電磁気学第一 第 1 回
クーロンの法則、静電場

1 数学の準備 (I)

1.1 ベクトル

大きさと方向を持つ量をベクトルと呼びます。この授業ではベクトルは、太いボールド体で表現します ($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$ など)。ノートに書くときは $\mathbb{C}$, $\mathbb{E}$ のように、1 本加えて書いて下さい。

任意ベクトル $\boldsymbol{A}$ は、成分毎に表記すると、一意に表現できます。デカルト座標系では次のようになります。

$$\boldsymbol{A} = A_x \hat{\boldsymbol{x}} + A_y \hat{\boldsymbol{y}} + A_z \hat{\boldsymbol{z}} \tag{1}$$

$\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$ は、それぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルです (他の本では $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ などを使っています。この講義では、座標パラメタ (x, y, z) に対して、ベクトルを示すためにボールド体とし、さらに単位ベクトルを示す ^ を付けて表す形式で統一します)。

成分を用いて、ベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさ $|\boldsymbol{A}|$ は $\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ と表せます。

単位ベクトルは、大きさが 1 のベクトルです。この授業では、単位ベクトルについては、^(ハット) を付けて $\hat{\boldsymbol{A}}, \hat{\boldsymbol{n}}$ などと表します。

任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ をそれ自身の大きさで割れば、その結果は大きさが 1 の、$\boldsymbol{A}$ の方向を向いた単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{A}}$ が得られます。

任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ は、その大きさ $|\boldsymbol{A}|$ と方向を表す単位ベクトル $\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} \equiv \hat{\boldsymbol{A}}$ の積で、一意に表せます。

$$\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}| \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = |\boldsymbol{A}| \hat{\boldsymbol{A}} \tag{2}$$

1.2 ベクトルの内積

直交座標系における 3 つの基本単位ベクトル (例えば $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$) に対して、自分自身との内積の結果は 1、異なるベクトル同士の内積は 0 となります。即ち、$\hat{\boldsymbol{x}} \bullet \hat{\boldsymbol{x}} = 1, \hat{\boldsymbol{x}} \bullet \hat{\boldsymbol{y}} = 0, \hat{\boldsymbol{x}} \bullet \hat{\boldsymbol{z}} = 0$ です。これを用いると、ベクトル $\boldsymbol{A} = A_x \hat{\boldsymbol{x}} + A_y \hat{\boldsymbol{y}} + A_z \hat{\boldsymbol{z}}$ と $\boldsymbol{B} = B_x \hat{\boldsymbol{x}} + B_y \hat{\boldsymbol{y}} + B_z \hat{\boldsymbol{z}}$ の内積は分配則を用いて計算できます。

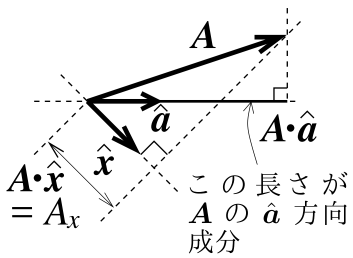

図 1 単位ベクトルとの内積

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} &= (A_x \hat{\boldsymbol{x}} + A_y \hat{\boldsymbol{y}} + A_z \hat{\boldsymbol{z}}) \bullet (B_x \hat{\boldsymbol{x}} + B_y \hat{\boldsymbol{y}} + B_z \hat{\boldsymbol{z}}) \\ &= A_x B_x \hat{\boldsymbol{x}} \bullet \hat{\boldsymbol{x}} + A_x B_y \hat{\boldsymbol{x}} \bullet \hat{\boldsymbol{y}} + A_x B_z \hat{\boldsymbol{x}} \bullet \hat{\boldsymbol{z}} + A_y B_x \hat{\boldsymbol{y}} \bullet \hat{\boldsymbol{x}} + \cdots \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \tag{3}$$

