z \hat{z} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1} &= \{(x - a \cos \phi_0)^2 + (y - a \sin \phi_0)^2 + z^2\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \{x^2 + y^2 + z^2 - 2a(x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0) + a^2\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \{r^2 - 2a(x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0) + a^2\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= r^{-1} \left\{ 1 - 2\frac{a}{r} \left(\frac{x}{r} \cos \phi_0 + \frac{y}{r} \sin \phi_0 \right) + \frac{a^2}{r^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (7.8)$$

ここで a/r の2次以上(高次項)を無視して、テイラー展開で近似計算します。

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1} &\approx r^{-1} \left\{ 1 + \frac{a}{r} \left(\frac{x}{r} \cos \phi_0 + \frac{y}{r} \sin \phi_0 \right) \right\} = r^{-1} \left\{ 1 + \frac{a \sin \theta}{r} (\cos \phi \cos \phi_0 + \sin \phi \sin \phi_0) \right\} \\ &= r^{-1} \left\{ 1 + \frac{a \sin \theta}{r} \cos(\phi - \phi_0) \right\} = \frac{1}{r} + \frac{a \sin \theta}{r^2} \cos(\phi - \phi_0) \end{aligned} \quad (7.9)$$

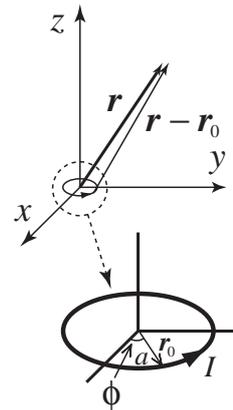


図 7.2: 電流ループ

従って、ベクトル・ポテンシャルの計算は次のようになります。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \left\{ -\sin \phi_0 \hat{x} + \cos \phi_0 \hat{y} + \frac{a \sin \theta}{r} (-\sin \phi_0 \hat{x} + \cos \phi_0) \cos(\phi - \phi_0) \right\} d\phi_0 \quad (7.10)$$

被積分関数の第 1, 2 項目は積分すると 0 となります。第 3 項目、第 4 項目はそれぞれ以下のようになります。

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi_0 \cos(\phi - \phi_0) d\phi_0 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{ \sin \phi + \sin(2\phi_0 - \phi) \} d\phi_0 = \pi \sin \phi \quad (7.11)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi_0 \cos(\phi - \phi_0) d\phi_0 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{ \cos \phi + \cos(2\phi_0 - \phi) \} d\phi_0 = \pi \cos \phi \quad (7.12)$$

従って、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin \theta}{4\pi r^2} (-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}) = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin \theta}{4\pi r^2} \hat{\phi} \quad (7.13)$$

となります。ここで、 $I \pi a^2 \hat{z} = \mathbf{m}$ とおくと、 $\hat{z} \times \hat{r} = (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \times \hat{r} = \sin \theta \hat{\phi}$ より、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times \hat{r}}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (7.14)$$

と書けます。この $\mathbf{m} = I S \hat{z}$ [$\text{A} \cdot \text{m}^2$] (S はループの面積) を磁気モーメントと呼びます¹。

7.2.3 磁化ベクトル

磁性体中では多くの磁気モーメントが様々な方向を向いて密に存在しています。周囲磁場があると、アンペール力によって磁場の方向を向くこととなります。

図 7.3、7.4 は、それを模式的に示した図です。

図 7.3 の左では、一様磁場中に置かれた微小電流ループの図です。このような配置だと、電流ループの上の方は、アンペール力で紙面手前に向いた力が働きます。また、下の方は、アンペール力で紙面奥向きの力が働きます。この力が働いて、図の右のような向きに回転します。この回転した向きになったとき、流れている電流によって、図の点線向きの磁場が加わるようになります。この磁場の方向は、背景磁場を強める方向です。

このように、微小電流ループが方向を変えますので、図 7.4 の左のようなバラバラの向きの電流ループの多くが、右のように同じ方向を向くことになり、全体として磁場が現れる、というのが磁化現象です。

では、これを数学的にどのように記述するかを考えていきましょう。数学的に記述できないと、定量的(どのくらいの量、磁化するのか)な評価ができません。

そこで、 r における単位体積あたりの磁気モーメントとして

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{m}_i}{\Delta V} \quad [\text{A/m}] \quad (7.15)$$

を定義します。級数は r の周囲の領域 ΔV [m^3] 内に含まれる磁気モーメントの合計をとるという意味です。この \mathbf{M} [A/m] を磁化ベクトルと呼びます。磁化ベクトルは、 r が磁性体の外では $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = 0$ とすればよいので、空間の全ての点で定義できるベクトル場です。

逆に言えば、微小体積 ΔV があったとき、その磁気モーメント \mathbf{m} は $\mathbf{m} = \mathbf{M} \Delta V$ で表されます。

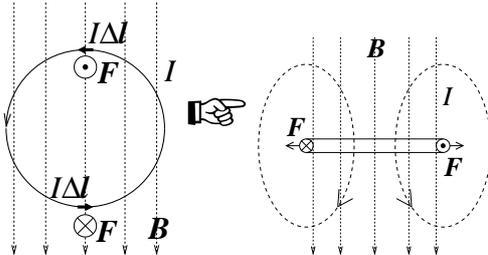


図 7.3: 磁場中の磁化電流が受ける力

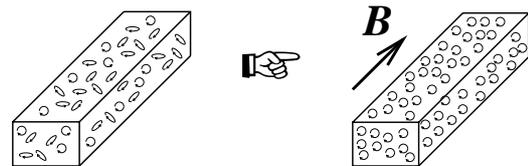


図 7.4: 磁化された磁性体

¹ $\mathbf{m} = \mu_0 I S$ [$\text{Wb} \cdot \text{m}$] と定義する教科書もあるので注意して下さい。

そこで、磁化ベクトル M が分布しているときのベクトル・ポテンシャルは次式で表されます。

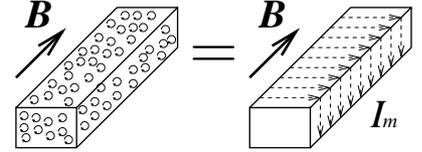
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_0} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) dV_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (7.16)$$

7.2.4 磁化電流と磁化ベクトルの関係

磁化する、即ち磁性体中の磁気モーメントが向きをそろえて周囲に磁場を作ると、電子による電流によって全体としての電流が現れることとなります。これを磁化電流と呼びます (図 7.5)。磁化電流は、とり出して電流として使えるわけではないのですが、それによって磁場が周囲に形成されることとなります。

一方で、最初に磁場を起こすために流す電流は、真電流と呼ばれます。

磁化電流を I_m [A]、磁化電流密度を J_m [A/m²] とすると、アンペールの法則は



$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0(I + I_m), \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}_m) \quad (7.17)$$

図 7.5: 全体の磁化電流

と書けます。即ち、磁性体があることで電流が I [A] のみのときに比べ、磁場 B は強くなることとなります。

磁化電流密度 J_m と磁化ベクトル M の関係を導出しましょう。次の量を考えます。

$$\nabla_0 \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \quad (7.18)$$

$\nabla_0 \times$ は、 r_0 の座標に対する回転であることを意味します。ベクトル解析の公式 $\nabla \times (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \varphi \times \mathbf{A}$ より、 $\varphi = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$, $\mathbf{A} = \mathbf{M}$ として

$$\begin{aligned} \nabla_0 \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \nabla_0 \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0) + \nabla_0 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \\ &= \frac{\nabla_0 \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \end{aligned} \quad (7.19)$$

となります。従って、

$$\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = \frac{\nabla_0 \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \nabla_0 \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \quad (7.20)$$

という公式が導出できます。

導出した公式を、磁化ベクトルが分布しているときのベクトル・ポテンシャルの式 (7.16) に代入すると以下を得ます。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \iiint_{V_0} \frac{\nabla_0 \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dV_0 - \iiint_{V_0} \nabla_0 \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) dV_0 \\ &= \iiint_{V_0} \frac{\nabla_0 \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dV_0 - \iint_{S_0} \frac{d\mathbf{S}_0 \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \end{aligned} \quad (7.21)$$

この式変形で $\iiint_V \nabla \times \mathbf{A} dV = \iint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A}$ という公式を用いました。この公式の導出は本章末に掲載します。

上の式で、 V_0 の表面で $M = 0$ とすれば (そうなるように V_0 を大きくとれば) 第二項目はなくなります。従って、以下が導出できます。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \iiint_{V_0} \frac{\nabla_0 \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dV_0 \quad (7.22)$$

この式は、式 (7.5) と比較すると、 $\nabla_0 \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0)$ という電流密度によるベクトル・ポテンシャルと見ることができます。つまり、これが磁化電流密度 J_m となります。

$$\mathbf{J}_m(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (7.23)$$

7.2.5 磁界 H の定義とアンペールの法則

ある周回路 C に対するアンペールの法則及び、磁化ベクトルと磁化電流密度の関係式:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}_m), \quad \mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (7.24)$$

より、

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_m = \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} \Leftrightarrow \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \nabla \times \mathbf{M} = \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J} \quad (7.25)$$

を得ます。ここで、 $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{r})$ を定義すると、

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J} \quad (7.26)$$

を得ます。今定義した $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ [A/m] を 磁界 と呼びます。磁界を導入することで、磁化電流密度 \mathbf{J}_m を考えずに、磁場を起こす真電流密度 \mathbf{J} のみでアンペールの法則が構成できることになります。そこで、今後は磁界に関する式 (7.26) を「アンペールの法則」としましょう。磁束密度は“真空中”のときのみ (磁性体が存在しないとき) のみの法則としておきます。

磁性体が存在するとき、磁化ベクトルを考えて磁場を扱うのは煩雑なので、磁界 \mathbf{H} を取り入れて \mathbf{M} は式に現れないようにします。またそのためには物質特有のパラメタを導入する必要があります。磁化 \mathbf{M} は磁界 \mathbf{H} と同じ向きなので

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \quad (7.27)$$

と書けます。ここで χ を磁化率と呼びます。代入すると、

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} \quad (7.28)$$

を得ます。 $\mu_0(1 + \chi) = \mu$ とおき、 μ [H/m] をその物質の 透磁率、 μ_0 との比 $\mu_r = \mu/\mu_0 = 1 + \chi$ を 比透磁率 と呼びます。 μ または μ_r を用いて

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (7.29)$$

として、磁性体があるときの磁場を扱います。鉄は $\mu_r = 5000$ (値に幅がある。印加磁場などで値が異なる)、化合物では 10^6 の値も可能 (強磁性体)、空気は 1.0000004 (常磁性体)、水は 0.999991 (反磁性体) です。

7.3 磁場 B, H の法則と境界条件

磁性体が存在するときの磁場の法則は

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (7.30)$$

となりました。または積分形で

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}, \quad \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (7.31)$$

となります。また $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ の関係があります (構成方程式、または構成関係式と呼ばれます)。 I は“真電流”です。

異なる透磁率を持つ 2 つの媒質の境界における磁場の法則 (境界条件) を導出します。図 7.6 に示すように、 $z = z_0$ で透磁率が異なるものとします。

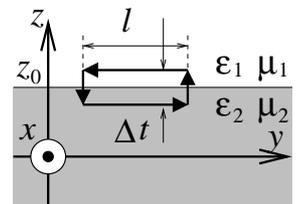


図 7.6: $z = z_0$ における媒質境界

磁界に関する境界条件: まずは、境界面に電流が流れていない場合を考えましょう。図に示した経路 C でアンペールの法則を適用します。

$$-H_y(x, y, z_0 + \frac{\Delta t}{2})l + H_y(x, y, z_0 - \frac{\Delta t}{2})l + H_z(x, y + \frac{l}{2}, z_0)\Delta t - H_z(x, y - \frac{l}{2}, z_0)\Delta t = 0 \quad (7.32)$$

となります。ここで、 $\Delta t \rightarrow 0$ とすると

$$H_y(x, y, z_0 - 0) = H_y(x, y, z_0 + 0) \quad (7.33)$$

となります。 y 成分はここでは一般には境界に対する接線成分なので

$$H_t(x, y, z_0 - 0) = H_t(x, y, z_0 + 0) \quad (7.34)$$

と書けます。即ち、境界面を電流が流れていないとき、磁界の(媒質境界に対する)接線成分は境界面において連続となります。

次に、境界面を面電流が流れている場合を考えます。面電流 J_x [A/m] を考えますと、

$$-H_y(x, y, z_0 + \frac{\Delta t}{2})l + H_y(x, y, z_0 - \frac{\Delta t}{2})l + H_z(x, y + \frac{l}{2}, z_0)\Delta t - H_z(x, y - \frac{l}{2}, z_0)\Delta t = J_x(x, y, z_0)l \quad (7.35)$$

となります。 $\Delta t \rightarrow 0$ としたとき、 H_z の項は 0 になりますが、面電流は無限に薄い面として存在していますので、0 になりません。従って、

$$H_y(x, y, z_0 - 0) = H_y(x, y, z_0 + 0) + J_x(x, y, z_0) \quad (7.36)$$

となり、磁界の接線成分は、面電流の分だけ不連続となります。

磁束密度に関する境界条件: $z = z_0$ を横切って、高さ Δh 、面積 ΔS の柱状の閉曲面でガウスの法則を考えると(図 7.7)

$$B_z(x, y, z_0 + \frac{\Delta h}{2})\Delta S - B_z(x, y, z_0 - \frac{\Delta h}{2})\Delta S + \iint_{\text{側面}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (7.37)$$

$\Delta h \rightarrow 0$ とすると

$$B_z(x, y, z_0 + 0) = B_z(x, y, z_0 - 0) \quad (7.38)$$

となります。 z 成分は一般には境界に対する法線成分なので

$$B_n(x, y, z_0 + 0) = B_n(x, y, z_0 - 0) \quad (7.39)$$

と書けます。即ち、磁束密度の(媒質境界に対する)法線成分は境界面において連続となります。

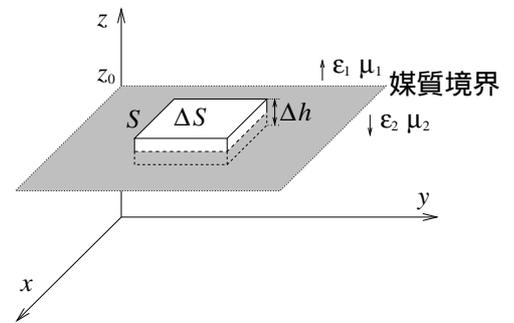


図 7.7: $z = z_0$ における媒質境界

透磁率の異なる媒質境界において、磁界 H は境界に対し接線成分が連続であり、磁束密度 B は法線成分が連続となる。

7.4 磁気回路

モーターや(電磁石とコーン紙を用いた)スピーカーは、磁性体中にできる磁場を利用して運動・振動などを得る機器です。これは、制御信号としての電気信号から磁場をつくり、その磁場を効率よく磁力として働かせる設計が必要です。

この磁性体を含む構造を、電気回路と見なして解析する方法があり、このときの構造を磁気回路と呼びます。効率のよい機器設計には磁気回路解析が重要となってきます。

ここでは、簡単な磁気回路について解説をします。磁気回路は、(1) 磁束の通り路となる磁性体、(2) 磁束を起す源となる磁性体に巻かれたコイル (と、そこに流れた電流)、(3) 急激な (電気回路における電位差に相当する) 磁位差を生じるもととなる磁性体の切れ目である「空隙」、の要素からなります。