ベクトル $\boldsymbol{A}$ と x 方向の単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{x}}$ との内積は $\boldsymbol{A} \bullet \hat{\boldsymbol{x}} = A_x$ となり、ベクトル $\boldsymbol{A}$ の x 成分となります。同様に任意方向の単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{a}}$ との内積 $\boldsymbol{A} \bullet \hat{\boldsymbol{a}}$ の結果は、ベクトル $\boldsymbol{A}$ の $\hat{\boldsymbol{a}}$ 方向成分となります (図 1 参照)。

1.3 スカラーとベクトル

この授業で扱う物理量としては、**スカラー**と**ベクトル**があります。例えば、電流や仕事はスカラー、速度や力はベクトル量です。ベクトルの内積はスカラーです。

この二つを混同しないように気をつけて下さい。「ベクトル = スカラー」という式や、「スカラー量とベクトル量の和」という演算は存在しません。「ベクトルで割る」こともできません。

1.4 ベクトル関数 (特に、位置ベクトル関数)

一つ以上のパラメタによって変化するベクトルをベクトル関数と呼びます。パラメタを s としたとき、$\boldsymbol{a}(s)$ などと書きます。各成分毎に表せば、$\boldsymbol{a}(s) = a_x(s)\hat{\boldsymbol{x}} + a_y(s)\hat{\boldsymbol{y}} + a_z(s)\hat{\boldsymbol{z}}$ と書けます。

ベクトル関数のうち、位置ベクトルの関数はたいへん有用です。パラメタが一つの位置ベクトル関数の場合、その変数を変化させることでベクトル関数の先端は線を描きます。2 パラメタの場合は、2 変数を独立に動かすと面を描きます。さらに 3 パラメタの場合は体積を描くことになります。

位置ベクトル関数を用いると、時刻 t における荷電粒子の運動 $\boldsymbol{r}(t)$ などを表現することができます。

3 次元空間の位置 x, y, z を 3 つのパラメタとするベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ を定義できます (これは位置ベクトル関数でなく、普通のベクトル関数です)。空間の各点にベクトルを割り当てることができ、これをベクトル場と呼びます。

■「場 (field)」について 物理量には、「**単なる量**」と「**場**」というものがあります。前者の「単なる量」は、電流とか体重とか、通常あつかっているもので、簡単にイメージできるかと思います。

それに対して、すこし理解しずらいのが「場」です。この電磁気学の授業を通して、場を常に意識して勉強をして下さい。

「場」とは、空間の各点に存在する物理量であり、例えば、「温度」はスカラーの場です。温度計を各点におけばその点の温度が測れる、他の点では違った値となる、というものです。また、「電界」はベクトルの場です。各点に電界が存在し、各点で異なる「向き」と「大きさ」を持ったベクトルである電界が測れます。「場」は「空間の位置を変数とする関数」で表現できます。

「場」が皆さんにとって理解しずらい理由は、教科書に表現することが難しいからです。特に 3 次元の場は、どんな手法を使っても表現することは極めて困難です。

表現する手法としては、スカラー場であれば、カラーマップ、等値線 (面) での表現があります。また、ベクトル場であれば、グリッド点上での矢印による表現や、流線による表現があります。しかし、せいぜい 2 次元しか表現できません。皆さんに頭の中で想像してもらうしかありません。

2 静電場

電気現象の根源は電荷 (電気量) です。電荷には正負が存在します。正負のつけ方は、下の二種の物質を摩擦をして帯電させたとき、

毛皮, ガラス, 雲母, 絹, 綿布, 木材, 琥珀, 樹脂, 金属, 硫黄, セルロイド , $\cdots$

の左の方の物質に帯電した電荷を正、右の方を負としています。

電荷が存在すると周囲には**電場**と呼ばれる電気的な作用を及ぼす状態が空間におこります。この状態が時間的に変化しない状態を**静電場**と呼びます。また、電場中の電荷は力を受けることが知られています。