7.4.1 磁気回路と電気回路の比較

図 7.9 が磁気回路の一例です。図 7.8 はそれに対応させるように書いた (少し変な) 電気回路です。

電気回路ですが、起電力 V [V] が存在し、これによって回路長 l [m] にわたって電界 E が発生します。起電力と電界の関係は、以下で与えられます。

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = V \quad (7.40)$$

電界 E は回路の導線の長さ方向を向いていて、導線中で同じ大きさを持っているとすれば、 $V = E \cdot l$ となります。この電界と導体中を流れる電流密度 J [A/m²] は、オームの法則 $J = \sigma E$ で関連づけられます。ここで、 σ [S/m] は導電率であり、周囲媒質ではほぼ 0 ですが、導体中では極めて大きな値となります。この導電率が極端に大きな値であるため、電流は周囲媒質を流れずに導体内を流れることとなります。

導体を通る総電流 I [A] は、電流密度から $I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ と求められます (ここで S は導線の断面を意味します)。電流密度 J が断面で一定と仮定すれば、その大きさ J を用いて、 $I = J \cdot S$ と書けます。これらより、

$$V = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = E \cdot l = \frac{J}{\sigma} l = \frac{I}{\sigma S} l = \left(\frac{l}{\sigma S} \right) I = RI \quad (7.41)$$

を得ます。 $R = \frac{l}{\sigma S}$ [Ω] は電気抵抗です。

次に磁気回路についてです。 N 巻きコイルに I [A] の電流が流れると、磁場 (磁束密度 B [T], H [A/m]) が発生します。アンペールの法則より、

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = N \cdot I \quad (7.42)$$

と書けます。磁界 H は磁性体の周回方向を向いていて、磁性体中で同じ大きさを持っているとすれば、 $NI = H \cdot l$ となります。

この磁界と磁性体中の磁束密度 B は構成方程式 $B = \mu H = \mu_r \mu_0 H$ で関連づけられます。ここで、 μ [H/m] は透磁率、 μ_r は比透磁率であり、周囲媒質では $\mu_r = 1$ ですが、磁性体中では数千程度の値を持ちます。

この透磁率が大きい値を持っているため、磁束は磁性体の周囲にはなく、磁性体内に殆どができます。磁性体内の磁束 Φ [Wb] は磁束密度から $\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ と求められます (ここで S は磁性体の断面です)。磁束密度 B が断面で一定と仮定すれば、その大きさ B を用いて、 $\Phi = B \cdot S$ と書けます。これらより、

$$N \cdot I = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = H \cdot l = \frac{B}{\mu} l = \frac{\Phi}{\mu S} l = \left(\frac{l}{\mu S} \right) \Phi = R_m \Phi \quad (7.43)$$

を得ます。 $R_m = \frac{l}{\mu S}$ [A/Wb = H⁻¹] は磁気抵抗と呼ばれます。

ここで、式 (7.41) と (7.43) を比べると、同じ格好をしていることが分かります。

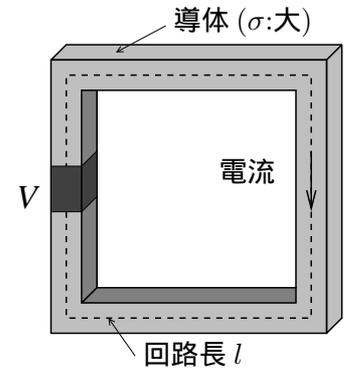


図 7.8: 電気回路

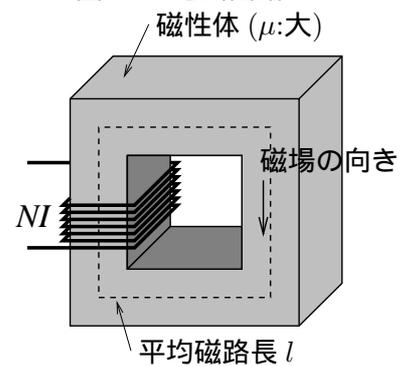


図 7.9: 磁気回路

図7.9のような構成において、 $N \cdot I$ を、起電力に相当するものとして「起磁力」と呼びます。また、磁束 Φ を電流に相当するものとします。これらと磁気抵抗 R_m を用いることで、電気回路と同じ取り扱いをすることができます。これを磁気回路と呼びます。

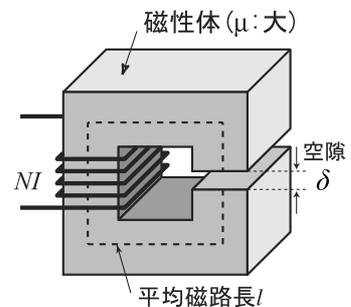
磁気回路で導入している簡略化： 簡単な磁気回路とは、以下を前提としています。

- (1) 磁性体の透磁率が磁界や磁束密度の強さに関わらず一定
- (2) 磁性体の比透磁率 μ_r は周囲に比べて十分大きい。従って、磁性体内で発生した磁束は空气中へと漏れない。
- (3) 磁性体は実際には比較的太い断面積を持っているが、その断面で磁束密度が一様分布している。
- (4) 磁性体中の磁束が通る路の長さは「平均的な長さ」が定義でき、その平均的な長さ(平均磁路長)で解析できる。

実際には、周囲媒質と磁性体の透磁率の差は電気回路の導電率ほどは大きくないので、漏れ磁束は無視できません。また、磁性体の性質として、透磁率は一定でない(B と H の比が変わる)ため、このときは $B-H$ 曲線から値を読み取って計算する必要もあります。

7.4.2 空隙がある場合の磁気回路の解析法

次に、磁性体の一部に隙間(空隙)がある場合の磁気回路について考えます。先の式(7.43)と同様の定式化を行ってゆけばOKです。磁性体中と空隙では磁束 Φ は同じ(つまり磁束密度 B も同じ)ですが、透磁率が異なるので、磁界は異なります。そこで、磁性体中の磁界の大きさを H_m 、空隙の磁界の大きさを H_a とすれば、



$$\begin{aligned}
 N \cdot I &= \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = H_m \cdot l + H_a \cdot \delta = \frac{B}{\mu} l + \frac{B}{\mu_0} \delta = \frac{\Phi}{\mu S} l + \frac{\Phi}{\mu_0 S} \delta \\
 &= \left(\frac{l}{\mu S} + \frac{\delta}{\mu_0 S} \right) \Phi = (R_m + R_a) \Phi
 \end{aligned}
 \tag{7.44}$$

図 7.10: 空隙がある磁気回路

となります。 R_m は磁性体中の磁気抵抗、 R_a は空隙の磁気抵抗です。通常は磁性体の透磁率は空气中より数千倍程度ありますので、 R_a は δ がある程度小さくても大きな値になります。即ち、起磁力 $N \cdot I$ による磁位差は、空隙部分で大きくとられることとなります。

空隙部分では、磁場の向きは磁性体と空気の境界に垂直です。従って、磁束密度は連続ですが、磁界が不連続となります。

電気回路と磁気回路の諸関係式

$$\begin{aligned}
 \text{電気回路} \quad J &= \sigma E \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad V = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad R = \frac{l}{\sigma S} \\
 \text{磁気回路} \quad B &= \mu H \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad N \cdot I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} \quad R_m = \frac{l}{\mu S}
 \end{aligned}$$

例題 1. 図 7.10 における空隙のある磁気回路において、コイルの巻回数は $N = 100$ 、磁性体の断面積 4 cm^2 、磁性体の平均磁路長を 20 cm 、空隙の間隔を 1 mm 、鉄心の比透磁率を 1000 とする。

- 1. $I = 0.1 \text{ A}$ としたとき、空隙にできる磁束密度は何 T となるか。
- 2. 空隙において磁束密度 0.2 T を得たい。コイルに流す電流値はいくらがよいか。