電場を表す物理量として「**電界**」があり、その単位は V/m です[*1]。

電荷の基本単位として C (クーロン) を用います。陽子一つは正電荷 (positive charge)、電子一つは負電荷 (negative charge) で、電荷量は 1.602×10^{-19} C です (非常に小さい量と感じるかも知れません、これは C の単位を大きく設定し過ぎたことも原因があるようです)。

「電荷がある」という言葉は、何もない真空中に電荷がある状態だけでなく、正負の電荷が異なる量ある状態を言います。正負の電荷が異なる量ある場合、正負のキャンセル分は除き、正負どちらかに偏った分を「ある」と言います。逆に、「電荷がない」ということは、電荷も何もない状態でもありますが、正負の電荷が同位置に等量ある状態も「ない」と言います。

なお本講義において、座標は全て [m] の単位を持つものとして話をします。

2.1 点電荷間のクーロンの法則

クーロンの法則は電荷間に働く力についての法則です。

法則 1(クーロンの法則) 電荷間には力が働く。力の大きさは電荷間の距離の 2 乗に反比例し、それぞれの電荷量に比例する。力の方向は 2 つの電荷を結んだ方向であり、2 つの電荷が同符号であれば斥力、異符号であれば引力となる。この力を**クーロン力**と呼ぶ。

距離の 2 乗に反比例しますので、電荷間の距離が 2 倍になると力の大きさは 1/4 になります[*2]。

[*1] 他の教科書では、電界と電場は同じ意味に用いられたりしますが、この授業では「電界と電場は違うもの」とします。電場は「電気的な作用が及んでいる空間」を指すものとします。ですから、電場は「電界と電束密度をひっくるめたもの」と考えてもらって OK です。

[*2] 余談: “力の大きさは電荷間の距離の 2 乗に反比例” と述べましたが、距離の 2 乗に反比例は実験的な観測結果であり、厳密に 2 乗とは言い切れません。ただし “$(2+\delta)$ 乗に反比例” としたとき、1772 年にキャベンディッシュは $|\delta| \leqq 0.02$ という上限を導き、その 100 年後にマクスウェルの実験で $|\delta| \leqq 5 \times 10^{-5}$ と示しました。100 年以上前にこのような実験が行われているのは驚くべきことだと思います (皆さんは実験をしようと思ってできますでしょ

また、一方の電荷が 2 倍になると力の大きさは 2 倍になります。

位置 $\boldsymbol{r}_0$ に Q [C]、位置 $\boldsymbol{r}$ に q [C] の点電荷があるとすると、q に働く力は

$$\boldsymbol{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} \tag{4}$$

と書けます。ここで、$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ は SI 単位系を採用したときの比例係数です。ε_0 は**真空の誘電率**と呼ばれ、$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi\times10^{-7}c_0^2} \approx 8.854\times10^{-12}$ [F/m] という値と単位を持っています。ここで、c_0 は真空中の光速であり、およそ $c_0 = 2.998\times10^8$ [m/s] です。だいたい、$c = 3\times10^8$ [m/s] です。これを使うと、$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9$ です。

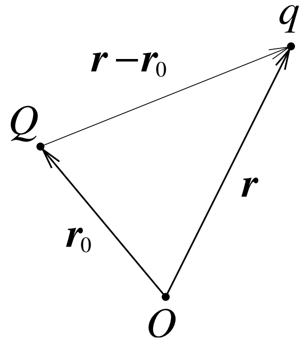

図 2　2 つの点電荷と位置ベクトル

2.2　クーロン力の重ね合わせ (線形性)

クーロン力は重ね合わせの原理が成立します。

法則 2(重ね合わせ) 3 つ以上の電荷があったとき ($q, Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$ [C] とする)、q が他の $Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$ から受けるクーロン力は、それぞれの電荷から受ける各クーロン力の (ベクトル) 和に等しい。

クーロン力の重ね合わせを式で書けば以下のようになります。q が $\boldsymbol{r}$ の位置にあり、$Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$ が $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N$ の位置にあるとき、