例題 2. 図 7.11 のように二つの磁性体(比透磁率 $\mu_{r1} = 2000$ 、 $\mu_{r2} = 250$)とその間に二箇所の空隙(間隔 $\delta = 1 \text{ mm}$)がある。各磁性体の平均磁路長は $l_1 = 28$ 、 $l_2 = 25 \text{ cm}$ で、断面積はいずれも 4 cm^2 である。起磁力 $N I = 400 \text{ A}$ を与えたとき、磁束密度はいくらとなるか。

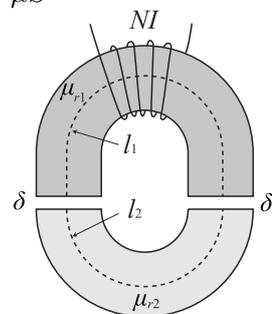


図 7.11: 二つの磁性体からなる磁気回路

本章に関わる公式の導出

$$(1) \iiint_V \nabla \times \mathbf{A} dV = \oiint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A}$$

\mathbf{C} を定ベクトルとする。 $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot \nabla \times \mathbf{A}$ より、

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) dV &= \iiint_V (\mathbf{C} \cdot \nabla \times \mathbf{A}) dV = \mathbf{C} \cdot \iiint_V (\nabla \times \mathbf{A}) dV \\ &= \oiint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S (d\mathbf{S} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \oiint_S (d\mathbf{S} \times \mathbf{A}) \\ \therefore \iiint_V (\nabla \times \mathbf{A}) dV &= \oiint_S (d\mathbf{S} \times \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (7.45)$$

$$(2) \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}$$

デカルト座標系で考える。まず、次を計算する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{x - x_0}{\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{x - x_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \end{aligned} \quad (7.46)$$

従って、

$$\frac{\partial(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1})}{\partial x} = -|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-2} \frac{\partial(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)}{\partial x} = -|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-2} \frac{x - x_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = -\frac{x - x_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (7.47)$$

となり、 y, z に対する微分も同様である。結局、勾配は

$$\begin{aligned} \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} &= \frac{\partial(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1})}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1})}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1})}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \\ &= -\frac{(x - x_0)\hat{\mathbf{x}} + (y - y_0)\hat{\mathbf{y}} + (z - z_0)\hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \end{aligned} \quad (7.48)$$

第8章 電磁誘導現象とインダクタンス

8.1 ファラデーの電磁誘導の法則

1. 電磁誘導現象 磁場が変化すると、電場が発生することがファラデーやヘンリーらによって発見されました。この電場の発生は“磁場が変化している間”のみ起こる現象で、電磁誘導と呼ばれています。

回路(単なるループになった導線とと思って下さい)があり、そこに磁場があると想定して下さい(その磁束密度を $B(r)$ [T] とします)。このとき、回路を通り抜ける磁束というものが定義されます。回路を通り抜ける磁束 Φ [Wb] は、磁束密度を回路がつくる面 S で面積分 $\iint_S B(r, t) \cdot dS$ することで求められます。磁束の単位は [Wb](ウェーバー) です。

この磁束密度 Φ が変化したとき、電磁誘導による電場により、回路中に起電力 V [V] が発生して電流が流れます。電流の流れる方向は、その電流によって発生する磁場が、磁束の変化を妨げる方向になります(つまり、磁束の変化がある方向に増えるのであれば、その方向の磁束を減らす方向、という感じです)

例 1. 二つの閉回路があり、一つの回路(回路 A)には検流計(電流が流れたかどうかを検出する計器)を接続、もう一つの回路(回路 B)は電流を流しません(図 8.1)。スイッチ SW を ON にして回路 B に電流を流し始めると磁場(磁束密度 B)が発生します。その磁場は回路 A に周辺にも存在して、回路 A と交わる(鎖交する)磁束 Φ が増えます。このとき、回路 A 中を電流が流れます(回路中に起電力が発生する)が、電流の流れる方向は、発生した磁場で鎖交した磁束を減らすような方向に流れます。従って、図の②の方向になります。

回路 B 中の電流が一定値のとき、鎖交する磁束は変化しないので、回路 A には電流は流れません。

回路 B のスイッチを切って電流が流れなくなったとき、回路 A と鎖交する磁束が減ることになりますので、回路 A 中に電流が流れます。電流の流れる方向は、その電流によって鎖交した磁束の減少を妨げる(=磁束を増やす)方向になります。従って、図の①の方向となります。

例 2. 閉回路に磁石(N 極側)を近付けたとき、図 8.2 中の回路を鎖交する(上向きの)磁束が増えます。従って回路中を電流が流れ、その流れる方向は、鎖交磁束を減らすよう下向きの磁場を作る方向となります(即ち、②の方向)。一方で、S 極が近付くときは下向きの鎖交磁束が増えるので、それを打ち消す上向きの磁場を増やす方向である、①の方向に電流が流れます。

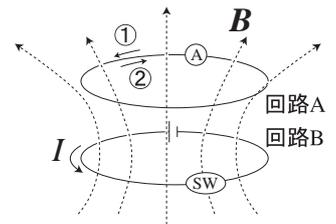


図 8.1: 2 つの閉回路

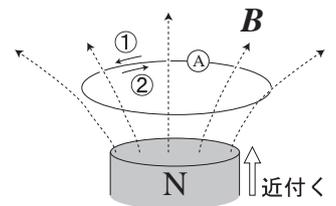


図 8.2: 閉回路に N 極が接近するケース

2. 電磁誘導の法則の定量的な取り扱い コイルを鎖交する磁束 $\Phi(t)$ [Wb] は、磁束密度 $B(r)$ [T = Wb/m²] を面積分することによって得られるので、

$$\Phi(t) = \iint_S B(r, t) \cdot dS \quad (8.1)$$

で与えられます。ここで S はコイルを縁とする任意の開曲面です。コイルに誘導される起電力 V [V] は

$$V(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (8.2)$$

となります (レンツの法則)。

この起電力 V はコイル中に誘導される電界によるものであり、

$$V = \oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} \tag{8.3}$$

と書けます。従って、

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \tag{8.4}$$

を得ます。これをファラデーの電磁誘導の法則と呼ばれます。周回積分の方向と磁束の正方向 (微小面素 dS の向き) は右ねじの関係にとります。

式 (8.4) は任意の領域について成立する法則であり、積分範囲を小さくすることで

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \tag{8.5}$$

を得ます。これが微分形ファラデーの電磁誘導の法則の式です。

例 3. 無限長直線電流とそれに平行に長方形コイルが存在しています。 $I(t) = I_0 \sin \omega t$ の電流を流したとき、コイルに誘導される起電力を求めます。

電流によってできる磁場は

$$\mathbf{B}(x, y, t) = \frac{\mu_0 I(t)(-y\hat{x} + x\hat{y})}{2\pi(x^2 + y^2)} \tag{8.6}$$

となります。ここから、コイルと鎖交する磁束 $\Phi(t) = \iint \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}$ を求めます。

ループの面は、2 パラメタのベクトル関数を用いて、 $\mathbf{r} = y\hat{y} + z\hat{z}, s \leq y \leq s + w, -\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}$ と表されます。

パラメタをそれぞれ微小に増やすことで位置 $\mathbf{r} = y\hat{y} + z\hat{z}$ にできる微小面素ベクトル $d\mathbf{S} = dy dz \hat{x}$ に鎖交する磁束 $d\Phi(t)$ は

$$d\Phi(t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I(t)(-y\hat{x})}{2\pi y^2} \cdot dy dz \hat{x} = -\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi y} dy dz \tag{8.7}$$

従って、

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int d\Phi(t) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_s^{s+w} -\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi y} dy dz = -\frac{\mu_0 I(t)a}{2\pi} \int_s^{s+w} \frac{dy}{y} \\ &= -\frac{\mu_0 I(t)a}{2\pi} \log \frac{s+w}{s} \end{aligned} \tag{8.8}$$

誘導される起電力 V は

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \log \frac{s+w}{s} \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\mu_0 a I_0 \omega}{2\pi} \log \frac{s+w}{s} \cos \omega t \tag{8.9}$$

となります。この起電力は、ファラデーの電磁誘導の法則で示される誘導起電力です。

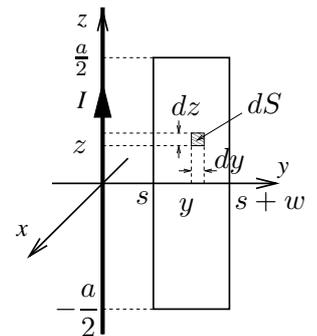


図 8.3: 直線電流とループコイル

例 4. レンツの法則 一様磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0 \hat{z}$ 中に図に示すような「コ」の字形の金属と、その金属上に金属棒を接触させたまま $\mathbf{v}(t) = v_0 \hat{y}$ の一定の速度で移動させます。このとき、金属で出来たループ中に誘導される起電力 V を求めます。棒は $t = 0$ で $y = b$ の位置にあるものとします。

棒の位置は、 $v_y(t) = \frac{dy}{dt} = v_0$ から $y(t) = v_0t + C$ と与えられ、初期条件 $y(0) = C = b$ より $y(t) = v_0t + b$ となります。従って、ループの面積 $S(t)$ は $S(t) = a(v_0t + b)$ 。ループを貫く磁束は $+z$ 方向を正として、 $\Phi(t) = B_0S(t) = B_0a(v_0t + b)$ となります。従って、起電力は

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0av_0 \quad (8.10)$$

となります。この起電力は移動している棒中の自由電子がローレンツ力を受けることによって起こるもので、ファラデーの電磁誘導の法則とは異なります(でも、なぜかレンツの法則でひとまとめにできます)。

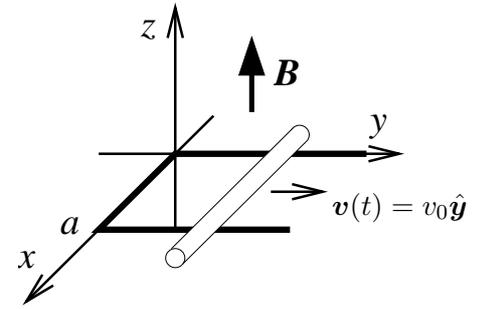


図 8.4: 移動する金属棒

8.2 インダクタンス

8.2.1 自己誘導と相互誘導

前節で述べたように、電流によって生じた磁束によって電磁誘導が起こります。導体中の電流による磁束は、他の導体だけでなく、磁束を生じさせた導体自身とも鎖交します。これによって、導体中に流した電流を妨げる起電力が生じます。これを自己誘導と呼びます。また、他の導体中に起電力を生じさせることを相互誘導と呼びます。

8.2.2 誘導係数 … インダクタンス

電磁誘導は鎖交磁束の時間変化によって起こります。また、電流とそれによってできる磁場は比例関係にあるので、自己・相互誘導を調べるには、磁場を起こす電流 I [A] と誘導の起こる回路との鎖交磁束 Φ [Wb] との比例係数があれば分かることとなります。この比例係数をインダクタンスと呼び、磁束をつくる回路中の電流とのインダクタンスと自己インダクタンス、他の回路とのインダクタンスを相互インダクタンスと呼びます。インダクタンスの単位は [H](Henry) です。

自己インダクタンスは

$$\Phi = LI \quad (8.11)$$

と書けます。ここで、 L [H] は自己インダクタンス、 I [A] は回路に流れる電流、 Φ [Wb] は流れた電流による、その回路との鎖交磁束です。

相互インダクタンスについても同様に

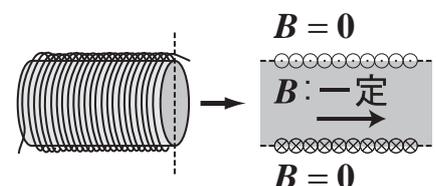
$$\Phi_2 = M_{21}I_1 \quad (8.12)$$

となります。ここで、 M_{21} [H] は相互インダクタンス、 I_1 [A] は回路 1 に流れる電流、 Φ_2 [Wb] は流れた電流による、他の回路 2 との鎖交磁束です。

L , M は回路の形状のみによって決まります。また、2 つの回路間の相互インダクタンスは相反であり、 $M_{12} = M_{21}$ という関係があります。

8.2.3 インダクタンスの算出例

例 1. 中空の無限ソレノイド(半径 a [m]、単位長さ当たり N 巻き)について考えましょう。このソレノイドに電流 I [A] が流れたとき、内部の磁場は $B = \mu_0NI$ [T] になります。長さ l [m] のインダクタンスを考えると Nl 回の鎖交が起こるので、



$$\Phi = (Nl)(\pi a^2)(\mu_0 NI) = \mu_0 N^2 \pi a^2 l I, \quad \therefore L = \mu_0 N^2 \pi a^2 l \quad (8.13)$$

となります。

例2. 2つの円形コイル(近似) 2つの円形コイルが中心を同じ軸上に平行に存在しているものとします。コイル2は小さく、コイル1の作る磁場はコイル2内で均一とします。

コイル1の作る磁場は $r = l\hat{y}$ において、

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I_1 a^2}{2(a^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{y} \quad (8.14)$$

となるので、コイル中の磁束密度はこれで一定と近似することで、

$$\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I_1 a^2 \pi b^2}{2(a^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} = M_{21} I_1, \quad \therefore M_{21} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2(a^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} = M_{12} \quad (8.15)$$

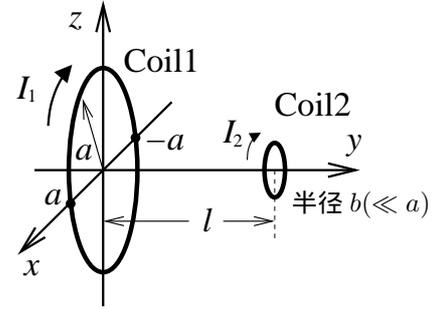


図 8.5: 2つの円形コイル

8.3 磁場のエネルギー

8.3.1 コイルに蓄えられるエネルギー

ある時刻 t [s] において、自己インダクタンス L [H] のコイルに電流 I [A] が流れているものとします。 Δt [s] 間に ΔI [A] だけ電流を増やしたとき、このコイルには逆起電力 $V = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$ が生じます。この起電力に逆らって $\Delta Q = I \Delta t$ [C] の電荷を運んだので、

$$\Delta W = L \frac{\Delta I}{\Delta t} I \Delta t = LI \Delta I \quad (8.16)$$

だけの仕事をしたこととなります。電流の変化を無限小とすることで ($\Delta I \rightarrow dI$)、 $I = 0$ A から I_0 [A] まで増やしたときの仕事は次式で与えられます。

$$W = \int dW = \int_0^{I_0} LI dI = \frac{1}{2} LI_0^2 \quad (8.17)$$

ここでなした仕事はコイル周辺の磁場として蓄えられていることとなります。実際に、電流を流すのを止めると、同様に逆起電力によって電流が流れます。即ち、磁場がエネルギーを持っており、自己インダクタンス L のコイルに I_0 を流したときのエネルギーは $\frac{1}{2} LI_0^2$ [J] です。

8.3.2 エネルギーの磁場による表現

無限長ソレノイドを用いて、磁場に蓄えられているエネルギーを、磁場を用いて表現します。無限長ソレノイド(半径 a [m]、単位長さ当たり N 巻き)の自己インダクタンスは、長さ l [m] で

$$L = \mu_0 N^2 \pi a^2 l \quad (8.18)$$

でした。また、ソレノイド中の磁束密度は

$$B = \mu_0 NI \quad (8.19)$$

ですので、ここから、

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 N^2 \pi a^2 l I^2 = \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0 NI)^2 \pi a^2 l \quad (8.20)$$