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots = \frac{qQ_1(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^3} + \frac{qQ_2(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{N}\frac{qQ_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n)}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n|^3} \tag{5}$$

3　電界

3.1　電界の定義

クーロンの法則は「直接 2 つの電荷間に力が働く」という記述になっていますが、現在の電磁気学では「片方の電荷により空間に**電場**が発生し、その電場中にもう一方の電荷があることで力を受ける」という “解釈” を採用しています。この解釈でないと電磁波の伝搬の説明ができないためです。

うか?)。

また 1936 年に Plimpton と Lawton は $|\delta| < 10^{-9}$ ということを示す実験を行ったそうです。1971 年に行われた実験では $\delta = (2.7\pm3.1)\times10^{-16}$ という結果が得られています。即ち、実験によれば “極めて 2 乗に反比例に近い” と言えます。(以上は Jackson, *Classical Electrodynamics* より引用)

電場を表す量は**電界**です。電界の式は次のようになります。まず、式 (4) を次のように分けます。

$$\boldsymbol{F} = q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{6}$$

右辺の意味は「$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は、$\boldsymbol{r}_0$ にある点電荷 Q によって位置 $\boldsymbol{r}$ にできた電界であり、そこに点電荷 q があることで $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の力を受ける」となります。

電場を考えない場合は、二つの電荷があって初めて「力」が発生します。一方で、電場を考える場合は、電荷 q があろうがなかろうが、電荷 Q があればその周囲の空間に「電場」が発生している、という解釈です (でも、電場ができていることを確認するには、そこに電荷を置いて力が働くかで判断する必要があります)。

$\boldsymbol{r}$ が任意の位置を表す位置ベクトルとすると、電界は位置ベクトルの関数となります (即ち、**電界はベクトル場**です)。$\boldsymbol{r}_0$ にある点電荷 Q によってできる電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は以下で与えられます。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} \tag{7}$$

電界の単位は式 (6) から [N/C] となりますが、電磁気学では別の表記である [V/m] を通常用います。もちろんどちらも同じ次元の単位です。

3.2 電界の重ね合わせ

クーロン力に重ね合わせが成立しますので、それを表す電界も当然に重ね合わせが成立します。

法則 3(電界の重ね合わせの理) 2 つ以上の電荷によってできる電界は、それぞれの電荷によってできる電界のベクトル和で表される。

位置 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N$ にある電荷量 $Q_1, Q_2, \cdots Q_N$ の N 個の点電荷がつくる電界は、式 (5) からも分かるように以下となります。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{n=1}^{N}\frac{Q_n}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n|^3} \tag{8}$$

3.3 電界の様子

電界は 3 次元ベクトル場であり、3 次元空間中の全ての各点にベクトル量が割り当たっている物理量です。これを平面に表現するのは極めて困難で、実際にはどこかの特徴的な一面のみを表現せざるを得ません。また、その一面においても、スカラー場ならよいのですが、ベクトル場の表示はたいへん困難です。ですから教科書に電界の様子を書くことは難しいものがあり、これが皆さんに電界などの「場」のイメージをつかみにくくしている理由の一つです。

よく用いられるベクトル場の表示方法は、“流線” によるものと、直接に離散的な位置での “ベクトル” をプロットする手法があります。以下に、次の 3 つのケースの場合の、流線とベクトルによる表示方法を示します。(1) ケース A: 正電荷が一つある場合、(2) ケース B: 正負等量の電荷が一つずつある場合、(3) ケース C: 等量の正電荷が二つある場合