となることが分かります。 $\pi a^2 l$ は今考えているソレノイドの体積 V に相当しますので、

$$W = \frac{1}{2\mu_0} B^2 V = \frac{1}{2\mu_0} \iiint B^2 dV \quad (8.21)$$

と書けます。 $B = \mu_0 H$ より

$$W = \frac{1}{2} \iiint BH dV \quad (8.22)$$

となります。

実際にはベクトル場 $B(\mathbf{r}), H(\mathbf{r})$ に対し、

$$w(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) \text{ [J/m}^3\text{]} \quad (8.23)$$

で表されるエネルギー体積密度が定義でき、これを体積積分することで全エネルギーとなります。

例 1. 円柱導体の内部インダクタンス 導体の空間的広がりを考えるとき、導体に流れる電流とその電流が作る磁場自体が鎖交することになります。これによるインダクタンスを内部インダクタンスと呼びます。半径 a [m] の円柱導体の長さ l [m] における内部インダクタンス L_i を求めます。これは、円柱導体内に蓄えられているエネルギーから求めることができます。円柱導体には電流 I [A] が一様に分布して流れているものとし、導体の比透磁率は 1 とします。円柱の中心軸から ρ [m] における磁場の強さはアンペールの法則より

$$2\pi\rho H = \frac{\pi\rho^2}{\pi a^2} I, \quad H = \frac{I\rho}{2\pi a^2} \quad (8.24)$$

従って、エネルギー W [J] は

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V HB dV = \frac{1}{2} \int_{z=0}^l \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a \mu_0 \left(\frac{I\rho}{2\pi a^2} \right)^2 \rho d\rho d\phi dz = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi a^4} \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi} = \frac{1}{2} L_i I^2 \quad (8.25)$$

となるので、内部インダクタンスは

$$L_i = \frac{\mu_0 l}{8\pi} \quad (8.26)$$

となります。

例 2. 同軸線路のインダクタンス 半径 a, b [m] の導体を持つ同軸線路のインダクタンスを考えます。電流は内導体の表面を I [A] 流れており、外導体には逆向きに同量の電流が流れます。このとき、 $a \leq \rho \leq b$ における磁場の強さは

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}, \quad H = \frac{I}{2\pi\rho} \quad (8.27)$$

となります。従って、長さ l [m] における内外導体間にできる磁場のエネルギーは

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V BH dV = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{\mu_0 I^2}{(2\pi\rho)^2} \rho d\rho d\phi dz = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \log \frac{b}{a} = \frac{1}{2} LI^2 \quad (8.28)$$

となりますので、自己インダクタンス L [H] は

$$L = l \frac{\mu_0}{2\pi} \log \frac{b}{a} \quad (8.29)$$

となります。

内導体の導体内部まで電流が流れる場合は、中心導体の内部インダクタンスが加わります。

もう一つのエネルギーの表現: 微小な断面積 dS 中の磁束 $d\Phi$ を考え、その磁束が通る閉じた管中のエネルギー dW [J] を考えます。 $W = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV$ ですが、 dV を管の長さ方向と断面積に分けて考えれば、

$$dW = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dS dr = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{H} \cdot (d\Phi dr) = \frac{1}{2} d\Phi \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} d\Phi I_C \quad (8.30)$$

ここで I_C は C (管の一周) の中を貫く電流です。全エネルギーはこの磁束を積分することで得られます。

例7. 円柱導体の内部インダクタンス (2) 式 (8.30) の表現を用いてエネルギー、内部インダクタンスを求めます。

半径 ρ [m] における、 $dS = d\rho \times dz$ のリング中に磁束 $d\Phi$ が存在し、

$$d\Phi = B d\Phi = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} d\rho dz \quad (8.31)$$

これと鎖交する電流は $I_C = \frac{\rho^2}{a^2} I$ より、

$$dW = \frac{1}{2} d\Phi I_C = \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{a^2} I \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} d\rho dz = \frac{\mu_0 I^2 \rho^3}{4\pi a^4} d\rho dz \quad (8.32)$$

長さ l について考えると、

$$W = \int_0^l dz \int_0^a \frac{\mu_0 I^2 \rho^3}{4\pi a^4} d\rho = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi} = \frac{1}{2} L_i I^2 \quad (8.33)$$

となり、内部インダクタンス $L_i = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$ も得られます。

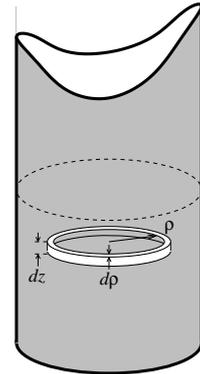


図 8.6: 円柱導体

第9章 マクスウェルの方程式と電磁波

電磁場の原因となる電荷や電流 (合わせて「波源」と言います) があつたとき、マクスウェルの方程式と呼ばれる式を解くことで電磁場 (E, B, D, H) を決定することが可能です (方程式はたいへん難しいもので、実際に電磁場を数式で決定するのはほとんどの場合は不可能で、コンピュータを用いて解く必要があるのですが)。

これまで本授業の目的の一つは、このマクスウェルの方程式を出すためのものです。今回は、そのマクスウェルの方程式を説明します。

マクスウェルの方程式は、マクスウェル (英; James Clerk Maxwell; 1831-1879) がまとめたもので、これまでの電磁気学の研究を元に、自分で少し修正を加え (しかし、その修正は大きな影響を多方面に及ぼしました)、「これだけあれば電磁場を決定することができる」ということでまとめました。

また、これをまとめる過程で、電磁波の存在とその伝搬速度を理論的に示しました (実験的に示されたのはしばらくの後で、ヘルツらの実験によってです)。

9.1 マクスウェルの方程式

+

9.1.1 今までの法則のまとめ

今まで出てきた法則 (数式の部分) をまとめておきます。

ファラデーの電磁誘導の法則: 静電界では、渦なしの法則 $\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$ 、または $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ という法則でしたが、磁場が時間的に変動するときにはこの法則は「ファラデーの電磁誘導の法則」に修正されて、以下となります。

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (9.1)$$

ガウスの法則: 静電界におけるガウスの法則は、時間変動する場についても成立して、以下のように書けます。

$$\oiint_S \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (9.2)$$

アンペールの法則: アンペールの法則は

$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = I = \iint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (9.3)$$

で与えられ、ここで、 S は閉曲路 C を縁とする開曲面です。これは静磁場のみに成立する法則です。時間的に磁場が変動する場合には、少し修正が必要となりますが、後で説明します。

磁場のガウスの法則: 磁場 (磁束密度) $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ のガウスの法則は、時間変動する場でも成立していて、以下となります。

$$\oiint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (9.4)$$

構成方程式 (構成関係式): 物質 (誘電体、磁性体) があるとき、以下の関係が成立しますが、これは構成方程式と呼ばれます。

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \tag{9.5}$$

それ以外の式にローレンツ力などがありますが、ここでは省略します。

9.1.2 電荷保存則と連続の式

ある空間内において、空間外部との間に電荷の移動がなければ、空間内部の電荷の総和は変化しません。これを電荷保存則と言います。

従って、ある空間 V 内の電荷 $Q(t) = \iiint_V \rho(\mathbf{r}, t)dV$ が変化した (即ち、 $\frac{dQ}{dt} \neq 0$) ということは、電荷が空間の表面を通過して移動した、即ち電流として流れたことを意味します。 Δt [s] 間に変化した電荷を ΔQ [C] とすると、

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \oiint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot (-d\mathbf{S})\Delta t \\ \therefore \frac{\Delta Q}{\Delta t} &= -\oiint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \tag{9.6}$$

となります。ここで、 $d\mathbf{S}$ は面素ベクトルですが、閉曲面の外向きとしています。 ΔQ は V 内の電荷の増分なので流入した電流を計算するには 内向きの面素ベクトルとして $-d\mathbf{S}$ を使っています。 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\frac{dQ}{dt} = -\oiint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho(\mathbf{r}, t)dV = \iiint_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV \tag{9.7}$$

従って、

$$\iiint_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV = -\oiint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \tag{9.8}$$

が成立します。これを連続の式と呼びます。微分形は、両辺を面積で割って $V \rightarrow 0$ の極限をとることで以下を得ます。

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \tag{9.9}$$

9.1.3 マクスウェルによるアンペールの法則の修正

マクスウェルは時間的に変動する電磁場においてアンペールの法則に修正が必要であることを示し、“電束の時間変化” = 変位電流を導入して矛盾を解決しました。

アンペールの法則:

$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = I = \iint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \tag{9.10}$$

において、 C は任意の周回積分路であり、 S はその C を縁とする任意の開曲面です。そこで、周回積分路 C を小さくして、開曲面を閉曲面に近づけると、 C の長さは限りなく 0 に近くなり、

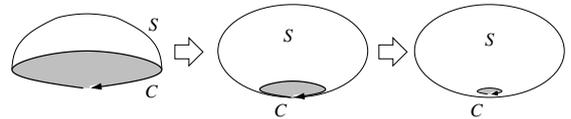


図 9.1: 周回積分路の変更とそのときの開曲面

$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \rightarrow 0 \quad (9.11)$$

となります (図 9.1)。従って、

$$\iint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \rightarrow \iint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0 \quad (9.12)$$

となる必要がありますが、これは連続の式 (9.8) とは矛盾することになります。上式は、閉曲面 S に流入した電流は必ず流出し、差し引き 0 となることを意味し、内部の電荷量の変化がないこととなります。

また、コンデンサを考えたとき、コンデンサを充電している間はアンペールの法則は開曲面 S の選び方によっては成立しなくなるという点も矛盾です (図 9.2)。

微分形で述べれば以下ようになります。アンペールの法則は $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ となりますが、両辺の発散をとりますと

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (9.13)$$

となり、 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ が得られますが、これは連続の式 (9.9) と矛盾します。

この矛盾を解決したのがマクスウェルであり、以下のような修正を行いました。ガウスの法則:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (9.14)$$

を時間微分すると、

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{D})}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (9.15)$$

を得ます。これと連続の式より

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} \\ \therefore \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (9.16)$$

となり、「電流密度 \mathbf{J} と $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ の合計の発散は常に 0」となります。これより、時間変動するときのアンペールの法則は

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (9.17)$$

とすれば、先のように発散をとっても連続の式と矛盾が起きないこととなります。マクスウェルが修正した上式を、アンペール=マクスウェルの法則と呼びます。また、 $\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ [A/m²] を変位電流密度と呼びます。

9.1.4 マクスウェルの方程式

以上によって得られた、時間変動を考慮した式をマクスウェルの方程式と呼びます。これは、(境界条件があれば) 電磁界を決定する方程式系です。微分形のみ示します。

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (9.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (9.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (9.20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (9.21)$$

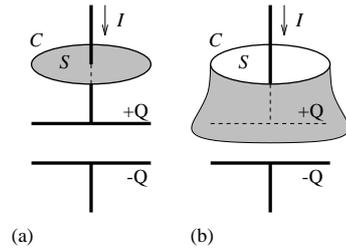


図 9.2: 同じ閉曲路に対して、導線中の電流が存在する開曲面 (a) と存在しない開曲面 (b)

9.2 電磁波

マクスウェルによって変位電流が導入され、波源 (電流と電荷) が与えられたときに電磁界を決定する方程式系=マクスウェルの方程式が完成しました。マクスウェルの方程式の微分形は以下で与えられます。

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (9.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (9.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (9.24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (9.25)$$

波源 (\mathbf{J}, ρ) が与えられたとき、このマクスウェルの方程式と適当な条件 (周囲形状を与える境界条件と、初期条件) があれば電磁界を決定できます。

また、このマクスウェルの方程式から、電磁波の存在とその諸性質が導き出されます。実際にマクスウェルは、方程式を調べることで、それまで知られていなかった電磁波の存在を予言し、その速度が光の速度と等しいことを予言しました (当時は、光と電磁気現象は別のもので思われていた)。ここでは簡単な電磁波を考え、その性質について概観します。

9.2.1 1次元波動方程式と電磁波

マクスウェルの方程式より、電磁波の式が導出できます。ここでは簡単のため、電磁場は x, y 方向に変化せず (即ち、 $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow 0, \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow 0$)、真空中で、電界は x 成分 (E_x) のみ0でないものと仮定します (1次元化)。このときマクスウェルの方程式は

$$\frac{\partial E_x(z, t)}{\partial z} = -\frac{\partial B_y(z, t)}{\partial t}, \quad -\frac{\partial H_y(z, t)}{\partial z} = \frac{\partial D_x(z, t)}{\partial t} \quad (9.26)$$

となります。 $B_y = \mu_0 H_y, D_x = \epsilon_0 E_x$ より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= -\frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial z} = -\mu_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z} = \mu_0 \frac{\partial^2 D_x}{\partial t^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \therefore \frac{\partial^2 E_x(z, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_x(z, t)}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (9.27)$$

を得ます。これは波動方程式と呼ばれ、この解は例えば

$$E_x(z, t) = f(z - c_0 t), \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (9.28)$$

となります (ダランベール解)。ここで $f(u)$ は任意の関数であり、 $\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12}$ F/m, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m より

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 2.998 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (9.29)$$

となります。

式 (9.28) の関数に挙動について調べます。今、関数 $f(u)$ が $u = a$ で頂点を持つ関数であるとします (図 9.3)。 $u = z - c_0 t$ として、 t が増えたときに (時刻が経過したときに) どのような関数が空間 (z) に描かれるかを考えます。

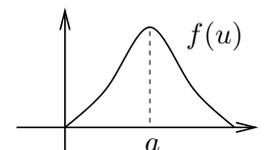


図 9.3: 任意の関数 $f(u)$

$t = 0$ において、 $u = z$ となり、 $f(z)$ は $z = a$ に頂点を持つ形となります。微小時間 Δt [s] 経ったとき、 $u = z - c_0 \Delta t$ であり、このときの $f(z - c_0 \Delta t)$ の頂点は $z - c_0 \Delta t = a$ より、 $z = a + c_0 \Delta t$ にある。つまり、関数 $f(z - c_0 t)$ は、 Δt 秒間において $c_0 \Delta t$ だけ右に移動したことになります(即ち、速さは c_0)。 c_0 はおよそ 3.0×10^8 m/s であり、光の進む速さに等しい(光も電磁波であるため、これは当然の結果なのですが)。

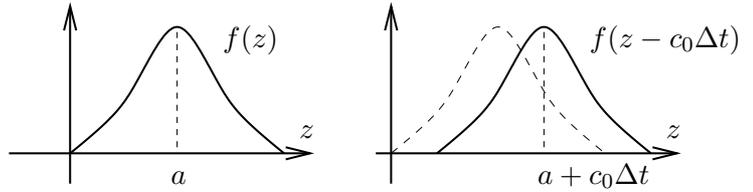


図 9.4: 電磁波の伝搬 (左: $t = 0$, 右: $t = \Delta t$)

電磁気的な影響は、今述べたように速度 c_0 で伝わってゆきます。従って、例えば電流を少し流して、ある二箇所に電荷をためたとき、クーロンの法則にあるように、力が即働くわけではなく、時間的な遅れをもって働くこととなります。これは、電磁気学がクーロンの法則のような遠隔にある地点に働く力という形では記述できず、その力を伝える役割である電界や磁界という考え方が必要であることを示しています。

また、波動方程式はマクスウェルの方程式の微分形で記述されるため、微分形のマクスウェルの方程式が重要な基本式となります。

9.2.2 平面波

今検討している電磁波は、磁界についても同様の波動方程式が導出され、

$$\therefore \frac{\partial^2 H_y(z, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 H_y(z, t)}{\partial z^2} = 0 \quad (9.30)$$