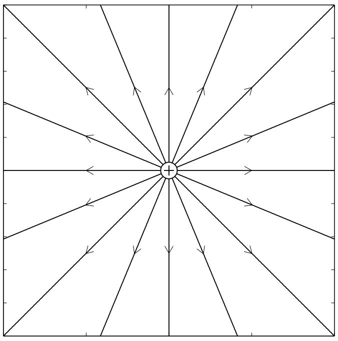

図 3　ケース A の流線表示

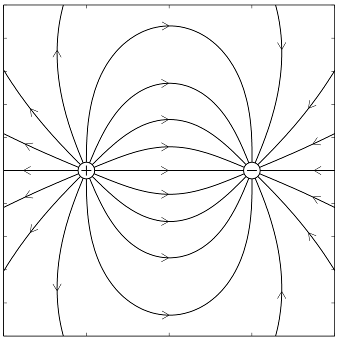

図 4　ケース B の流線表示

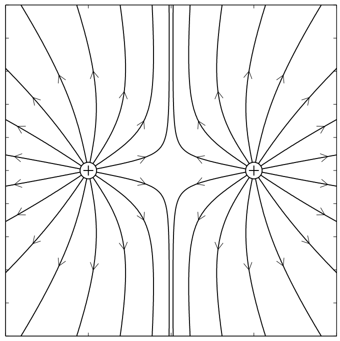

図 5　ケース C の流線表示

流線による表示は、各位置のベクトルの向いた方向をつなぎ合わせて一本の線とする手法です。各点のベクトルの向きは流線の接線方向から推測する必要があります。また、ベクトルの大きさ (電界なら強さ) は、線の密度から推測する必要があります (線が密集しているところは電界が強い)。向きはともかく、大きさは目分量の推測ではかなりアバウトになってしまいます。ただ、電界の向きについてはだいぶ分かり易いというのが利点です。

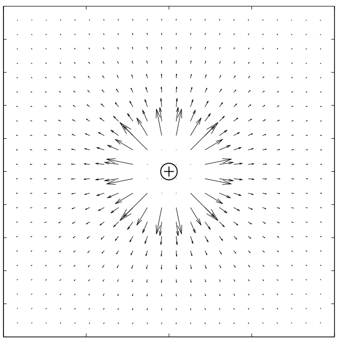

図 6　ケース A のベクトル表示

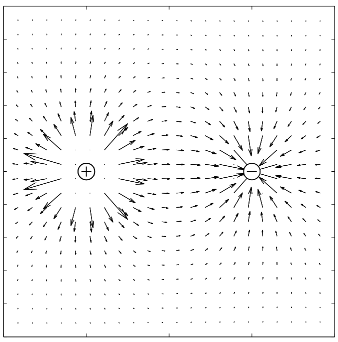

図 7　ケース B のベクトル表示

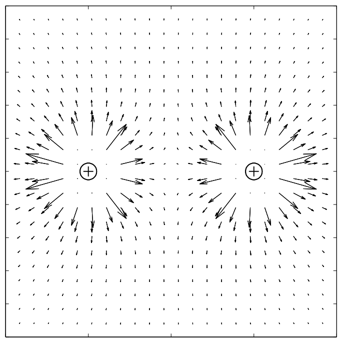

図 8　ケース C のベクトル表示

ベクトルで表示したとき、矢印がきちんと見えるところでは、各点のベクトル量は大きさ、方向ともに分かりやすいと思います[*3]。しかし、電界の強さが距離の 2 乗に反比例するため、電荷周辺と少し離れたところで矢印の大きさが大きく異なっていて、離れた点では矢印が小さ過ぎて分かりにくいと思います (さらに、上の図では電荷の極近傍のベクトルは大き過ぎて、図をはみ出してしまうので、描いていません)。

[*3] ベクトル表示ではベクトルの大きさは電界の単位であるのに対し、描いているところは長さの単位を持つ空間です。従って、電界の大きさと同じ長さのベクトルを描く必要はありません (長さが絶対的な電界の大きさを表さない)。適当にスケール化して、見易い長さで描いてよいことになります。

図 3 から 8 は電荷を含む「平面」の場を表したものですが、実際にはこれが 3 次元空間に分布しています。これを紙面に書くことは困難なことが分かるかと思います。訓練によって頭の中で想像するしかありません。