となります。従って、この解についても

$$H_y(z, t) = g(z - c_0 t) \quad (9.31)$$

と書くことができます。

つまり、電界 E_x も磁界 H_y も x, y には依存せず、 z が一定であれば全て同じ値となっています。これを同一の値の面(同位相、同振幅の面)が平面となっていることから、平面波と呼びます。平面波は電磁波の特殊な形状の一つと言えます。

真空中でない媒質中も電磁波が伝搬します。その際は誘電率を ϵ 、透磁率を μ とすると電磁波の伝搬速度 c は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (9.32)$$

となります。一般的には $\mu > \mu_0, \epsilon > \epsilon_0$ より、媒質中では電磁波の伝搬速度は遅くなります(比誘電率 $\epsilon_r (> 1)$ 、比透磁率 $\mu_r (> 1)$ を用いて $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$ 倍になる)。また、一定の周波数で振動する電磁波の場合は $c = f \lambda$ で波長 λ が定義されますが、媒質中では c が小さくなるので、同じ周波数 f では波長 λ が小さくなります(波長短縮)。その波長短縮の割合は比誘電率 ϵ_r と比透磁率 μ_r の積の平方根に比例します。

式(9.31)と先の電界の式(9.28)を今検討しているマクスウェルの方程式(9.26)に代入すると

$$f'(z - c_0 t) = c_0 \mu_0 g'(z - c_0 t) \quad (9.33)$$

を得ます。両者を積分すると(積分定数は時間の関数でなく、静電磁界に相当するので今の議論とは関係ありません)、

$$E_x(z, t) = c_0 \mu_0 H_y(z, t) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_y(z, t) \quad (9.34)$$

を得ます。即ち、平面波の電磁界の振幅の比は常に一定で

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (9.35)$$

となります。この Z_0 は波動インピーダンスと呼ばれ、値はおよそ $Z_0 \approx 120\pi \approx 377$ であり、その単位は $[\Omega]$ です。真空でない媒質中では、波動インピーダンスは $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ で与えられます。

9.2.3 電磁界のベクトルと伝搬方向

平面波の式 (9.28), (9.34) は $+z$ 方向に伝搬する場合でしたが、任意の方向 (単位ベクトル \hat{d} 方向) に伝搬する場合を考えると、位置 r における \hat{d} 方向の距離は $\hat{d} \cdot r$ となりますので、

$$\mathbf{E} = E_0 f(\hat{d} \cdot \mathbf{r} - c_0 t), \quad \mathbf{H} = H_0 f(\hat{d} \cdot \mathbf{r} - c_0 t) \quad (9.36)$$

という式を得ます。 E_0, H_0 は電界と磁界の平面波のベクトルの向きを表す定ベクトルです。ここでは、電磁波の伝搬方向 \hat{d} と、電磁界の方向 E_0, H_0 がどのような関係にあるかを調べます。

今考えている領域は真空中であり、電荷は存在していないこととなります ($\rho = 0$)。従って、マクスウェルの方程式より

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (9.37)$$

が成立しています。ここに式 (9.36) を代入すると

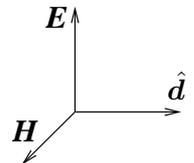
$$\hat{d} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad \hat{d} \cdot \mathbf{H}_0 = 0 \quad (9.38)$$

が導出できます。即ち、電界、磁界のベクトルの方向と電磁波の伝搬方向は直交していることが分かります。

また、同様にマクスウェルの方程式 $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ に代入すると $\hat{d} \times \mathbf{E}_0 = Z_0 \mathbf{H}_0$ を得ます。両辺について \mathbf{E}_0 との外積 $\mathbf{E}_0 \times$ をとると

$$\mathbf{E}_0 \times \hat{d} \times \mathbf{E}_0 = \hat{d} E_0^2 = Z_0 \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0, \quad \therefore \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 = \frac{E_0^2}{Z_0} \hat{d} \quad (9.39)$$

となります。つまり、電界ベクトル \mathbf{E}_0 から磁界ベクトル \mathbf{H}_0 に右ねじを回したとき、ねじの進む方向が伝搬方向ということが言えます (右図)。



9.2.4 ポインティング・ベクトル

電磁波が伝搬しているということは、電磁界の持つ電力 (単位時間当たりのエネルギー) を伝送していることとなります。

電磁波の電力はポインティング・ベクトル (Poynting's vector) で表すことができます。ポインティング・ベクトル S [W/m^2] は

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (9.40)$$

で与えられます。平面波の場合、電界と磁界は直交しており、かつその大きさの比は波動インピーダンス Z_0 で与えられているので、電界の大きさ $E(\mathbf{r}, t)$ を用いて、ポインティング・ベクトルの大きさは

$$S(\mathbf{r}, t) = \frac{E^2(\mathbf{r}, t)}{Z_0} \quad (9.41)$$

と表せます。ポインティング・ベクトルの向きは平面波の進行方向です。

(導出) $\nabla \cdot \{\mathbf{E} \times \mathbf{H}\}$ という量について考えてみます。ベクトル解析の公式より次のように変形できます。

$$\nabla \cdot \{\mathbf{E} \times \mathbf{H}\} = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (9.42)$$

この両辺を表面 S を持つ領域 V で体積積分すると、Gauss の定理を用いて

$$-\iiint_V \nabla \cdot \{\mathbf{E} \times \mathbf{H}\} dV = -\oiint_S \{\mathbf{E} \times \mathbf{H}\} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \left\{ \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\} dV + \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV \quad (9.43)$$

を得ます。 $d\mathbf{S}$ は領域 V の外側を向いた面素ベクトルです。

右辺第一項について考えましょう。 $D = \epsilon E, B = \mu H$ とおいて、 $\frac{\partial(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})}{\partial t} = 2\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ より、

$$\iiint_V \left\{ \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\} dV = \frac{d}{dt} \iiint_V \left\{ \frac{\mu}{2} |\mathbf{H}|^2 + \frac{\epsilon}{2} |\mathbf{E}|^2 \right\} dV \quad (9.44)$$

$w_m = \frac{\mu}{2} |\mathbf{H}|^2$ [J/m³] は磁場のエネルギー密度、 $w_e = \frac{\epsilon}{2} |\mathbf{E}|^2$ [J/m³] は電場のエネルギー密度ですので、これは「 V 内の電磁場のエネルギーの変化率 (単位時間当たりの変化量)」を表します。

次に右辺第二項を考えますが、簡単のため電磁場の量が変化しない程度の微小体積 ΔV について考えましょう。 ΔV を \mathbf{E} に垂直な面積 ΔS と平行な長さ Δl に分けると、 \mathbf{E} と \mathbf{J} は平行ですので次式となります。

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \Delta V = E \Delta l \cdot J \Delta S = VI \quad (9.45)$$

ここで、 V [V] は Δl での電位差、 I [A] は ΔS を通過する電流です。従って、これは ΔV 中でジュール熱で失われる電力を表します。この体積積分はこれを領域 V 内にわたってジュール熱の電力を加え合わせることを意味しますので、領域 V 内での全損失の電力を意味しています。

さて、消費電力がない場合を考えましょう。

$$\oiint_S \{\mathbf{E} \times \mathbf{H}\} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \iiint_V (w_e + w_m) dV = 0 \quad (9.46)$$

もし第二項の V 内のエネルギーが増加しているとき、第一項目は負となり、 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は S を通してトータルで「流入」していることとなります。

逆に、第二項の V 内のエネルギーが減少しているとき、第一項目は正となり、 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は S を通してトータルで「流出」していることとなります。

つまり、 $\oiint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$ は S を通して流入、流出する電磁波の「電力」を表していることとなります。また、 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ [W/m²] は単位面積当たりの電力となり、これを Poynting ベクトルと呼びます。

この式は「電磁場のエネルギー保存則」を表しており、Maxwell の方程式を満たす \mathbf{E}, \mathbf{H} は常にエネルギーが保存されることを保証しているものです。